



International Conference
ENGINEERING MECHANICS 2010
Svratka, Czech Republic, May 10 – 13, 2010

DYNAMIC STABILITY AND POST-CRITICAL PROCESSES OF PENDULUM RELATED AUTO-PARAMETRIC SYSTEMS

J. Náprstek, C. Fischer *

Summary: *Many structures encountered in civil, mechanical, naval or aerospace engineering can show properties of auto-parametric systems. The general mathematical structure of the basic and generalized auto-parametric non-linear systems is formulated in the paper. Their internal structure and principal attributes are investigated. The aim of this study is to point out two special classes of auto-parametric systems, which are related on the level of mathematical analogy with spherical or inverse pendulum respectively. Very different character demonstrate both classes from the viewpoint of the semi-trivial solution and subsequent post-critical states. The existence and stability of the semi-trivial solution is analyzed. Individual types of post-critical states are discussed (limit cycles, quasi-periodic response types, chaotic processes, transition processes). General considerations are demonstrated on particular DDOF and MDOF cases in both classes mentioned above. Sensitivity of several systems to stability loss with respect to their parameters, excitation amplitudes and other factors are evaluated. Bifurcation mechanism and diagrams are developed and analyzed. Important transition effects together with physical interpretation are investigated. Some open problems and possible future research strategy are outlined.*

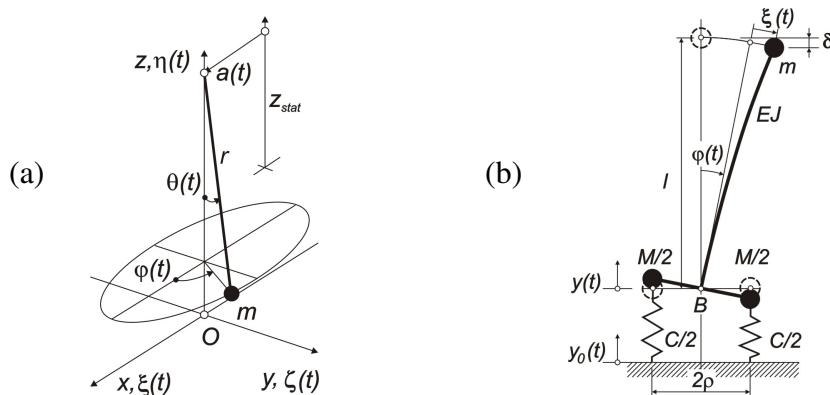
1. Úvod

Mnohé konstrukce používané ve stavebním, strojním, lodním a leteckém inženýrství mají charakter nelineárních auto-parametrických systémů. Kromě těchto oblastí techniky se se soustavami auto-parametrického typu často setkáváme také v mnoha oborech fyziky, chemie a dalších přírodních věd. Tyto systémy vzhledem ke speciálním vlastnostem tvoří uvnitř nelineárních soustav zvláštní skupinu. Obvykle se jedná o soustavy s více stupni volnosti (MDOF), které lze z matematického hlediska rozdělit do několika částí. Tyto části se dají popsat buď jednotlivými stupni volnosti, nebo složitějšími sub-strukturami systému jako celku. Dynamické chování jednotlivých částí, ať už je každá sama o sobě lineární či nelineární, je nezávislé, pokud pohyb systému probíhá v pod-kritickém stavu. Řešení příslušné diferenciální soustavy nazveme za tohoto stavu semi-triviálním. To znamená, že řešení na jedné části je netriviální (primární podsystém), zatímco na druhé je triviální (sekundární podsystém). Za těchto okolností pohyb jedné části neovlivňuje pohyb ostatních částí. S tímto typem odezvy se obecně lze setkat nejčastěji v podmínkách malých amplitud buzení a vysokého tlumení, pokud ovšem pracujeme se systémem bez vnitřní rezonance.

* Ing. Jiří Náprstek, DrSc., RNDr. Cyril Fischer, PhD.

Institute of Theoretical and Applied Mechanics ASCR, v.v.i.; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
naprstek@itam.cas.cz, fischerc@itam.cas.cz

Překonáme-li jistou hranici stability semi-triviálního řešení, nebo projdeme-li určitým bifurkačním bodem v prostoru parametrů systému nebo jeho buzení, semi-triviální režim odezvy systému může ztratit dynamickou stabilitu. Jeho odezva se pak stane netriviální obecně na celém systému. Za tohoto stavu se aktivují nelineární vazby mezi primárním a sekundárním podsystémem. Odezva se dostane do režimu auto-parametrické rezonance nebo též post-kritického stavu. Probíhá-li proces přechodu z podkritického do post-kritického režimu, je pro následné chování systému v post-kritickém stavu důležitý typ bifurkačního bodu či hranice stability, kterou systém překonává. V tomto smyslu existují dvě speciální třídy auto-parametrických systémů, které na úrovni matematické analogie souvisejí se sférickým, resp. s inverzním kyvadlem. Příklady systémů z obou zmíněných tříd jsou schématicky znázorněny na obr. 1. Z hlediska stability semi-triviálního řešení a následných post-kritických stavů mají obě třídy velmi rozdílný charakter. Vyplývá ze stoupající, resp. klesající efektivní "tuhosti" těchto soustav po překročení hranice stability semi-triviálního řešení. Nelineární vazby mezi primárním a sekundárním podsystémem mají stabilizující, resp. destabilizující účinek. Zatímco v prvním případě, obr. 1(a), existuje vždy možnost návratu do semi-triviálního stavu, pominou-li podmínky ztráty dynamické stability, ve druhém případě, obr. 1(b), existuje v post-kritické oblasti jistá hranice, při jejímž překročení není návrat možný a finální kolaps je nevyhnutelný.



Obrázek 1: Příklady jednoduchých auto-parametrických systémů s jedním sekundárním podsystémem; (a) třída: sférické kyvadlo (b) třída: inverzní kyvadlo.

Studium auto-parametrických systémů probíhalo intenzivně během posledních třiceti let. Nicméně zdá se, že některé teoretické studie věnované těmto efektům byly publikovány již v období let 1968–1985, viz např. Van der Burgh (1968), Nayfeh (1973), Haxton & Barr (1974). Následovala řada článků, monografií a dalších studií zabývajících se analytickými, numerickými a experimentálními problémy auto-parametrických systémů a jejich aplikací. Nejvíce publikací k této problematice uveřejnil Tondl spolu s různými spoluautory. Citujme alespoň několik málo z nich: Nabergoj & Tondl (1994a), Nabergoj et al. (1994b), Tondl & Nabergoj (1994), Tondl (1997). Významný byl přínos i jiných autorů, viz např. Bajaj et al. (1994), Hatwal et al. (1983), atd. Určitou inspiraci, speciální postupy řešení a některé výsledky lze nalézt mimo jiné v pracích autorů této studie, např. Náprstek & Pirner (2002), Náprstek & Fischer (2007), Náprstek & Fischer (2008), Náprstek & Fischer (2009a).

Rozbor řady konkrétních auto-parametrických systémů je zařazen do známých monografií, viz např. Nayfeh & Mook (1979), Tondl (1991), Tondl et al. (2000) a další. Pocházejí od nejvýznamnějších autorů v oboru. Shromažďují stav poznání, kterého bylo dosaženo zhruba do roku 2000. V dalším textu se tedy zmíníme o některých studiích a úvahách z posledních deseti let.

2. Základní matematická formulace

Auto-parametrický systém se skládá minimálně ze dvou podsystemů. To znamená, že minimem je systém se dvěma stupni volnosti (DDOF). Na první podsystem působí buzení (adiativní/multiplikativní, deterministické/náhodné, atd.). Skladba buzení není obecně libovolná. Musí být ve shodě se strukturou samotného systému a zachovávat jeho auto-parametrický charakter.

První nebo primární podsystem může být lineární nebo nelineární stejně jako sekundární podsystem. Vazby mezi oběma podsystemy jsou vždy nelineární. Spolupůsobení obou podsystemů se tedy dá vyjádřit následující soustavou rovnic:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{L}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \mathbf{K}_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{y}, t) = 0, \end{array} \right\} \quad (1)$$

kde $\mathbf{L}_1(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{L}_2(\mathbf{y}, t)$ jsou lineární nebo nelineární diferenciální operátory v času působící na stavových vektorech \mathbf{x} , \mathbf{y} a $\mathbf{K}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{K}_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jsou vazbové nelineární operátory v času působící na tytéž vektory \mathbf{x} , \mathbf{y} . Předpokládejme, že $\mathbf{L}_1(\mathbf{x}, t)$ popisuje primární podsystem a $\mathbf{L}_2(\mathbf{y}, t)$ podsystem sekundární. Skladbě soustavy (1) odpovídají oba systémy na obr. 1.

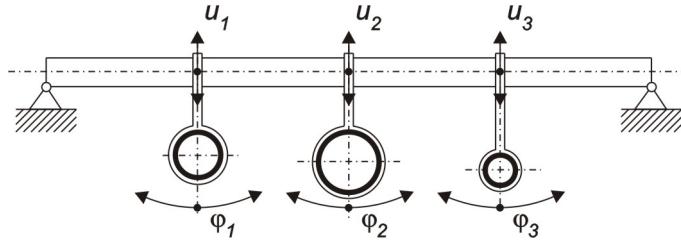
Aby se systém (1) mohl nazývat auto-parametrickým, musí existovat za jistých podmínek semi-triviální řešení. S tímto řešením můžeme počítat, jsou-li splněny jisté podmínky kladené na buzení a parametry systému. Semi-triviální řešení znamená, že energie pohlcená primárním podsystemem je kladná $\| \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \| > 0$. Jinými slovy: \mathbf{x} je netriviální, zatímco \mathbf{y} zůstává triviální. O semi-triviálním řešení má smysl uvažovat pouze tehdy, když existuje limita pro $t \rightarrow \infty$, kterou se řešení blíží ke stacionárnímu stavu $(\mathbf{x}_{st}, \mathbf{y}_{st})$, přičemž platí, že $\mathbf{y}_{st} = 0$. To znamená, že semi-triviální řešení vyhovuje systému:

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x} = \mathbf{x}_{st}, \quad \mathbf{y}_{st} = 0, \quad (2)$$

přičemž současně platí: $\mathbf{K}_{12}(\mathbf{x}_{st}, 0) = \mathbf{K}_{21}(\mathbf{x}_{st}, 0) = 0$, $\mathbf{L}_2(0) = 0$. Zvyšujeme-li budicí frekvenci z malých hodnot, rostou-li amplitudy buzení, nebo měníme-li parametry systému, můžeme překonat některý z bifurkačních bodů. Průchodem bifurkačním bodem může semi-triviální řešení ztratit stabilitu. V tom okamžiku výrazně vzrostou amplitudy \mathbf{x} a nelineární členy $\mathbf{K}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{K}_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ v (1) začnou ovlivňovat odezvu celého systému. Tím se stane netriviálním také vektor \mathbf{y} , což přivede systém do post-kritického stavu neboli do auto-parametrické rezonance. Základní definice a výsledky na úrovni analytické mechaniky lze nalézt na př. v monografii Chetayev (1962), rozšíření do oblasti stochastické dynamiky, viz např. monografie Bolotin (1979), Pugachev & Sinitcyn (1987), nebo články Náprstek (1996), Doyle et al. (1997) a další.

Buzení uplatněné výhradně na sekundární podsystem může někdy vést k jinému semi-triviálnímu řešení. Nicméně tento typ "reciprocity" není příliš častý. Buzení uplatněné na sekundární podsystem (primární podsystem nezatížen) zpravidla nevede k dalšímu semi-triviálnímu řešení, pokud systém nevykazuje jistý typ symetrie, srovnej oba případy v obr. 1. Z těchto důvodů zavedeme jakožto konvenci, že operátor $\mathbf{L}_2(\mathbf{y})$ budeme chápát jako nezávislý na explicitním času.

Je zřejmé, že auto-parametrický systém se může skládat z více než dvou podsystemů. V takovém případě bude počet operátorových rovnic v soustavě (1) vyšší v souladu s počtem podsystemů, čemuž bude odpovídat také počet stavových vektorů $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$. V případě takového systému si lze představit řadu stavů, do kterých se odezva může dostat. Dají se očekávat různá semi-triviální řešení vlivem buzení jednoho nebo více podsystemů, globální auto-parametrická rezonance, atd. Jedním z možných příkladů auto-parametrického systému se třemi podsystemy je prostý nosník, na kterém jsou zavěšena potrubí. Jiným příkladem je křídlo letadla se dvěma zavěšenými motory. Očekávaná semi-triviální řešení a post-kritický stav lze odhadnout z obr. 2.



Obrázek 2: Systém s několika sekundárními podsystémy.

Dimenze vektorů (x, y, \dots) může být v zásadě jakákoli, čemuž odpovídá počet skalárních rovnic v soustavě (1). Nicméně konkrétní matematické modely jsou obvykle omezeny s ohledem na značnou složitost analýzy, která následuje. V konkrétních případech se tedy z praktických důvodů rozsah omezuje jen na několik málo stupňů volnosti. Silnější zapojení numerických metod může tento stav změnit, avšak za cenu radikálního snížení úrovně poznatků o obecných vlastnostech systému.

3. Sférické kyvadlo a odvozené soustavy

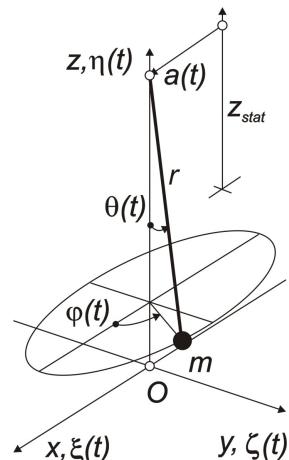
3.1. Základní vlastnosti systému

V nedávné minulosti se věnovala značná pozornost sférickému matematickému kyvadlu, které sloužilo jako teoretický model mnoha fyzikálních a technických systémů. Řadu sestav sférického nebo rovinného kyvadla lze pokládat z matematického hlediska za auto-parametrický systém. V této kapitole se pokusíme naznačit základní vlastnosti v případě, že těžiště výchozího stavu systému je níž než střed koule nebo vodorovná osa válce, kolem kterého se kyvadlo otáčí. Jinými slovy, kyvadlo má "tuhnoucí" charakteristiku. I když nelinearita vstupující do setrvačních sil tento faktor významně ovlivňuje, výsledný efekt znamená stabilizující účinek nelineárních sil. Dostane-li se kyvadlo do post-kritického stavu v amplitudách, které neznamenají jeho rotaci, nelineární síly zvyšují vratný účinek. Systém se tedy nemůže dostat do nevracného stavu, který neodvratně vede k jeho kolapsu. Naznačme základní matematické modely čtyř systémů, které demonstrují jevy vyplývající z jejich auto-parametrické povahy.

3.2. Sférické kyvadlo - dva stupně volnosti

Uvažujme obvyklé sférické kyvadlo se dvěma stupni volnosti (DDOF), které se pohybuje po kulové ploše se středem v bodě závěsu kyvadla, viz obr. 3. Pohybuje-li se závěsný bod v horizontální rovině, může kyvadlo sloužit jako dynamický tlumič kmitání, jak je poměrně často používán ve stavebním a strojním inženýrství.

V těchto oborech se stále pracuje téměř výhradně s lineárním matematickým modelem, jak vyplývá především z klasických monografií, viz např. Den Hartog (1956), Koloušek et al. (1984), Pars (1965). Lineární matematické modely předpokládají, že za jakýchkoli okolností bude pohyb probíhat ve svíslé rovině (xz) ve smyslu jednoho stupně volnosti. V souvislosti s dynamickým tlumičem byl tento model velmi podrobně propracován, viz např. Ayorinde & Warburton (1980), Warburton (1982) at' už v deterministickém, nebo ve stochastickém pojetí Kareem & Kline (1995).



Obrázek 3: Sférické kyvadlo s kinematickým buzením.

Velká pozornost využití tohoto principu byla věnována tlumení vibrací v železničním inženýrství, např. Lacarbonara & Colone (2007), Vestroni & Vidoli (2007), Carpineto et al. (2008). Během tohoto období byla vypracována řada metod pro navrhování těchto zařízení při použití jednoho i několika tlumičů, viz Abe & Fujino (1994), Fujino & Abe (1993).

Chování kyvadlových tlumičů, pokud jejich funkce není omezena na jeden směr, je však mnohem komplikovanější, než jak vyplývá z výše citovaných pramenů. Post-kritické stav, které se objevují v jednom nebo více rezonančních oborech, mohou být velmi nebezpečné, neboť kyvadlo ztrátou stability semi-triviální odezvy ztratí i svůj původní účel a může ovlivňovat dynamiku konstrukce negativně.

Předpokládejme, že horizontální buzení v závěsném bodě je kinematické a je plně popsáno funkcí $a = a(t)$. Jedná se tedy o DDOF systém. Matematický model vyplývá z rovnováhy mechanické energie. Systém je hamiltonovský, viz např. Arnold (1978), takže výrazy pro kinetickou a potenciální energii mají tvar:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} [r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + 2r\dot{a}(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) + \dot{a}^2], \quad (a) \\ V &= mgr(1 - \cos \theta). \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

m, r - hmotnost, resp. délka závěsu kyvadla,

$a = a(t)$ - horizontální kinematické buzení v bodě závěsu.

Ze vztahů (3) vyplývají dvě Lagrangeovy rovnice. Útlum úměrný rychlosti pohybu do nich zavedeme prostřednictvím kvadratické Rayleighovy funkce. Soustava pohybových rovnic tak získá konečný tvar:

$$\left. \begin{aligned} r\ddot{\theta} + (g - r\dot{\varphi}^2 \cos \theta) \sin \theta &= -\ddot{a} \cos \theta \cos \varphi - 2r\omega_b \dot{\theta}, \quad (a) \\ r(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) &= \ddot{a} \sin \theta \sin \varphi - 2r\omega_b \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Levá strana rovnic (4) vyjadřuje okamžitý obsah kinetické a potenciální energie v systému, zatímco pravá strana popisuje vnější dodávku energie a ztráty energie vlivem viskozního útlumu.

Jakožto primární podsystém zavedeme složku θ (pohyb ve svislé rovině xz). Pokusíme-li se do soustavy (4) zavést $\varphi(t) = 0$, rovnice (4(b)) je splněna identicky, zatímco z rovnice (4(a)) vyplývá:

$$r\ddot{\theta} + 2r\omega_b \dot{\theta} + g \sin \theta = -\ddot{a} \cos \theta. \quad (5)$$

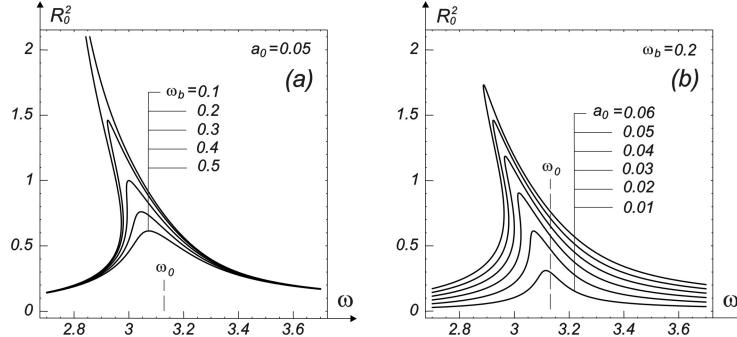
Z rovnice (5) vyplývá netriviální stacionární řešení θ_{st} . Je-li toto řešení stabilní, potom dvojice $(\theta_{st}(t), 0)$ znamená semi-triviální řešení. V rezonančním popř. i v dalších oborech frekvence může semi-triviální řešení ztratit stabilitu. V takovém případě se soustava dostane do post-kritického stavu, resp. do stavu auto-parametrické rezonance a obě složky řešení se stanou netriviálními.

Abychom byli schopni studovat stabilitu odezvy v blízkosti semi-triviálního řešení, je třeba do soustavy (4) zavést přibližnou transformaci do Kartézské soustavy x, y . Podrobnosti, viz např. Náprstek & Fischer (2008), Náprstek & Fischer (2009b) a obr. 3. Po delších úpravách dostaneme:

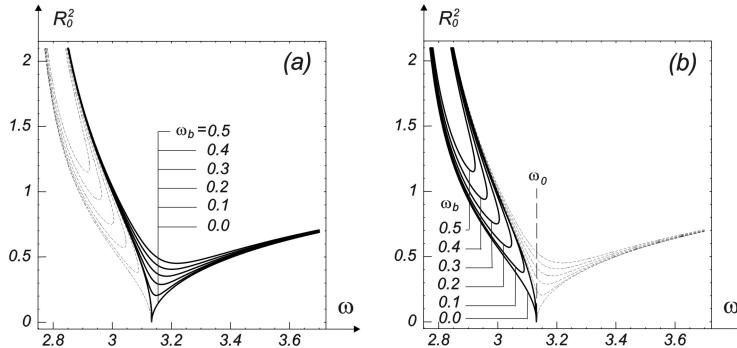
$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + \frac{1}{2r^2} \xi (\xi^2 + \zeta^2)'' + 2\omega_b \dot{\xi} + \frac{g}{r} (\xi + \frac{1}{2r^2} \xi (\xi^2 + \zeta^2)) &= -\ddot{a}, \quad (a) \\ \ddot{\zeta} + \frac{1}{2r^2} \zeta (\xi^2 + \zeta^2)'' + 2\omega_b \dot{\zeta} + \frac{g}{r} (\zeta + \frac{1}{2r^2} \zeta (\xi^2 + \zeta^2)) &= 0. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

což je approximace na úrovni $O(\varepsilon^6)$; $\varepsilon^2 = (\xi^2 + \zeta^2)/r^2$. Primární, resp. sekundární podsystém nyní reprezentuje proměnná ξ , resp. ζ . Soustava (6) je zřejmě použitelná pouze v omezené

oblasti proměnných ξ, ζ . Umožňuje však spojitou limitaci $\zeta \rightarrow 0$. Soustava je tedy vhodná pro analýzu stability semi-triviálního řešení reprezentovaného primární složkou ξ a nulovou hodnotou sekundární složky ζ . Existence smysluplného semi-triviálního řešení (ξ_{st}, ζ_{st}) se dá snadno ukázat. Bez ohledu na buzení \ddot{a} se dá role primárního a sekundárního podsystému vyměnit (v oboru auto-parametrických případů spíše řídký případ, viz úvodní kapitola). V daném případě je zřejmá vnitřní rezonance o základní úrovni 1:1. To vede k velké variabilitě post-kritických režimů v rezonanční oblasti.



Obrázek 4: Rezonanční křivky jako amplituda nenulové části semi-triviálního řešení; (a) pevná amplituda buzení, proměnný útlum; (b) pevný útlum, proměnná amplituda buzení.



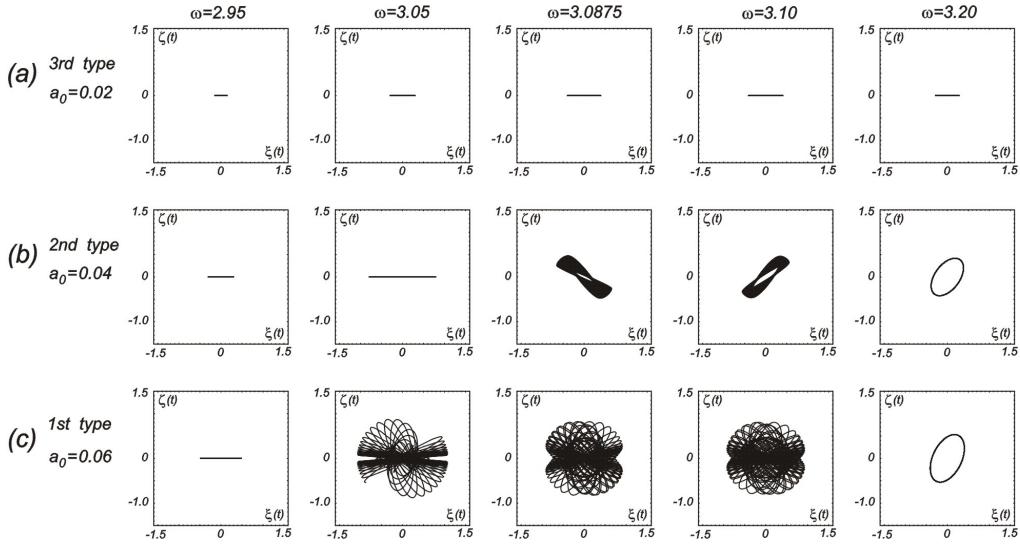
Obrázek 5: Hranice stability semi-triviálního řešení pro různé hodnoty tlumení: (a) kolmo k rovině (xz) - ζ hranice; (b) v rovině (xz) - ξ hranice.

Nelineární interakce uvnitř soustavy (6) vyplývá z dvojčlenů $(\xi^2(t) + \zeta^2(t))$ a $(\xi^2(t) + \zeta^2(t))^{\bullet\bullet}$. Tvar soustavy (1) včetně nelineárních částí vykazuje cyklickou symetrii ve složkách odezvy. Je zřejmé, že samotné dvojčleny zařazené do diferenciální soustavy budou znatelně složitější, pokud bude třeba do dynamického systému zavést účinky nekonzervativních a gyroskopických sil. Jako ukázku je možné zmínit post-kritické kmitání DDOF systému, který modeluje procesy flutteru pozorované na štíhlém nosníku, viz např. Náprstek (1998), Náprstek & Fischer (1999), Náprstek (2000), Pospíšil et al. (2006).

Abychom prozkoumali semi-triviální řešení, buzení a řešení soustavy (6) zavedeme ve tvaru harmonických funkcí:

$$a(t) = a_0 \sin \omega t; \quad \xi_0 = a_c \cos \omega t + a_s \sin \omega t, \quad \zeta_0 = 0. \quad (7)$$

Koeficienty a_c, a_s je obecně třeba pokládat za funkce času: $a_c = a_c(t)$, $a_s = a_s(t)$. Existuje-li stacionární řešení pro danou frekvenci ω , potom a_c, a_s musí konvergovat ke konstantám, stoupá-li čas $t \rightarrow \infty$. Dosadíme výrazy (7) do soustavy (6) a aplikujme operaci harmonické rovnováhy. Několik výsledků znázorněných na obr. 4 ukazuje základní charakter semi-triviálního řešení. Mají charakter rezonančních křivek nelineárního SDOF systému. Podle tvaru výsledné řešení



Obrázek 6: Tři typy rezonanční oblasti pro faktor útlumu $\omega_b = 0.3$; časový průběh odezvy znázorněný v rovině (xy) ; řádka (a) - třetí typ, řádka (b) - druhý typ, řádka (c) - první typ.

sice ukazuje na systém s měknoucí charakteristikou, avšak v samotné "tuhosti" je systém tuhnoucí, a tudíž návrat z post-kritického stavu je vždy možný.

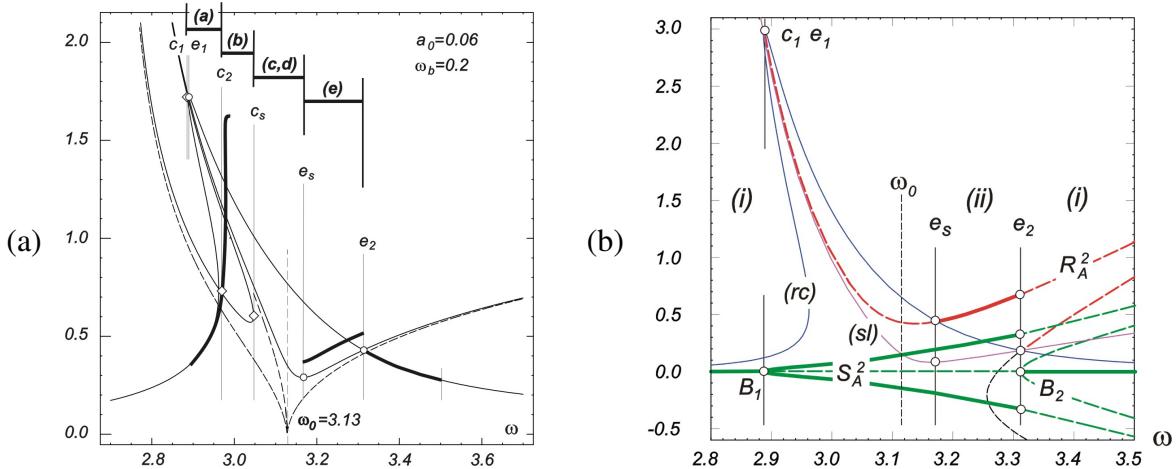
Ve druhém kroku posoudíme samotnou stabilitu semi-triviálního řešení. Hranice stability umožní určit části výše zmíněných rezonančních křivek, ve kterých jsou stabilní a ve kterých není existence stacionárního řešení typu (7) garantována. S tímto cílem napíšeme řešení soustavy (6) ve tvaru lineární approximace kombinující samotné semi-triviální řešení ξ_0 a malou poruchu u, v v obou souřadnicích, viz např. Chetayev (1962), Guckenheimer & Holmes (1983), Thompson & Stewart (2002) a mnoho dalších pramenů zabývajících se dynamickou stabilitou:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \xi_0 + u \\ \zeta = 0 + v \end{array} \right. , \quad \left. \begin{array}{l} u(t) = u_c \cos \omega t + u_s \sin \omega t, \\ v(t) = v_c \cos \omega t + v_s \sin \omega t. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \right\} \quad (8)$$

Approximace (8) se dosadí do soustavy (6) a opět se uplatní operace harmonické rovnováhy, viz např. Xu Z. & Cheung (1994).

Několik ilustrativních výsledků je znázorněno na obr. 5. Plné křivky v obr. 5a ukazují hranice stability složky ζ , kdy primární podsystém se stále pohybuje ve svíslé rovině xz . Nazvěme tuto křivku ζ hranicí stability. Překročit tuto křivku zleva nebo zdola znamená, že složka ζ ztrácí stabilní nulovou hodnotu a odezva systému má tendenci získat prostorový charakter. Abychom obnovili stabilní stav semi-triviálního řešení, je třeba snížit amplitudu buzení pod tuto hranici anebo zvýšit/snížit budicí frekvenci ω tak, aby systém opustil oblast auto-parametrické rezonance. Plné křivky v obr. 5b ukazují hranice, kdy odezva při určitém a_0, ω_b není jednoznačná a rezonanční křivka má dvě stabilní a jednu nestabilní větev. Tento jev je známý a objevuje se při studiu SDOF nelineárních systémů Duffingova typu. Tuto křivku nazveme ξ hranicí stability. Semi-triviální řešení samo o sobě tedy může obsahovat jisté typy nestabilit, které ovšem nenarušují jeho základní charakter.

Upozorněme na některé vlastnosti typické pro post-kritické chování systému v rezonanční oblasti. S ohledem na vztah předběžných rezonančních křivek a hranic stability byly identifikovány tři typy rezonančních oblastí. Na obr. 6 je vykreslen půdorys časového průběhu odezvy v rovině xy : řádka (a) - třetí typ, řádka (b) - druhý typ, řádka (c) - první typ. V prvním typu rezonanční oblasti se odezva chová velmi dramaticky. Ukazuje typ odezvy chaotický, kvazi-periodický a režimy limitního cyklu, viz např. Ren & Beards (1994). Jestliže rezonanční křivka překročí obě hranice stability (ζ, ξ) , prochází se v rezonanční oblasti postupně pěti různými



Obrázek 7: Levý obrázek (a): Rezonanční oblast prvního typu $\omega\epsilon(c_1, e_2)$ pro $a_0 = 0.06$, $\omega_b = 0.2$; pod-rezonanční $\omega\epsilon(0, c_1)$ a nad-rezonanční interval $\omega\epsilon(e_2, \infty)$ se stabilním semi-triviálním řešením; Pravý obrázek (b): bifurkační diagram veličin R_A^2, S_A^2 - amplituda a fázový posuv post-kritické odezvy; stabilní část - spojitá křivka, nestabilní část - čárkovaná křivka; (rc) , (sl) - rezonanční křivka a ζ hranice stability; B_1, B_2 - bifurkační body veličin S_A^2 ; $B_1 \equiv c_1, e_1$, $B_2 \equiv e_2$; e_s - minimum ζ hranice stability a průsečík (rc) a R_A^2 křivek; (i), (ii) - limitní cykly.

režimy odezvy (a-e), viz obr. 7a. Druhý typ rezonanční oblasti odpovídá stavu, kdy rezonanční křivka protíná pouze ζ hranici stability. V tomto případě lze zaznamenat dva různé režimy. Třetí typ rezonanční oblasti nastává v případě, kdy rezonanční křivka neprotíná ani jednu z obou hranic stability. Nedochází zde k žádnému zvláštnímu režimu. Semi-triviální řešení je stále stabilní a spojité navazuje na pod-rezonanční a nad-rezonanční intervaly budící frekvence.

Je třeba připomenout, že v post-kritickém stavu může být variabilita chaotických režimů odezvy velmi široká. Nezbytná je pečlivá analýza, viz např. články Abarbanel et al. (1990), Hammel (1990), nebo monografie Ott (1993), Schuster (1988). Pokud se použijí numerické metody, jejich výběr popř. úpravy musí být opatrně zváženy a v průběhu řešení stále testovány na základě různých nástrojů, např. Ljapunova exponentu, cyklických testů, atd., viz např. Benettin et al. (1980), Kloeden & Platen (1992) a řada dalších odkazů. Využití Ljapunova exponentu jsou věnovány práce Podowski (1973), Ahmadian & Inman (1985), Rosenstein et al. (1993), Sandri (1996), Xu G.-Q. & Yung (2003), Skokos (2009).

Bifurkační diagram uvedený v obr. 7b naznačuje hlavní vlastnosti systému z hlediska dynamické stability odezvy, resp. semi-triviálního řešení a přechodů mezi režimy odezvy v post-kritické oblasti. Na tyto vlastnosti se dá usuzovat na základě zobecněné amplitudy R_A^2 a fázového posuvu obou složek S_A^2 při průchodu rezonanční oblastí. Na zelené soustavě křivek S_A^2 je patrná dvojitá bifurkace typu pitchfork. Stabilní, resp. nestabilní část je vyznačena plnou, resp. čárkovanou křivkou. Stabilní triviální řešení ($S_A^2 = 0$) v intervalu budící frekvence $\omega\epsilon(0, B_1)$ znamená odezvu ve svislé rovině. V intervalu $\omega\epsilon(B_1, B_2)$ existují dvě stabilní netriviální a jedno nestabilní triviální řešení. Počínaje bodem $\omega = B_2$ existuje jedno stabilní triviální a čtyři nestabilní netriviální řešení S_A^2 . To odpovídá R_A^2 . Jediným rozdílem je interval $\omega\epsilon(B_1, e_s)$, kde R_A^2 se mění velmi rychle v času. To znamená, že v tomto intervalu neexistuje žádný limitní cyklus.

Z této analýzy vyplývá důležité praktické doporučení navrhovat tlumicí kyvadlo takovým způsobem, aby se vyloučily jakékoli průsečíky rezonanční křivky s hranicemi stability. Je-li kyvadlo použito jako tlumič vibrací vyvolaných větrem, je třeba především odstranit průsečíky se ζ hranicí. V opačném případě bude docházet k negativním účinkům kyvadla v rezonanční oblasti vlivem příčného i podélného rozkmitání, které se budou nežádoucím způsobem kombinovat a případně zesilovat. Přípustný je tedy pouze třetí typ rezonanční oblasti.

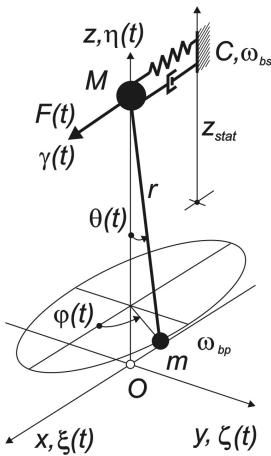
3.3. Sférické kyvadlo - tři stupně volnosti

Druhý auto-parametrický systém je jistou extrapolací předchozího. Je formulován jako sférické kyvadlo buzené zadanou silou v bodě závěsu. Toto schéma odpovídá reálnému kyvadlovému zařízení, které se často používá ve stavebním inženýrství k potlačení větrem buzeného kmitání kotvených stožárů, věží, vysokých budov, atd., viz obr. 8. Hmotnost M reprezentuje základní konstrukci modelovanou soustavou s jedním stupněm volnosti (SDOF) spojenou se sférickým kyvadlem podle předchozí kapitoly.

Pokud budeme v dalším kroku konstrukci samotnou modelovat jako lineární, můžeme vliv kyvadla do celého systému zahrnout pomocí přenosových funkcí. Vzhledem k tomu, že kyvadlo má výrazně nelineární charakter, musí tato přenosová funkce být funkci nejen frekvence ale i amplitudy. Spojení obou částí potom provedeme na základě rovnováhy sil v závěsu ze strany konstrukce a ze strany kyvadla. Toto spojení můžeme udělat ve frekvenční oblasti a následně integrací dospět k informaci o funkci celého systému z hlediska výchylek v bodě závěsu, popř. na celém zbytku konstrukce.

Také účinky náhodných buzení, které jsou v takovém případě nejvýznamnější, je možné řešit touto cestou, srovnej např. Baker (1995). V praktickém případě je třeba ještě uvážit, jakým způsobem se zahrne účinek proměnného úhlu náběhu větru.

Z toho všeho vyplývá, že kyvadlo je třeba prozkoumat pro budicí sílu v závěsu v jistém intervalu amplitud a frekvencí. Zopakujeme postup založený na energetické bilanci, Hamiltonově funkcionálu a Rayleighově kvadratické funkci. Odtud vyplývá soustava tří Lagrangeových diferenciálních rovnic v proměnných θ, φ, γ . Podobně jako v předchozím případě zavedeme přibližnou transformaci ze sférických (θ, φ) do kartézských souřadnic (ξ, ζ) . Odtud vyplývá soustava tří rovnic, která je rozšířením soustavy (6):



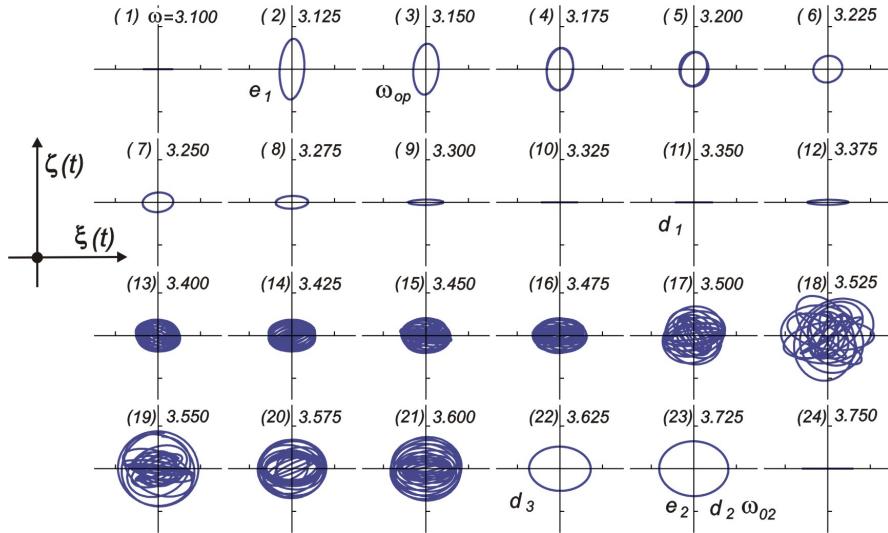
Obrázek 8: Schéma sférického kyvadla s budicí silou - tři stupně volnosti.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\gamma} + \kappa \ddot{\xi} + 2\omega_{bs} \dot{\gamma} + \omega_{0s}^2 \gamma &= F_r(t), \quad (a) \\ \ddot{\xi} + \frac{1}{2r^2} \xi (\xi^2 + \zeta^2) \ddot{\zeta} + \frac{1}{2} \omega_{bp} \dot{\xi} + \omega_{0p}^2 (\xi + \frac{1}{2r^2} \xi (\xi^2 + \zeta^2)) + \ddot{\gamma} &= 0, \quad (b) \\ \ddot{\zeta} + \frac{1}{2r^2} \zeta (\xi^2 + \zeta^2) \ddot{\xi} + \frac{1}{2} \omega_{bp} \dot{\zeta} + \omega_{0p}^2 (\zeta + \frac{1}{2r^2} \zeta (\xi^2 + \zeta^2)) &= 0. \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

kde byly zavedeny některé symboly pro zkrácení zápisu:

$$\begin{aligned} \omega_{bp}, \omega_{bs} &\quad - \text{koefficienty útlumu,} \\ \omega_{0p}^2 = g/r, \omega_{0s}^2 = C/(M+m) &\quad - \text{"lineární" vlastní frekvence,} \\ F_r(t) = F(t)/(M+m) &\quad - \text{redukovaná horizontální budicí síla,} \\ \kappa = m/(M+m) &\quad - \text{poměr hmot.} \end{aligned} \quad (10)$$

Primární podsystém obsahuje dvě neoddělitelné složky γ, ξ , které lze získat řešením rovnic (9a), (9b) pro $\zeta = 0$. Zbývající složka ζ má význam sekundárního podsystému. Hledané semi-triviální řešení (γ_{st}, ξ_{st}) a $(\zeta_{st} = 0)$ může existovat pouze za určitých podmínek, které je třeba najít. Je-li tento systém použit jako tlumicí zařízení, je třeba ho pečlivě prověřit. Vhodným výběrem parametrů se musí vyloučit jakákoli ztráta stability a vznik post-kritických procesů v odezvě kyvadla.



Obrázek 9: Odezva kyvadla v rovině (xy) v rezonanční oblasti pro stoupající $\omega \in (e_1, e_2)$, útlum $\omega_{bp} = 0.05$, amplituda budicí síly $f_0 = 0.35$.

Věnujme pozornost tvaru odezvy typického systému, zvyšujeme-li pozvolna budicí frekvenci a procházíme rezonančními oblastmi. Trajektorie promítnuté do roviny xy pro 24 frekvencí jsou znázorněny v obr. 9, viz jednotlivá pole (1)-(24). V poli (2) je patrný náhly vznik limitního cyklu stejně jako jeho pomalá degenerace a přechod zpět do semi-triviálního stavu během průchodu poli (9-12), srovnej např. Burton (1982), Cameron & Griffin (1989). Objevují se chaotické procesy se stabilní vnější a později i vnitřní obálkou, srovnej např. Benettin et al. (1980), Lichtenberg & Lieberman (1983), Baker (1995). Akumulace energie v systému roste a dochází k silným záZNĚJOVÝM efektům, které souvisejí s nesymetrickým kvazi-periodickým přeléváním energie mezi složkami odezvy. Počínaje polem (22) objevuje se další stabilní limitní cyklus, který zanikne náhle mezi poli (23-24). Při dalším zvyšování budicí frekvence má odezva již jen stabilní semi-triviální tvar. Podobným tématem se zabývá také práce Murphy et al. (1994).

Pokud provedeme řešení časového průběhu numerickou integrací soustavy (9) a na získané výsledky uplatníme Fourierovu transformaci, zjistíme, že s výjimkou některých přechodových stavů má odezva pouze jedinou významnou harmonickou složku. Její frekvence odpovídá budicí frekvenci. Žádné super-harmonické ani sub-harmonické složky nebyly zjištěny.

3.4. Kyvadlo s pružným závěsem

Jako třetí a čtvrtou ukázku uvedeme rovinné kyvadlo s pružným závěsem. Různé aspekty dynamiky kyvadla s pružným závěsem se zkoumaly v mnoha článcích. Obsáhlé zhodnocení tohoto tématu uveřejnil např. Lee & Hsu (1994), který se zaměřil na typy bifurkačních bodů a chování systému v jejich okolí. Podobně lze hodnotit práci El Rifai et al. (2007). Široké ukázky auto-parametrických systémů včetně detailních rozborů jejich vlastností včetně analýzy přechodových stavů a limitních cyklů lze nalézt v článcích a monografiích sepsaných Tondlem a jeho spolupracovníky, viz např. Nabergoj & Tondl (1994a), Tondl et al. (2000). Do této kategorie lze zařadit mnohé úlohy z oblasti aeroelastické stability, např. Náprstek & Pospíšil (2009c), a problémy dynamických tlumičů založených na principu parametrického buzení, viz mnohé práce Tondlovy podle citací v této práci a dále Song et al. (2003).

Mnohé technicky významné soustavy mohou být inspirací tohoto matematického modelu. Jmennujme na příklad: velká hmotnost zavěšená ve středu vodorovného prostého nosníku, která může reprezentovat potrubí nebo strojní zařízení v průmyslu, letecké motory upevněné pod křídly na elastických závěsech, kde svislé pohyby křídla mohou vyvolat kývavé pohyby motorů,

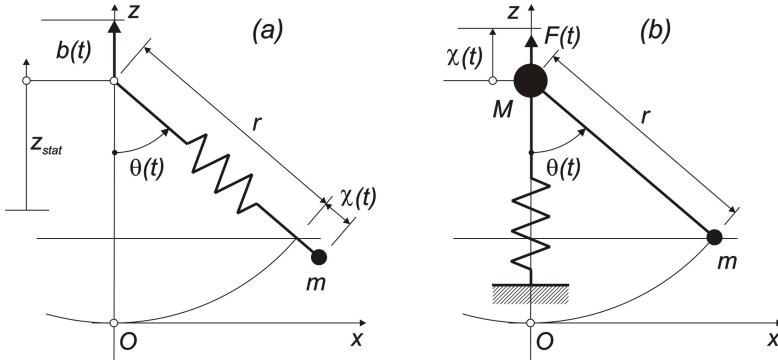
jeřáby a další zdvihací mechanizmy, atd. Nejčastěji používané dvě varianty tohoto modelu jsou naznačeny na obr. 10. V levé části obrázku je znázorněna varianta s pružným závěsem, obr. 10a, a v pravé části druhá varianta se svisle deformovatelným závěsem, obr. 10b.

K odvození pohybových rovnic systémů opět využijeme Hamiltonův funkcionál jako v předchozích případech. První varianta je podrobena svislému kinematickému buzení v bodě závěsu. Kinetická a potenciální energie se vyjádří vzhledem ke složkám odezvy $(\theta(t), \chi(t))$ a buzení $b(t)$:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left[(r + \chi)^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\chi}^2 + b^2 + 2\dot{b}((r + \chi)\dot{\theta} \sin \theta - \dot{\chi} \cos \theta) \right], & (a) \\ V &= mg(r + \chi)(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}C\chi^2. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Použijeme-li funkcionály (11) a doplníme vliv lineárního viskozního tlumení v obou složkách odezvy, dají se odvodit následující rovnice:

$$\left. \begin{aligned} (r + \chi)\ddot{\theta} + 2r\omega_{b\theta}\dot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\chi} + g \sin \theta + \ddot{b} \sin \theta &= 0, & (a) \\ \ddot{\chi} + 2\omega_{b\chi}\dot{\chi} + \omega_1^2\chi + g(1 - \cos \theta) - (r + \chi)\dot{\theta}^2 - \ddot{b} \cos \theta &= 0, & (b) \\ \omega_1^2 = \frac{C}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



Obrázek 10: Schéma rovinného kyvadla s deformovatelným závěsem.

Systém (12) je auto-parametrický. Připouští semi-triviální řešení $(\chi_{st}, \theta_{st} = 0)$. Za tohoto stavu je (12a) lineární rovnice soustavy s jedním stupněm volnosti a kinematickým buzením. Její řešení má smysl do okamžiku, kdy je překročena hranice stability. Opačná skladba, to jest nulový svislý posuv a nenulový úhel $\theta(t)$, zřejmě nemá smysl. Fyzikální interpretace je zřejmá. Poslední členy v rovnicích (12) (obsahující \ddot{b}) ukazují, že pouze vertikální buzení může vést k auto-parametrickému systému. Ať má totiž buzení jakýkoli jiný směr než svislý, neumožní vzniknout semi-triviálnímu stavu, neboť složky odezvy $\chi(t)$ a $\theta(t)$ nejsou separovatelné.

Rozbor druhé varianty kyvadla je obdobný. Závěs je tentokrát dokonale tuhý, ale hmotnost M v závěsovém bodu je spojena s pevnou podložkou lineární pružinou o tuhosti C , která umožňuje svislý pohyb v závěsovém bodu. Smyslem těchto úprav je vystihnout deformovatelnost prostého nosníku se soustředěnou hmotností (alespoň v jistém omezeném frekvenčním oboru). V souladu s obr. 10b píšeme výrazy pro kinetickou a potenciální energii:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{M}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{m}{2} (\dot{\chi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2r\dot{\chi}\dot{\theta} \sin \theta), & (a) \\ V &= mgr(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}C\chi^2. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Stejně jako v předchozích případech můžeme vzhledem k funkcionálům (13) a lineárnímu viskoznímu tlumení psát pohybové rovnice ve tvaru:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\omega_{b\theta}\dot{\theta} + \omega_{0p}^2 \sin \theta + \ddot{\chi} \sin \theta &= 0, & (a) \\ \ddot{\chi} + 2\omega_{b\chi}\dot{\chi} + \omega_1^2\chi + r\kappa(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) &= F_r(t), & (b) \\ \omega_1^2 = C/m. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

kde $\omega_{b\theta}, \omega_{b\chi}$ jsou koeficienty tlumení a $\omega_{0p}^2, \omega_{0s}^2, F_r(t), \kappa = m/(M+m)$ odpovídají vzorcům (10). Existence semi-triviálního řešení se dá ověřit snadno. Poznamenejme, že semi-triviální řešení systému (14) je identické se semi-triviálním řešením systému (12).

Je třeba upozornit na některé další vlastnosti systémů (12), (14). V zásadě každý z nich představuje dvě nelineárně spřažené diferenciální rovnice druhého rádu. Chování systému se dvěma stupni volnosti je odvozeno od vnitřní rezonance, ke které dojde, když frekvence ω_{0p}, ω_{0s} si jsou blízké ve smyslu $\omega_{0p} \approx 2\omega_{0s}$. Stabilní semi-triviální řešení zanikne v rezonanční oblasti a dojde k velmi složitým režimům odezvy. Procesy odezvy mají v takovém případě nejen deterministický ale většinou i chaotický charakter různého typu.

Dá se ukázat, že zde existují dva typy bifurkací, viz např. Iooss (1988), Iooss & Adelmeyer (1992), Kubík (1975). Jedná se o Poincaréovu a Hopfovou bifurkaci, viz např. Ji (2006). V Poincaréově bifurkačních bodech může docházet ke skokům, pokud zde existuje vícenásobné řešení. V některých případech existuje omezená oblast budicích frekvencí, ohrazená Poincaréovými bifurkačními body spjatými s těmito jevy přeskoků. Uvnitř tohoto frekvenčního intervalu existují dvě stabilní stacionární řešení. Jedno je harmonické, zatímco druhé je sub-harmonické druhého rádu. Počet sub-harmonických řešení druhého rádu se v Poincarého bodech mění. Za jiných podmínek existují frekvenční intervaly ohrazené Hopfovými bifurkačními body. V takovém případě se ovšem mění stabilita sub-harmonických řešení druhého rádu. V takovýchto intervalech neexistují stabilní stacionární řešení. Vznikají kvazi-periodická řešení s periodou, jejíž velikost je velmi citlivá na konkrétní hodnotu budicí frekvence. Přelévání energie je silně nesymetrické.

4. Jednoduché systémy spjaté s inverzním kyvadlem

4.1. Základní vlastnosti

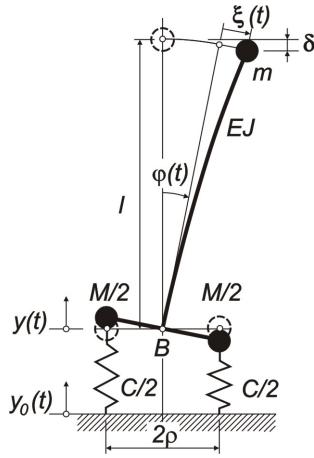
V technických aplikacích se setkáváme poměrně často s auto-parametrickými soustavami, které mají povahu inverzního kyvadla. Jejich základním znakem je, že střed koule nebo vodorovná osa válce, kolem nichž se pohybuje základní hmota kyvadla, je níž než těžiště pohybující se části soustavy. V typickém případě leží v základní poloze oba tyto body na společné svislé spojnici, kde střed otáčení leží pod těžištěm pohyblivé části. Citlivost těchto soustav po ztrátě dynamické stability je mnohem vyšší než u soustav spjatých s obvyklým kyvadlem, kde vzájemná poloha obou bodů ve svislém směru je opačná. Soustava se po ztrátě dynamické stability dostane do post-kritického stavu. V post-kritické oblasti však existuje jistá hranice, která odděluje stav umožňující návrat do stabilního režimu, pominou-li důvody ztráty stability, a stav, kdy je finální kolaps soustavy již nevyhnutelný. Tato hranice v post-kritické oblasti však leží poměrně blízko základní hranice ztráty stability.

V obecném případě hmota soustavy v post-kritickém stavu klesá, objeví-li se horizontální složky odezvy. Z toho důvodu je zřejmě obtížné soustavu uvést zpět do stabilního stavu, jakmile bylo dosaženo hranice stability. Je tedy logické, že hranice finálního kolapsu leží blízko hranice základní ztráty stability, viz např. Wu et al. (1998). Post-kritické režimy se v případě těchto soustav vyznačují vlastností, že nelineární vazbové síly, které se objevují po ztrátě stability, jsou záporné, a tudíž mají destabilizující charakter. Udržování jisté hladiny stability post-kritického stavu je tedy pouze na lineárních silách, což je možné pouze na velmi úzkém intervalu. To znamená, že analýza soustav spjatých s inverzním kyvadlem musí být velmi pečlivá, neboť ztráta stability zpravidla nevede jen ke ztrátě kvality, ale k jejich konečnému zániku.

4.2. Štíhlá soustava pod svislým seismickým buzením

Vysoké štíhlé soustavy vystavené silným účinkům svislé složky seismického buzení v epicentru události jsou bezprostředně ohroženy výše zmíněnými efekty.

Byla uveřejněna řada studií, které se zabývají dynamikou štíhlých soustav (věže, stožáry, komíny, mosty, atd.) podrobených účinkům seismických událostí. Zabývají se převážně účin-



Obrázek 11: Schéma 3-DOF auto-parametrického systému.

kem vodorovných buzení. Základní modely zahrnující stochastickou povahu buzení lze najít v monografiích, např. Bolotin (1979), Lin & Cai (1995), Moser (1973). Článků na toto téma byl publikováno velmi mnoho, např. Náprstek (1996) a řada dalších.

Je však třeba si uvědomit, že zejména v epicentru seismické události může být rozhodující svislá složka buzení. Svislá složka pohybu podloží způsobila těžká poškození nebo zhroucení řady vysokých konstrukcí během seismické události. Velmi rozšířené lineární modely však obvykle nejsou schopny v takovýchto případech poskytnout potřebné informace. Ukazuje se, že příčina těchto problémů vychází z procesů post-kritické auto-parametrické rezonance. Tyto silně nelineární dynamické procesy v post-kritickém režimu vedly k poškození nebo kolapsu řady věží, mostů a dalších konstrukcí vlivem zasažení seismickou událostí.

V pod-kritickém lineárním režimu jsou svislé a vodorovné složky odezvy nezávislé. Nebere-li se v úvahu vodorovná složka buzení, nedochází ani k odezvě ve vodorovném směru. Semi-triviální řešení plně popisuje chování konstrukce. Jakmile však amplituda svislého harmonického buzení v základech konstrukce překročí jistou hranici, semi-triviální řešení ztratí stabilitu. Následně se dominantní stane horizontální složka/složky odezvy prostřednictvím nelineární interakce svislé a vodorovných složek odezvy. To znamená, že soustava má charakter auto-parametrického systému. Detailní rozbor, viz např. Náprstek & Fischer (2008).

Věnujme pozornost teoretickému modelu o třech stupních volnosti (3DOF), jehož schéma je znázorněno na obr. 11. Systém je hamiltonovský. Základní diferenciální systém pohybu odvodíme ve tvaru Lagrangeových rovnic. Kinetickou a potenciální energii pohybujícího se systému píšeme ve tvaru:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\varphi}^2 - m\dot{y}(l\dot{\varphi} + \dot{\xi})\sin\varphi + \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi} + \dot{\xi})^2, \\ U &= (M+m)gy - mg[l(1 - \cos\varphi) + \xi\sin\varphi] + \frac{1}{2}C(y - y_0)^2 + \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{2}Cr^2\varphi^2 + 3EJ/l^3 \cdot \xi^2. \quad (b)$$

y - svislé přemístění v bodu B ;

y_0 - kinematické buzení (svislý seismický náhodný proces);

φ - pootočení soustavy v bodu B ;

ξ - ohybová deformace svislé konzoly;

M, m - efektivní hmotnost základu a konstrukce;

C, EJ - tuhost podloží, ohybová tuhost konzoly;

η_c, η_e - viskozní složka tuhostí C, EI (Kelvin);

ρ, l - geometrické parametry.

Pro další analýzu je účelné zavést bezrozměrné složky odezvy a buzení: $\zeta_0 = y_0/l$, $\zeta = y/l$, φ , $\psi = \varphi + \xi/l$. V okamžiku, kdy jsou sestrojeny Lagrangeovy rovnice, zavedeme approximaci odpovídající malé post-kritické odezvě: $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1$. Pohybové diferenciální rovnice 3DOF soustavy za tohoto předpokladu můžeme psát ve tvaru:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\zeta} - \kappa_0 (\dot{\psi} \varphi)^\circ + \omega_0^2 (\zeta - \zeta_0 + \eta_c (\dot{\zeta} - \dot{\zeta}_0)) &= 0, & (a) \\ \ddot{\varphi} - \kappa_1 (\dot{\zeta} \varphi)^\circ + \kappa_1 \dot{\psi} + \kappa_1 \dot{\zeta} \dot{\psi} - \kappa_1 \omega_2^2 \psi + \omega_1 (\varphi + \eta_c \dot{\varphi}) &= 0, & (b) \\ \ddot{\psi} - (\dot{\zeta} \varphi)^\circ + \omega_3^2 (\psi - \varphi + \eta_e (\dot{\psi} - \dot{\varphi})) &= 0, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

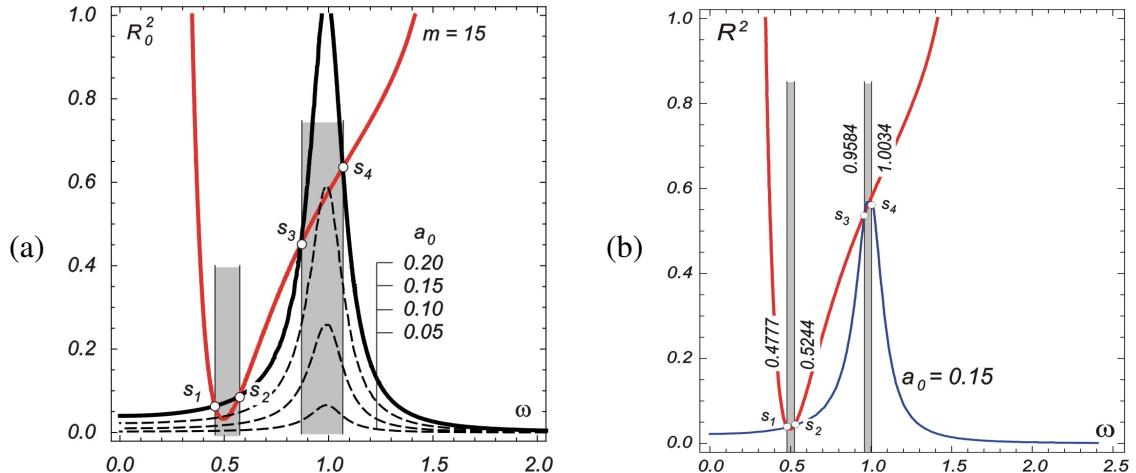
kde jsme zavedli následující označení:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_0 &= \frac{m}{M+m}, & \kappa_1 &= \frac{m \cdot l^2}{M \cdot \varrho^2}, \\ \omega_0^2 &= \frac{C}{M+m}, & \omega_1^2 &= \frac{C}{M}, & \omega_2^2 &= \frac{g}{l}, & \omega_3^2 &= \frac{6EJ}{m \cdot l^3}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Co se týká buzení $\zeta_0(t)$, je prozatím zavedeno jako harmonický proces.

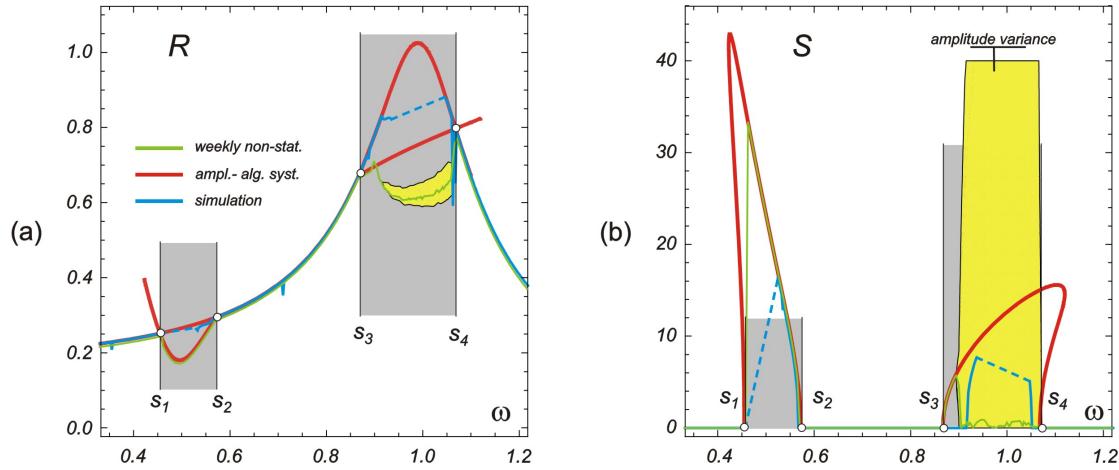
V post-kritickém režimu (auto-parametrická rezonance) dochází k dynamické nelineární interakci svislé a vodorovných složek odezvy. Tento proces vyústí v dominanci vodorovných složek odezvy, což může vést ke kolapsu konstrukce. V této souvislosti je širokopásmové nestacionární náhodné buzení seismického typu obzvláště nebezpečné.

Při postupném zvyšování budicí frekvence se objevila v post-kritickém režimu řada kvalitativně odlišných typů odezvy. Byly pozorovány chaotické a deterministické typy odezvy. Obecně vzato mohou se objevit ve stacionárním stavu, kvazi-periodickém nebo zcela nedeterministickém režimu včetně procesů přelévání energie mezi jednotlivými stupni volnosti. Velmi významným typem odezvy jsou limitní cykly.



Obrázek 12: Intervaly nestability; levý obrázek: velká amplituda buzení ($a_0 = 0.20$); pravý obrázek: střední amplituda buzení ($a_0 = 0.15$).

Zabývejme se typickým chováním systému při harmonickém buzení o velkých a středních amplitudách. Základní vlastnosti odezvy jsou patrné z grafů na obr. 12. Buzení o amplitudě $a_0 = 0.20$ se dá považovat za velké a vede k odezvě, která je vykreslena černou křivkou, viz obr. 12a. Soustava je nestabilní v intervalech $\omega \in (s_1, s_2)$ a $\omega \in (s_3, s_4)$, viz šedé oblasti. Z podrobné analýzy vyplývá, že odezva soustavy vyznačená v levé části obrázku je již mimo hranice stability. Z praktického hlediska by v takovém případě plynulo, že systém je nevhodný pro realizaci z důvodů spolehlivosti.



Obrázek 13: Amplitudy odezvy systému vyhodnocené třemi různými technikami; (a) svislá složka $\zeta(t) \rightarrow R$, (b): vodorovná složka $\psi(t) \rightarrow S$.

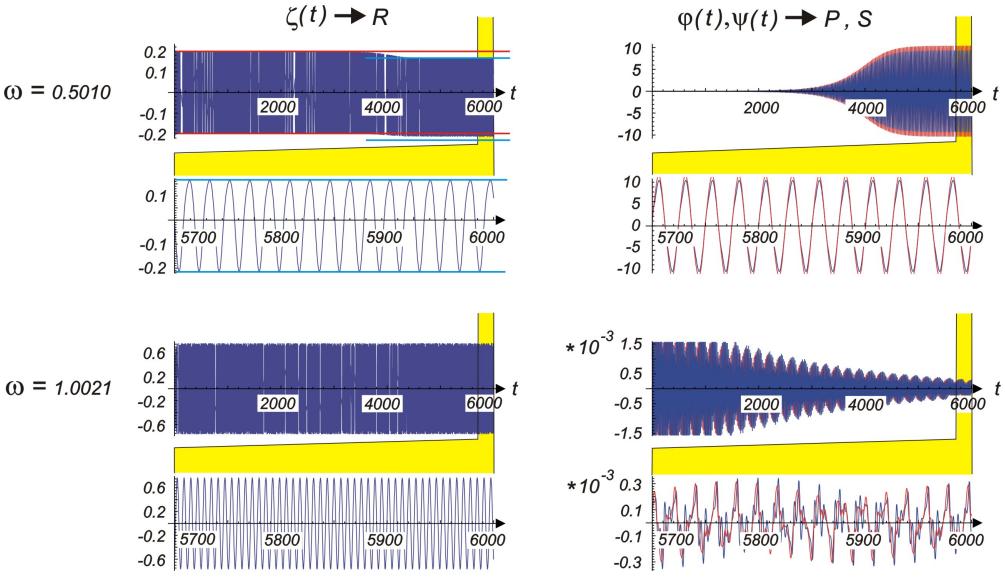
Posuďme výsledky na obr. 13. Obrázek (a) se týká amplitudy R svislé složky odezvy $\zeta(t)$, zatímco obrázek (b) shrnuje hlavní charakteristiky amplitudy S bezrozměrné vodorovné (nebo úhlové) složky $\psi(t)$. Křivky vyznačené červenou barvou jsou výsledkem řešení algebraické soustavy, která vznikne ze soustavy 16 metodou harmonické rovnováhy pro zcela stacionární stav odezvy, tj. pro případ, kdy amplitudy harmonických složek odezvy jsou zcela nezávislé na času. Zelené křivky odpovídají případu, kdy tyto amplitudy plynou z řešení diferenciální soustavy, která je opět výsledkem procesu harmonické rovnováhy. Konečně modré křivky jsou výsledkem numerických simulací uplatněných přímo na soustavu (16), srovnej s příslušnými kapitolami Chossat & Lauterbach (2000), Iooss & Adelmeyer (1992).

Simulace ukázaly, že zejména v intervalu $\omega \in (s_3, s_4)$ dochází ke vzniku silné chaotické složky. Její vliv byl posouzen vyhodnocením rozptylu (podobně jako při analýze náhodných procesů) a výsledky znázorněny žlutou barvou. Je zřetelné, že výsledky získané ze soustavy (16) semi-analytickými postupy založenými na metodě harmonické rovnováhy mají velmi omezené použití. Dají se použít v dolním intervalu $\omega \in (s_1, s_2)$. Algebraický systém zde vede k dvojímu řešení, přičemž pod s_1 je třeba vyloučit nestabilní větev. Nicméně simulace vede k podobným výsledkům obzvláště v horní části tohoto intervalu.

V horním intervalu $\omega \in (s_3, s_4)$ je zřejmý vysoký stupeň nestability. To se týká zvláště složky S . Stacionární amplitudy získané analyticky jsou zjevně nerealistické (červené křivky) a pouze výsledky simulací, které vystihují chaotický charakter odezvy, jsou reprezentativní. Část červené křivky, která leží nad bodem s_4 není přístupná numericky ani experimentálně, neboť je nestabilní.

Stejný 3DOF systém se zkoumal pro amplitudu buzení $a_0 = 0.15$. Rezonanční křivka, která popisuje amplitudu semi-triviální odezvy, protíná hranici stability stejně jako v předchozím případě, viz obr. 12b. Objevují se opět dva intervaly nestability. Nicméně jejich šířka je mnohem menší než v předchozím případě. Detailní vyhodnocení ukazuje, že zotavení systému po pomínutí zdrojů ztráty stability se může vrátit do stabilního režimu. Tento případ se dá pokládat za přijatelný, ačkoliv hranice stability semi-triviálního řešení byla překročena. Post-kritická odezva se dá v tomto případě alespoň přibližně zkoumat metodou harmonické rovnováhy uplatněné na soustavu (16). To znamená, že se dá použít již výše zmíněný algebraický systém, či diferenciální systém pro amplitudy harmonických složek odezvy. Nicméně některé detailní vlastnosti odezvy je třeba i v tomto případě zkoumat simulacemi. Sledujeme-li časový průběh složek odezvy na obr. 14, vidíme, že základní povaha odezvy je určena přechodovými procesy.

Uvnitř dolního intervalu nestability (střed $\omega = 0.5010$) nevykazuje svislá složka odezvy



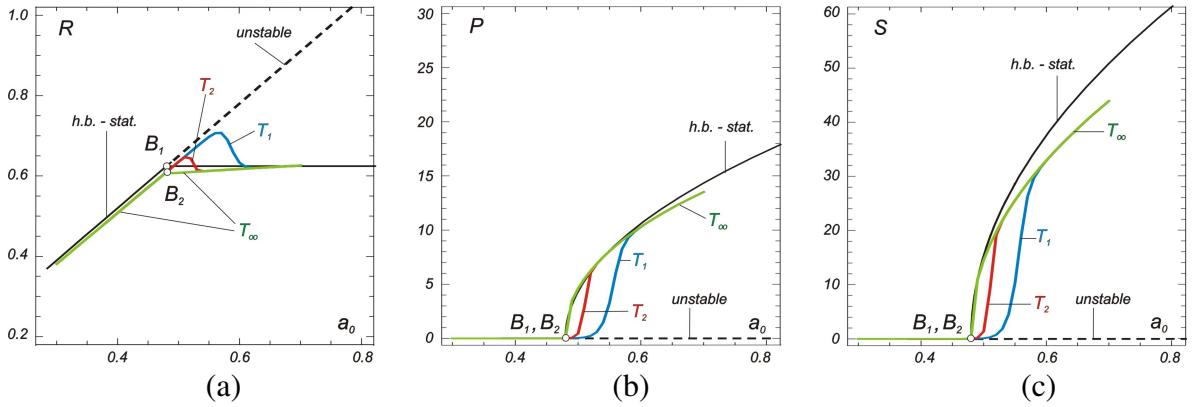
Obrázek 14: Časový průběh odezvy při střední úrovni amplitudy buzení uvnitř intervalu nestability; levý sloupec: svislá složka $\zeta(t)$, pravý sloupec: vodorovné (rotační) složky φ - červená, ψ - modrá; každý graf je znázorněn na původní ose $t \in (0, 6000)$ a dále ve zvětšeném měřítku časové osy $t \in (5700, 6000)$.

žádný dramatický vývoj. Jediným detailem je malý pokles amplitudy (a to pouze nad osou) počínaje bodem cca $t = 4000$. Vznik této mírné nesymetrie souvisí se skutečným počátkem postupné ztráty stability semi-triviálního řešení ve chvíli, kdy začíná stoupat amplituda vodorovné výchylky. Tento přechodový jev znamená malé neperiodické přelévání energie mezi svislou a vodorovnými složkami odezvy. Ztráta stability tedy není v tomto případě proces, který se objeví náhle. Je však stále třeba si být vědom toho, že ztráta stability rychle nastat může a bude připomínat jev náhlého proboulení.

Pro lepší představu jsou všechny základní grafy na intervalu $t \in (0, 6000)$ doplněny zvětšením na intervalu $t \in (5700, 6000)$, kdy odezva již přibližně dospěla do stacionárního stavu. Co se týká horního intervalu nestability (střed $\omega = 1.0021$), ani zde nebylo zjištěno žádné překvapení. Vodorovné složky odezvy jsou netriviální, ale blíží se asymptoticky k malé hodnotě. Spolu se svislou složkou se tak tvoří stav stabilního post-kritického stavu, který je řízen nelineárními členy. Příslušný limitní cyklus, který charakterizuje post-kritickou odezvu, není elliptický, neboť obsahuje super-harmonické složky, viz grafy vpravo dole na obr. 14.

Důležitým se ukázalo podrobné studium přechodových procesů, kdy odezva přechází ze stabilního semi-triviálního do post-kritického stavu za předpokladu, že buzení trvá po konečnou časově omezenou dobu. Soustava potřebuje jistý čas, aby její odezva přešla ze stabilního do post-kritického stavu. Jestliže tedy buzení skončí po uplynutí konečného času, může dojít k zotavení systému zpět do stabilního stavu. Vývoj svislé a vodorovných složek odezvy (ζ a φ, ψ), popř. jejich amplitud R, P, S pro frekvenci $\omega = 1.1700$ (přibližně střed intervalu "nestability") pro rostoucí amplitudu buzení a_0 je znázorněn na obr. 15. Dospějeme-li při zvyšování a_0 do bifurkačního bodu B_1 , narazíme na dvě větve. Ve všech třech obrázcích znamená čárkovaná černá křivka za bodem B_1 nestabilní část příslušnou k semi-triviálnímu řešení, zatímco plná černá křivka (témaž vodorovná přímka pro R - obr. 15a a stoupající křivka pro P, S - obr. 15b,c) znamená stabilní post-kritické řešení. Dalšími aspekty přechodových procesů se zabývali mnozí další autoři, např. Manuca & Savit (1996), Mazzino et al. (2004).

Vyhodnocujeme-li odezvu systému pro tytéž parametry a homogenní počáteční podmínky různými metodami, dostaneme velmi blízké výsledky, pokud uvažujeme dobu působení budicí síly $T \rightarrow \infty$ (zelená křivka), a tudíž odezva má charakter stacionárního procesu. Jestliže je



Obrázek 15: Proces ztráty stability a post-kritické odesvy; (a) bifurkační diagram svislé složky odesvy ζ - amplituda R ; (b-c) bifurkační diagram vodorovných (rotačních) složek φ, ψ - amplitudy P, S .

doba buzení omezená, uplatňuje se vliv přechodu od semi-triviálního k post-kritickému procesu odesvy, viz červenou a modrou křivku ve všech částech obr. 15. Pro krátkou dobu buzení T_1 (modrá) může amplituda buzení a_0 významně překročit bifurkační bod B_2 a odesva má stále semi-triviální charakter. Odesva se potom asymptoticky blíží stacionárnímu stavu (černé čárkované křivky). Střední doba buzení T_2 vede k mezilehlým křivkám odesvy (červené křivky). Z toho vyplývá, že pro časově omezené délky buzení, např. při seismických událostech, lze připustit vyšší amplitudu buzení než tu, která by vyplývala z předpokladu stacionárního stavu.

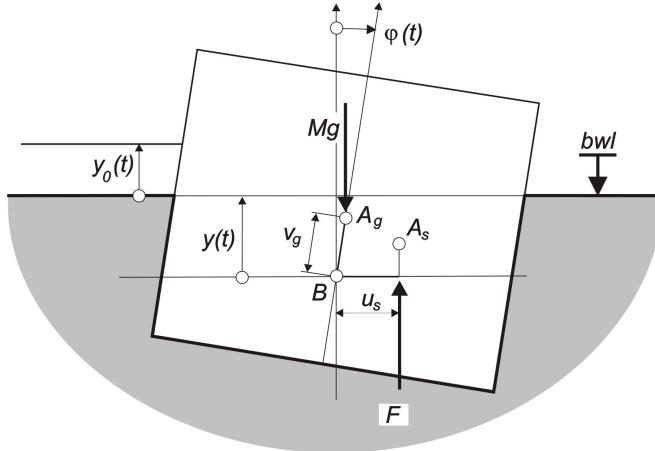
Z praktického hlediska je třeba připomenout, že post-kritický režim lze připustit jen ve velmi úzkém okolí hranice ztráty stability semi-triviálního řešení. Hranice mezního stavu konstrukce leží v její těsné blízkosti. Po jejím překročení je kolaps nevyhnutelný. Na druhé straně se dá počítat s jistou rezervou vzhledem ke konečné době trvání každé seismické události.

4.3. Příčná stabilita plovoucí lodi

Naznačíme v hrubých rysech případ známý z lodního inženýrství, kterému je věnována bohatá pozornost v literatuře. Týká se kombinovaného pohybu kolébání-zdvívání lodi na zvlněném moři. Řada autorů se zabývala více či méně sofistikovanými matematickými modely a počítacovými simulacemi pohybu lodi. Mezi problémy dynamiky lodi, které jsou velmi málo řešeny i na úrovni buzení harmonickými vlnami, můžeme počítat jev parametricky buzeného kymácení lodi. Vskutku vlnící se hladina může vést k parametrickému rozkývání lodi v příčném směru, jehož amplituda rychle roste a vede k překocení lodi. Tento jev se dá popsat různými mechanismy, které alespoň na úrovni prvního přiblížení se dají popsát, jak následuje ve zbytku této kapitoly.

Základní mechanismus vychází z nelineárního spolupůsobení rotační a svislé složky pohybu. K vazbě obou těchto složek dochází v blízkosti zobecněné vlastní frekvence svislého pohybu, čímž je umožněno přelévání energie do rotační složky, viz např. Lee (1992), Nayfeh (1973), Nabergoj & Tondl (1994a), Tondl et al. (2000) a další. V těchto pracích je však spolupůsobení obou složek výsledného pohybu popsáno na příliš zjednodušeném modelu. I když zde uvedený model neumožňuje zachytit řadu detailů tohoto složitého procesu, je přesto fyzikálně korektní, neboť respektuje vratné síly i momenty vztahu kapaliny a uvažuje mechanismus spolupůsobení rozhodujících sil.

Problém je formulován jako rovinný. Respektuje pouze svislou a rotační (příčnou) složku pohybu. Kinetická a potenciální energie celé soustavy se dá psát v souladu se schématem na



Obrázek 16: Příčný průřez lidi plovoucí na hladině vody.

obr. 16:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\ddot{y}^2 + \frac{1}{2}J_B\dot{\varphi}^2 - Mv_g\dot{y}\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ U &= Mg(y - y_0) - Mgv_g(1 - \cos \varphi) + F \cdot (y - y_0) + Fu_s \cdot \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

kde je zavedeno následující označení:

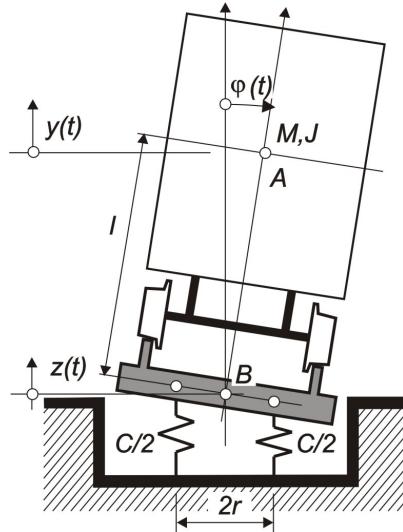
- $y(t), \varphi(t)$ - vertikální poloha bodu B vzhledem k hladině vody, resp. rotační složka odehyz;
- $y_0(t), bwl$ - kolísání vodní hladiny, resp. základní hladina vody;
- A_g - těžiště příčného řezu lodi;
- B, A_s - střed otáčení průřezu lodi, resp. působiště vztakových sil; poloha těchto bodů jsou funkce (y, φ) ;
- M, J_B - hmotnost, resp. hmotný moment setrvačnosti příčného řezu lodi vzhledem k bodu B ;
- v_g, u_s - orientovaná vzdálenost bodů A_g, B , resp. vodorovná orientovaná vzdálenost bodů B, A_s ; obě dvě vzdálenosti jsou funkcemi (y, φ) , kde $u_s(y, 0) = 0$;
- F - vztaková síla; funkce (y, φ) .

Opakujeme-li známý postup, ze vzorců (18) se dá snadno odvodit Lagrangeův systém pohybových rovnic:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} - Mv_g(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + Mg + \\ + (F + \frac{\partial F}{\partial y}y) + (\frac{\partial F}{\partial y}u_s + F\frac{\partial u_s}{\partial y})\varphi &= (Mg + F)y_0, \\ J_B\ddot{\varphi} - Mv_g(\ddot{y} + g) \sin \varphi + \\ + \frac{\partial F}{\partial \varphi}y + F \cdot u_s + (\frac{\partial F}{\partial \varphi}u_s + F\frac{\partial u_s}{\partial \varphi})\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Auto-parametrický charakter soustavy rovnic (19) je zřejmý poté, co zjistíme, že soustava připouští hodnoty $\varphi = 0$. Zbývající rovnice (19a) popisuje potom jednoduchý lineární oscilátor pod kinematickým buzením. Semi-triviální řešení tedy existuje. Dá se zkoumat jeho stabilita a analyzovat post-kritický stav. Současně je možné identifikovat hranici finálního kolapsu. Za touto hranicí již jakákoli restabilizace není možná a překocení lodě na bok je neodvratné.

Je třeba zdůraznit, že všechny parametry plovoucího tělesa, které jsou složitými funkcemi y, φ , stejně jako časový průběh kolísání vodní hladiny, musí být pečlivě určeny dříve, než přistoupíme k aplikaci soustavy rovnic (19).



Obrázek 17: Příčný řez železničním vozidlem a tratí.

4.4. Příčná stabilita vysokorychlostního železničního vozidla

Třetí ukázka pochází z železničního inženýrství. Vozidlo pohybující se po železniční trati je podrobeno účinkům jejích nerovností a deformovatelnosti. Na styku dvojkolí a kolejnice probíhají velmi složité procesy, ze kterých vyplývá silné vertikální a příčné buzení vozidla a trati. Tyto dynamické procesy pocházejí primárně z deterministických a stochastických nerovností trati a z poddajnosti podloží a svršku trati. Zajisté, také další procesy spojené s geometrií, příčným pohybem dvojkolí, suchým třením v kontaktu, atd. je třeba vzít v úvahu. Nicméně jeden z nejdůležitějších jevů ovlivňujících bezpečnou jízdu vozidla je jeho příčná dynamická stabilita. Abychom vyjádřili podstatu tohoto jevu, zjednodušme tento systém v co nejvyšší míře, viz obr. 17.

Předpokládejme nejprve, že podélná rychlosť pohybu vozidla je konstantní. Dále zavedeme předpoklad dokonale tuhého spojení skříně vozu a podvozku, takže vozidlo a jeho podvozky tvoří tuhý celek. Vůz je tedy uvažován jako tuhá deska o hmotnosti M a excentrickém momentu setrvačnosti J vzhledem k bodu B . Deska má dva stupně volnosti $y(t), \varphi(t)$. Bod A je těžiště. Vodorovná složka pohybu v bodě B je vyloučena. Trať (železniční svršek) se chápe jako nosník s rovnoměrně rozloženou hmotností a s konstantním momentem setrvačnosti podél osy. Podloží trati je winklerovské s lineární poddajností a vnitřní viskozitou. Ve styku dvojkolí a kolejnic dochází ke kinematickému buzení následkem nerovností trati, které jsou popsány vztahem $y(t), z(t)$. Zbývající charakteristiky jsou zřejmé ze schématu na obr. 17.

Semi-triviální řešení (neboli stabilní stav) se dá očekávat až do chvíle, kdy se objeví vodorovné složky odezvy. Vodorovné složky odezvy vznikají překonaní kritickou hranici, může dojít k nevracnému překocení vozu nebo k jeho vykolejení. Soustava se dá do značné míry zkoumat podobným způsobem jako obě předchozí. Nicméně její povaha se mění významně tím, že dochází ke styku vozu rychle se pohybujícího podél trati a stojící trati samotné, která se pohybuje následkem své deformovatelnosti pouze ve svislém směru.

Shrneme-li popsaná zjednodušení, můžeme zapsat následující výrazy pro kinetickou a potenciální energii částí pohybujících se podél osy trati:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - Ml \cdot \dot{y}\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ U &= Mgy - Ml \cdot g(1 - \cos \varphi) - F \cdot y - Q \cdot \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

kam jsme zavedli tato označení:

M , J - hmotnost vozu, resp. hmotný moment setrvačnosti vzhledem k bodu B ;

l - vzdálenost těžiště vozu A a bodu B ;

F, Q - síla, resp. moment působící ve styku dvojkolí-trat'.

Stejně jako v předchozích případech diferenciální systém pro složky y, φ se dá odvodit z rovnic (20). Doplníme-li viskosní tlumení, můžeme psát:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{y} + b_y\dot{y} - Ml \cdot (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2) &= F - Mg, & (a) \\ J\ddot{\varphi} + b_\varphi\dot{\varphi} - Ml \cdot (\ddot{y} \sin \varphi + \dot{y}\dot{\varphi}) - Ml \cdot \sin \varphi &= Q. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Rovnice (20) a (21), které popisují pohyb vozu, jsou zapsány v souřadnicích x, t , které se pohybují rychlostí c_s vzhledem ke stojícím souřadnicím x_s, t_s . Pohyblivé a stojící souřadnice v přičném řezu jsou identické. Pohyblivé a stojící souřadnice jsou vzájemně vázány známou transformací:

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x + c_s \cdot t, & t_s &= t \\ x &= x_s - c_s \cdot t_s, & t &= t_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_s} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_s} = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (22)$$

Trať se modeluje jako Eulerův nosník na nehmotném elastickém podloží Winklerova typu. Vodorovné přemístění se neuvažuje. Kroutivá poddajnost je zahrnuta, viz obr. 17. S odvoláním na klasickou literaturu platí následující rovnice:

$$\left. \begin{aligned} EIz_s''' + C_z \cdot z_s + \mu \cdot \ddot{z}_s + b_z \cdot \dot{z}_s &= -F \cdot \delta(x_s - c_s t_s), & (a) \\ GK\psi_s'' + C_z r^2 \cdot \psi_s - \mu K \ddot{\psi}_s + b_\psi \cdot \dot{\psi}_s &= -Q \cdot \delta(x_s - c_s t_s), & (b) \\ y_s - z_s \cdot \delta(x_s - c_s t_s) &= \alpha(x_s), & (c) \\ \varphi_s - \psi_s \cdot \delta(x_s - c_s t_s) &= 0. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

kde $z_s = z_s(x_s, t_s)$, $\psi_s = \psi_s(x_s, t_s)$. Rovnice (23c,d) vyjadřují kinematické vazby pocházející z nerovností kolejového svršku, které jsou dány funkcí $\alpha(x_s)$. Nerovnosti jsou zavedeny rovnicí (23c) a předpokládají se identické současně na obou kolejnicích. Transformujeme-li soustavu (23) do pohyblivých souřadnic za použití (22), dostaneme:

$$\left. \begin{aligned} EIz''' + C_z \cdot z + \mu \cdot (c_s^2 \cdot z'' + 2c_s \cdot \dot{z}'_s + \ddot{z}) + b_z(c_s \cdot z' + \dot{z}) &= -F \cdot \delta(0), & (a) \\ GK\psi'' + C_z r^2 \cdot \psi - \mu K(c_s^2 \psi'' + 2c_s \cdot \dot{\psi}' + \ddot{\psi}) + b_\psi(c_s \cdot \psi' + \dot{\psi}) &= -Q \cdot \delta(0), & (b) \\ y - z \cdot \delta(0) &= \alpha(c_s t), & (c) \\ \varphi - \psi \cdot \delta(0) &= 0. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Systém pohybových rovnic se tedy skládá ze dvou rovnic (21) a čtyř rovnic (24). Obsahuje šest neznámých složek odezvy $y(t), \varphi(t), z(x, t), \psi(x, t), F(t), K(t)$ vztažených k pohyblivým souřadnicím.

Prohlížíme-li soustavu (21), (24), zjistíme, že primární podsystém obsahuje složky odezvy $y(t), z(x, t), F(t)$. Společně s triviálními hodnotami složek $\varphi(t), \psi(x, t), K(t)$ tvoří semi-triviální řešení. Tento stav trvá do doby, než je dosažena hranice stability v (21). Potom nastane komplikovaný proces post-kritické odezvy. Tu má smysl zkoumat do chvíle, kdy je překročena kritická hranice vodorovného pohybu a kdy dochází k finálnímu kolapsu soustavy.

Zkoumaný systém může ztratit dynamickou stabilitu také vlivem nesymetrické povahy operátorů (24a,b), které obsahují nekonzervativní členy. Tyto typy kritických rychlostí jízdy souvisejí

s rychlostí šíření ohybových a kroutících vln ve svršku, který spočívá na elastickém podloží. Tento přidružený problém se zkoumal separátně a velmi intenzivně po dlouhou dobu na různých stupních výstižnosti matematického modelu. Je velice důležité si uvědomit, že obě skupiny kritických rychlostí se mohou prolínat. Nekonzervativní charakter úlohy může tedy vést ke kritickým rychlostem, které jsou nižší než ty, které plynou z její auto-parametrické povahy a naopak. V prvním případě se rozhodnutí učiní v oboru semi-triviálních řešení mimo jakýkoliv vodorovný pohyb vozu v příčném směru. Ve druhém případě bude rozhodující mechanismus ztráty stability nelineární auto-parametrické soustavy.

5. Závěr

Příspěvek se zabývá odezvou auto-parametrických nelineárních systémů. Tato třída nelineárních systémů s více stupni volnosti se vyznačuje řadou speciálních vlastností. Za nejdůležitější znak je třeba považovat existenci semi-triviálních řešení. Tím se každý takový systém dělí na primární a sekundární podsystém. Primární i sekundární podsystém může být lineární či nelineární. Nicméně jejich interakce, která se rozehraje v post-kritickém stavu, je vždy nelineární. Semi-triviální řešení se skládá z netriviální části (primární podsystém) a z triviální části (sekundární podsystém). Struktura systému však může být i složitější a obsahovat několik podsystémů, které umožňují ve stabilním stavu nezávislý pohyb a mít tedy povahu primárního podsystému. Semi-triviální řešení existuje, dokud je systém ve stabilním stavu. Je-li překročena hranice stability, objevují se složité procesy odezvy vyplývající z nelineární interakce primárního a sekundárního podsystému (podsystémů). Tyto post-kritické procesy je možné rozdělit do několika základních typů: stacionární (limitní cykly), kvazi-periodické se silným periodickým přeléváním energie mezi jednotlivými stupni volnosti (symetrické, nesymetrické), chaotické (široká třída případů závislých na typu a stabilitě atraktoru či repulzoru).

Autori se v příspěvku zaměřili na dvě třídy auto-parametrických systémů. První zahrnuje systémy, které je možné popsat sférickým kyvadlem. I když se tyto systémy mohou dostat do nestabilních stavů, množství jimi absorbované energie je vždy omezené. Ztráta jejich stability tedy obecně (na teoretické úrovni) není nevratným procesem, i když z praktických hledisek se mohou z řady důvodů stát za tohoto stavu nepoužitelnými. To znamená, že jisté hranice použitelnosti uvnitř stabilní či nestabilní oblasti je spíše technického než dynamického původu.

Druhá třída diskutovaných auto-parametrických systémů je spjata s inverzním kyvadlem. Tato třída se vyznačuje rychlým poklesem potenciální energie, jakmile překročí hranici auto-parametrické resonance. Systém je velice náchylný opustit úzkou oblast, ze které je ještě možný návrat do stabilního režimu, pominou-li podmínky pro vznik režimu post-kritického. Jakmile tedy překročí jistou hranici reversibility, finální kolaps soustavy je nevyhnuteLNÝ. Zjištění polohy této hranice je velmi důležité, neboť se obvykle nalézá velmi blízko hranice stability oddělující semi-triviální a post-kritický režim. To znamená, že v takovém případě se nedoporučuje opustit semi-triviální režim, pokud by nebylo použito další pomocné zařízení k sekundární stabilizaci.

6. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory projektu Grantové agentury ČR č. 103/09/0094, č. 103/07/J060, projektů Grantové agentury AV ČR č. A200710902, č. A200710805 a Výzkumného záměru AV 0Z20710524.

Autori by chtěli touto cestou vyjádřit úctu panu Doc. Ing. Aleši Tondlovi, DrSc., který je jedním ze světových zakladatelů teorie auto-parametrických systémů. Uveřejnil v tomto oboru velké množství základních i detailních prací, které jsou bohatě citovány. Autori příspěvku si pokládají za čest, že mohli bezprostředně navázat na jeho dílo.

7. Literatura

- Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B. (1990) Prediction in chaotic nonlinear systems: Methods for time series with broadband Fourier spectra. *Physical Reviews A*, 41, 1742.
- Abe M, Fujino Y. (1994) Dynamic characterization of multiple tuned mass dampers and some design formulas. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 23, 813-835.
- Ahmadian M., Inman, D.J. (1985) On the stability of general dynamic systems using a Lyapunov's direct method approach. *Computers and Structures*, 20, 1-3, 287-292.
- Arnold V.I. (1978) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York.
- Ayorinde E.O., Warburton G.B. (1980) Minimizing structural vibrations with absorbers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8, 219-236.
- Bajaj A.K., Chang S.I., Johnson J.M. (1994) Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree of freedom system. *Nonlinear dynamics*, 5, 433-457.
- Baker G.L. (1995) Control of the chaotic driven pendulum. *American Journal of Physics*, 63, 832-838.
- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn M. (1980) Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 2, Numerical application. *Meccanica*, 15, 21.
- Bolotin V.V. (1979) *Random Vibrations of Elastic Systems* (in Russian). Nauka, Moscow.
- Burton T.D. (1982) Non-linear oscillator limit cycle analysis using a time transformation approach. *Int.Jour. Non-linear Mechanics*, 17(1), 7-19.
- Cameron T.M., Griffin J.H. (1989) An alternating frequency/time domain method for calculating the steady state response on nonlinear dynamic systems. *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 56, 149-154.
- Carpinetto N., Lacarbonara W., Vestroni F. (2008) Mitigation of human-induced vibrations in suspension footbridges via multiple tuned mass dampers. In: *Proc. EURODYN 2008* (M.J. Brennan edt.). Southampton, Inst.Sound Vibr.Res., paper E264.
- Chetayev N.G. (1962) *Stability of Motion* (in Russian). Nauka, Moscow, 1962.
- Chossat P., Lauterbach R. (2000) *Methods in Equivalent Bifurcations and Dynamical Systems*. World Scientific Publishing, Singapore.
- Den Hartog J.P. (1956) *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York.
- Doyle M.M., Sri Namachchivaya N., Van Roessel H.J. (1997) Asymptotic stability of structural systems based on Lyapunov exponents and moment Lyapunov exponents. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32, 4, 681-692.
- El Rifai K., Haller G., Bajaj A.K. (2007) Global dynamics of an autoparametric spring-mass-pendulum system. *Nonlinear Dynamics*, 49, 105-116.
- Fujino Y., Abe M. (1993) Design formulas for tuned mass dampers based on a perturbation technique. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22, 833-854.
- Guckenheimer J., Holmes P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York.

- Hammel S.M. (1990) A noise reduction method for chaotic systems. *Physical Letters A*, 148, 421.
- Hatwal H., Mallik A.K., Ghosh A. (1983) Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system. *ASME Jour. Applied Mechanics*, 50, 657-662, 3.
- Haxton R.S., Barr A.D.S. (1974) The autoparametric vibration absorber. *ASME Jour. Applied Mechanics*, 94, 119-125.
- Iooss G. (1988) Global characterisation of the normal form for a vectorfield near a closed orbit. *Jour. Differential Equations*, 76, 47-76.
- Iooss G., Adelmeyer M. (1992) *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. World Scientific Publishing, London.
- Ji J.C. (2006) Nonresonant Hopf bifurcations of a controlled van der Pol-Duffing oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 297, 1-2, 183-199.
- Kareem A., Kline S. (1995) Performance of multiple mass dampers under random loading. *Journal of Structural Engineering*, 121(2), 348-361.
- Kloeden P.E., Platen E. (1992) *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg.
- Koloušek V., Pirner M., Fischer O., Náprstek J. (1984) *Wind Effects on Civil Engineering Structures*. Elsevier, Amsterdam.
- Kubík S. (1975) To the theory of nonlinear dynamic systems. *Acta Technica CSAV*, 20, 2, 186-212.
- Lacarbonara W., Colone V. (2007) Dynamic response of arch bridges traversed by high-speed trains. *Journal of Sound and Vibration*, 304, 72-90.
- Lee W.K. (1992) Domains of attraction of system of nonlinearly coupled ship motions by simple cell mapping. *ASME Jour. Offshore Mechanics and Arctic Eng.*, 114, 22-27.
- Lee W.K., Hsu C.S. (1994) A global analysis of an harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 171(3), 335-359.
- Lichtenberg A.J., Lieberman M.J. (1983) *Regular and Stochastic Motion*. Springer, New York.
- Lin Y.K., Cai G.Q. (1995) *Probabilistic Structural Dynamics - Advanced Theory and Applications*. McGraw - Hill, New York, 1995.
- Manuca R., Savit R. (1996) Stationarity and nonstationarity in time series analysis. *Physica D*, 99, 134.
- Mazzino A., Musacchio S., Vulpiani A. (2004) Multiple-scale analysis and renormalization for preasymptotic scalar transport. *Physics Reviews E*, 71, 011113.
- Moser J. (1973) *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, Princeton.
- Murphy K.D., Bayly P.V., Virgin L.N., Gottwald J.A. (1994) Measuring the stability of periodic attractors using perturbation-induced transients: applications to two non-linear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 172(1), 85-102.

- Nabergoj R., Tondl A. (1994a) A simulation of parametric ship rolling: Effects of hull bending and torsional elasticity. *Nonlinear Dynamics*, 6, 265-284.
- Nabergoj R., Tondl A., Virág Z. (1994b) Autoparametric resonance in an externally excited system. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, 2, 263-273.
- Náprstek J. (1996) Stochastic exponential and asymptotic stability of simple non-linear systems. *Jour. of Nonlinear Mechanics*, 31, 5, 693-705.
- Náprstek J. (1998) Non-linear self-excited random vibrations and stability of an SDOF system with parametric noises. *Meccanica*, 33, 267-277.
- Náprstek J., Fischer O. (1999) Stochastic stability of slender profiles vibrations in wind. In: *Proc. 3rd Int. Conf. Eng. Aero-Hydroelasticity* (M. Balda, J. Horáček, eds). Inst.Thermomech., Prague, pp.302-308.
- Náprstek J. (2000) Nonlinear stability of flutter-type vibrations in wind. In: *Proc. Flow Induced Vibrations FIV 2000* (S. Ziada, T. Staubli eds). HTA Luzern, Luzern, pp.445-454.
- Náprstek J., Pirner M. (2002) Non-linear behaviour and dynamic stability of a vibration spherical absorber. In: *Proc. 15th ASCE Engineering Mechanics Division Conference* (A. Smyth et al. eds). Columbia Univ., New York, 10 pp. CD ROM.
- Náprstek J., Fischer C. (2007) Auto-parametric semi-trivial and post-critical response of a spherical pendulum damper. In: *Proc. 11th Int. Conf. on Civ.Struct.Env. Engineering Computing* (B.H.V. Topping edt.). Civil-Comp Press, Malta St.Julian, 2007, CD paper #CC2007/2006/0020, 18 pgs.
- Náprstek J., Fischer C. (2008) Non-linear auto-parametric stability loss of a slender structure due to random non-stationary seismic excitation. In: *Proc. 14th Word Conference on Earthquake Engineering*. Chinese Assoc. Earthq. Eng., Beijing, pgs 8.
- Náprstek J., Fischer C. (2009a) Auto-parametric semi-trivial and post-critical response of a spherical pendulum damper. *Computers and Structures*, 87, 19-20, pp. 1204-1215.
- Náprstek J., Fischer C. (2009b) Two equations for description of the pendulum damper. In: *Proc. Engineering Mechanics 2009* (J.Náprstek, C.Fischer eds). ITAM ASCR Praha, Svatka, CD ROM paper #134, pp. 253-259.
- Náprstek J., Pospíšil S. (2009c) Stable and unstable limit cycles and nonlinear quasiperiodic response of aeroelastic structure. In: *5th European and African Conference on Wind Engineering* (C.Borri et al. eds). Univ.di Firenze, Firenze, CD ROM paper 90, 8 pgs.
- Nayfeh A.H., Mook D.T., Marshall L.R. (1973) Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motion. *Jour. Hydronautics*, 4, 145-152.
- Nayfeh A.H., Mook D.T. (1979) *Nonlinear Oscillations*. J. Wiley, New York.
- Ott E. (1993) *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Pars L.A. (1965) *A Treatise on Analytical Mechanics*. Heinemann, London.
- Podowski M. (1973) Analysis of stability of a certain type on nonlinear dynamic systems. *Bull Acad Pol Sci, Ser Sci Tech.*, 21, 9, 421-426.
- Pospíšil S., Náprstek J., Hračov S. (2006) Investigation of stability domains resulted from flow-structure interaction influenced by random noises. *Jour. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 94: 883-893.

Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. (1987) *Stochastic Differential Systems - Analysis and Filtering*. J. Willey, Chichester.

Ren Y., Beards C.F. (1994) A new receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the steady state response of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 172(5), 593-604.,

Rosenstein M.T., Colins J.J., De Luca C.J. (1993) A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*, 65, 117.

Sandri M. (1996) Numerical Calculation of Lyapunov Exponents. *Mathematica Journal*, 6, 78-84.

Schuster H.-G. (1988) *Deterministic Chaos*. 2nd ed. VCH, New York, 1988.

Skokos C. (2009) The Lyapunov Characteristic Exponents and their computation. *Cornell University arXiv*, <http://arxiv.org/abs/0811.0882v2>.

Song Y., Sato H., Iwata Y., Komatsuzaki T. (2003) The response of a dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 259, 4, 747-759.

Thompson J.M.T., Stewart H.B. (2002) *Nonlinear Dynamics and Chaos*. 2nd edn. Wiley, Chichester.

Tondl A. (1991) *Quenching of Self-Excited Vibrations*. Academia, Prague.

Tondl A., Nabergoj R. (1994) Non-periodic and chaotic vibrations in a flow induced systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, 12: 2193-2202.

Tondl A. (1997) To the analysis of autoparametric systems. *Z. Angew. Math. Mech.*, vol77, 6, 407-418.

Tondl A., Ruijgrok T., Verhulst F., Nabergoj R. (2000) *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.

Van der Burgh A.H.P. (1968) On the asymptotic solutions of the differential equations of the elastic pendulum. *Journal de Mécanique*, 7, 4, 507-520.

Vestroni F., Vidoli S. (2007) Closed-form solutions for the structural response to train loads. *Journal of Sound and Vibration*, 303, 691-706, 2007.

Warburton G.B. (1982) Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 381-401.

Wu Q., Thornton-Trump A.B., Sepehri N. (1998) Lyapunov stability control of inverted pendulums with general base point motion. *Journal of Non-Linear Mechanics*, 33, 5, 801-818.

Xu Z., Cheung Y.K. (1994) Averaging method using generalized harmonic functions for strongly non-linear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 174(4), 563-576.

Xu G.-Q., Yung S.P. (2003) Lyapunov stability of abstract nonlinear dynamic system in Banach space. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 20, 1, 105-127.