

STATE SPACE FORMULATIONS OF DYNAMICAL PROBLEMS

J. Kozánek*

Summary: *The $3n$ and $4n$ state space formulations of system of n linear second-order ordinary differential equations with special right side are proposed. The paper is concerned to an other than common understanding of resonant phenomena of dynamical systems.*

1. Úvod

Lineární matematický model dynamického systému s vektorem výchylek $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \geq 0$ zapisujeme nejčastěji jako soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu podle času t s nenulovou pravou stranou – vnějším buzením $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{f}_0 \in \mathbb{C}^n$:

$$\mathbf{K}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{st}, \quad (1)$$

kde $\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$, $\ddot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2}$, čtvercové matice $\mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ řádu n odpovídají tuhosti,

viskoznímu tlumení a hmotnosti dynamického systému, matici hmotnosti $\mathbf{M}$ předpokládáme regulární. Řešení rovnice (1) můžeme rozdělit do dvou kroků. Řešení $\mathbf{v}_h(t)$ odpovídající homogenní rovnice (s nulovou pravou stranou $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ a danými počátečními podmínkami $\mathbf{v}_h(0) = \mathbf{v}_0$, $\dot{\mathbf{v}}_h(0) = \dot{\mathbf{v}}_0^1$) a tzv. partikulární řešení rovnice (1) s nenulovou pravou stranou, při němž, za předpokladu výše uvedeného tvaru $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{st}$ hraje významnou roli rezolventní řešení $\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}_p e^{st}$, $\mathbf{v}_p = (\mathbf{K} + s\mathbf{B} + s^2\mathbf{M})^{-1}\mathbf{f}_0$ pochopitelně za předpokladu, že obecně komplexní parametr s není roven žádnému z vlastních čísel odpovídajících matematickému modelu dynamické soustavy (1), tzn. jen v případě, že nejde o rezonanci, viz např. – Lancaster (1966), Newland (1989), Kozánek (2002). V rezonanci je matice $(\mathbf{K} + s\mathbf{B} + s^2\mathbf{M})$ singulární a partikulární řešení hledáme jiným způsobem, například integrací pomocí Duhamelova integrálu. V příspěvku - Kozánek (2009) tak bylo např. hledáno partikulární a úplné řešení jednoduchých dynamických systémů se singulární maticí tuhosti i pro případ konstantního buzení ($s = 0$).

Nabízí se přitom otázka, jestli není možné oba typy, tzn. homogenní i partikulární řešení formulovat pro speciální pravé strany společně a odvodit tak řešení stejným způsobem jako v homogenním případě, pomocí maticové exponenciely, navíc i pro případy rezonanční. Po-

* Ing. Jan Kozánek, CSc.: Institute of Thermomechanics AS CR, Dolejškova 5, 182 00 Prague 8, tel.: +420.266052032, fax: +420.286 584 695; e-mail: kozanek@it.cas.cz

kusme se nejprve o takové řešení v případě harmonického buzení $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}$ s úhlovou frekvencí $\omega \geq 0$. Jinými slovy, budeme hovořit o formulaci Newtonova zákona ve stavovém prostoru pro případ harmonického buzení. Z matematického hlediska jde také o jiný pohled na jev rezonance, chápané jako ztotožnění vnějšího frekvenčního parametru s některým z vlastních čísel matematického modelu dynamické soustavy s důsledky pro rezolventní řešení a jeho singularitu. V našem případě je rezonance charakterizována násobností vlastního čísla matematického modelu v rozšířeném stavovém prostoru a zahrnujícího jak dynamickou soustavu tak její buzení. Výchozí soustava obyčejných diferenciálních rovnic s pravou stranou je přitom ve stavovém prostoru zapsána jako soustava homogenní a její řešení formulováno pomocí maticové exponenciely. Na druhé straně je velmi pravděpodobné, že (s ohledem na jeho jednoduchost) takový přístup není nový, v oblasti dynamických systémů ale není běžný.

Poznámka k použitému označení: V tomto příspěvku jsou skalární veličiny a parametry označovány latinskými a řeckými písmeny, tučně označujeme vektory (malá písmena v latince) a matice (velká písmena v latince). $\mathbf{X}^{-1}$ je inverzní matice k matici $\mathbf{X}$, $\overline{\mathbf{V}}_1$ je komplexně sdružená matice k matici $\mathbf{V}_1$. Matice $\mathbf{W}_1^T$ je matice transponovaná k matici $\mathbf{W}_1$, matice $\mathbf{I}, \mathbf{0}$ označuje jednotkovou, nulovou matici příslušného řádu, $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

2. 3n-stavový prostor, formulace a řešení

Předpokládejme v obecném případě $\mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n,n}$ s regulární maticí $\mathbf{M}$ a harmonické buzení rovnice (1) ve tvaru

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{o} \neq \mathbf{f}_0 \in \mathbb{C}^n, \quad i^2 = -1, \quad (2)$$

kde úhlová frekvence $\omega \geq 0$. Zvolené buzení $\mathbf{f}(t)$ vyhovuje soustavě obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = i\omega \mathbf{f}(t) \quad (3)$$

s počáteční podmínkou $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0$. Doplníme-li, podobně jako při formulaci řešení v tzv. 2n-stavovém prostoru, rovnici (1) a rovnici (3) o rovnost

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (4)$$

můžeme rovnice (1), (3) a (4) zapsat v 3n-stavovém prostoru $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3n}$ jako

homogenní soustavu 3n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad \mathbf{P}, \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{3n,3n}, \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{K} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ a matice } \mathbf{I}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n,n}. \text{ Vektor počátečních podmínek}$$

$$\text{v čase } t=0: \mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(0) \\ \mathbf{v}(0) \\ \mathbf{f}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^1 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbb{C}^{3n}, \quad \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0^1 \in \mathbb{C}^n.$$

Z rovnice (5) získáme homogenní rovnici s jedinou koeficientovou maticí $\mathbf{A}$:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3n,3n} \quad \mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Poznámka. Úloha, jak soustavu obyčejných diferenciálních rovnic vyššího řádu zapsat ve stavovém prostoru soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (tzn. jak linearizovat polynomiální problém vlastní hodnoty), není jednoznačná, další možné tvary matic $\mathbf{A}$ a stavových vektorů $\mathbf{u}(t)$ v rovnici (6) dostaneme např. změnou pořadí subvektorů stavového vektoru:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{f}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}.$$

Řešení rovnice (6), tzn. i úplné řešení rovnice (1) pak můžeme zapsat pomocí maticové exponenciely ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}_0 = \mathbf{X}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{u}_0, \quad (7)$$

kde Jordanova modální a spektrální faktorizace $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1}$. Zřejmě platí $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$. Matice $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{3n,3n}$, $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{3n,3n}$, $\mathbf{X}$ je regulární matice vlastních, případně hlavních vektorů a $\mathbf{J}$ je

odpovídající Jordanova kanonická matice. Z blokové struktury matice $\mathbf{A}$ vyplývá, že $i\omega$ je vlastním číslem matice $\mathbf{A}$ s násobností minimálně n . Submaticová struktura modální matice $\mathbf{X}$ je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{VJ} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{KV} + \mathbf{BVJ} + \mathbf{MVJ}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n,3n}. \quad (8)$$

V nejjednodušším případě, když $i\omega$ není vlastním číslem matice $\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, pří-
padně je vlastním číslem, ale přísluší mu jediný vlastní vektor této matice, je prvá hlavní submatice řádu n Jordanovy kanonické matice $\mathbf{J}$ diagonální a je rovna matici $i\omega\mathbf{I}$, $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu n a prvních n sloupců matice $\mathbf{X}$ - odpovídajících těmto vlastním číslům je:

$$\begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}, \quad (9)$$

kde $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je vhodná regulární matice, kterou můžeme v nerezonančním případě zvolit jednotkovou $\mathbf{C} = \mathbf{I}$.

2.1 Rezonanční případ

V rezonančním případě, kdy $i\omega$ jako vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ má větší násobnost než n , je matice $(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})$ singulární. V nejjednodušším případě je prvek $n, n+1$ (v n -tém řádku a $(n+1)$ -prvém sloupci) Jordanovy kanonické matice $\mathbf{J} = [J_{j\ell}]$ nenulový: $J_{n,n+1} = 1$. Diagonální prvek $J_{n+1,n+1} = i\omega$. To znamená, že pak bude výchylka dynamického systému $\mathbf{v}(t)$ podle rovnice (7) obsahovat funkci $t^\ell e^{i\omega t}$, $\ell \geq 1$.

Když označíme (algebraickou) násobnost vlastního čísla $i\omega$ matice $\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ jako r , $1 \leq r \leq 2n$ a odpovídající počet vlastních vektorů (geometrickou násobnost) jako p , $1 \leq p \leq r$, je počet hlavních vektorů $r - p$, $0 \leq r - p \leq r - 1$. V rezonančním případě bude násobnost vlastního čísla $i\omega$ matice $\mathbf{A}$ rovna $r + n$ a počet odpovídajících vlastních vektorů (geometrická násobnost) rovna $n + p - q$, kde $q = \text{nulita}(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})$. Počet hlavních vektorů je pak $r + q - p$. Z příkladů, získaných numerickou simulací vyplývá, že rezonanční stav je charakterizován tím, že počet (včetně nulového počtu) hlavních vektorů každé Jordany buňky matice $\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a odpovídající vlastnímu číslu $i\omega$ se v rezonančním případě zvětší o jedničku.

2.2 Nerezonanční případ

V nerezonančním případě, kdy $i\omega$ jako vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ má násobnost právě n (to znamená, že v tomto případě je matice $(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})$ regulární), můžeme psát (protože $J_{n,n+1} = 0$) blokovou strukturu Jordanovské kanonické matice jako blokově diagonální

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & \\ & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 \in \mathbb{C}^{2n,2n}, \text{ jednotková matice } \mathbf{I} \text{ je řádu } n.$$

Možnost, že matice $\mathbf{J}_2$ bude nediagonální se projeví přítomností funkcí typu $t^\ell e^{s_\nu t}$, $\ell \geq 1$, (s_ν je diagonální prvek matice $\mathbf{J}_2$) ve výchylce $\mathbf{v}(t)$ jako vlastnost uvažovaného dynamického systému nezávislá na vnějším buzení.

Matice $\mathbf{X}$ má blokovou strukturu

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & \mathbf{V}_2\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & & \\ & \mathbf{I} & \mathbf{U} \\ \mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n,2n}, \mathbf{V}_2 \in \mathbb{C}^{n,2n}, \quad (10)$$

nulová matice $\mathbf{0}$ je zde typu $(n, 2n)$ a submaticová struktura matice $\mathbf{X}$ zdůrazňuje vztah mezi $3n$ a $2n$ -stavovým prostorem řešení. Pro $2n$ -stavový prostor zapisujeme koeficientovou matici matematického modelu např. jako

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n,2n}, \quad (11)$$

kde matice $\mathbf{0}$ má řád n , $\mathbf{A}_2\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{J}_2$ a platí $\mathbf{K}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{V}_2\mathbf{J}_2 + \mathbf{M}\mathbf{V}_2\mathbf{J}_2^2 = \mathbf{0}$.

Pro rezolventní matici pak v původním stavovém prostoru dimenze n platí – Kozánek (2002):

$$\begin{aligned} [\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} &= \mathbf{V}_2(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_2)^{-1}\mathbf{W}_2^T, \\ i\omega[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} &= \mathbf{V}_2\mathbf{J}_2(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_2)^{-1}\mathbf{W}_2^T, \end{aligned} \quad (12)$$

a inverze modální matice $\mathbf{X}$ $3n$ -stavového prostoru je

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & [\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} \\ \mathbf{U}^{-1} & -(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_2)^{-1}\mathbf{W}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{V}_2(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_2)^{-1}\mathbf{W}_2^T \\ \mathbf{U}^{-1} & -(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_2)^{-1}\mathbf{W}_2^T \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Pro reálné koeficientové matice $\mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ můžeme řešení příslušného problému vlastní hodnoty v $2n$ -stavovém prostoru rozdělit na reálnou, komplexní a komplexně sdruženou část:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{2R} & & \\ & \mathbf{J}_{2C} & \\ & & \bar{\mathbf{J}}_{2C} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = [\mathbf{V}_{2R}, \mathbf{V}_{2C}, \bar{\mathbf{V}}_{2C}], \mathbf{W}_2 = [\mathbf{W}_{2R}, \mathbf{W}_{2C}, \bar{\mathbf{W}}_{2C}],$$

$$\mathbf{J}_{2R} \in \mathbb{R}^{n_R, n_R}, \mathbf{J}_{2C} \in \mathbb{C}^{n_C, n_C}, \mathbf{V}_{2R}, \mathbf{W}_{2R} \in \mathbb{R}^{n, n_R}, \mathbf{V}_{2C}, \mathbf{W}_{2C} \in \mathbb{C}^{n, n_C}, 2n = n_R + 2n_C.$$

2.2.1 Porovnání řešení 3n a 2n-stavového prostoru pro reálné koeficientové matice

V případě dynamického modelu kmitavých systémů můžeme předpokládat, že koeficientové matice tuhosti, viskozního tlumení a hmotnosti jsou reálné ($\mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n, n}$), buzení uvažujeme harmonické s budící úhlovou frekvencí ω , tj. $s = i\omega$, $\omega > 0$ a za předpokladu, že násobnost vlastního čísla $i\omega$ matice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & i\omega\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

je právě n (tj. matice $(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})$ je regulární) a pokud všechna vlastní čísla výše uvedené matice mají nenulové imaginární části, bloková struktura Jordanovské kanonické matice $\mathbf{J}$ se v $3n$ -stavovém prostoru zjednoduší na

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & & \\ & \mathbf{J}_1 & \\ & & \bar{\mathbf{J}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & \\ & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_1 \in \mathbb{C}^{n, n}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \\ & \bar{\mathbf{J}}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n, 2n}, \quad (14)$$

kde jednotková matice $\mathbf{I}$ je řádu n a modální matici $\mathbf{X}$ můžeme psát (protože matice $\mathbf{X}$ je regulární, jsou regulární i matice $\mathbf{V}_1, \mathbf{U}$):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} & \mathbf{V}_1\mathbf{J}_1 & \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{V}_1 & \bar{\mathbf{V}}_1 \\ \mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} i\omega\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} & \mathbf{U} \\ \left[\mathbf{V}_1(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{W}_1^T + \bar{\mathbf{V}}_1(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{W}}_1^T \right]^{-1} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1\mathbf{J}_1 & \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1 \\ \mathbf{V}_1 & \bar{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n, 2n}$$

a

$$\begin{aligned} [\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} &= \mathbf{V}_1(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{W}_1^T + \bar{\mathbf{V}}_1(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{W}}_1^T, \\ i\omega[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} &= \mathbf{V}_1\mathbf{J}_1(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{W}_1^T + \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{W}}_1^T, \end{aligned} \quad (16)$$

pro $\mathbf{V}_1, \mathbf{W}_1 \in \mathbb{C}^{n, n}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{V}_1 + \mathbf{B}\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1 + \mathbf{M}\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1^2 &= \mathbf{0} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{B}\bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1 + \mathbf{M}\bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1^2, \\ \mathbf{W}_1^T\mathbf{K} + \mathbf{J}_1^T\mathbf{W}_1^T\mathbf{B} + (\mathbf{J}_1^T)^2\mathbf{W}_1^T\mathbf{M} &= \mathbf{0} = \bar{\mathbf{W}}_1^T\mathbf{K} + \bar{\mathbf{J}}_1^T\bar{\mathbf{W}}_1^T\mathbf{B} + (\bar{\mathbf{J}}_1^T)^2\bar{\mathbf{W}}_1^T\mathbf{M}. \end{aligned} \quad (17)$$

V tomto případě můžeme inverzní matici k matici $\mathbf{X}$ psát jako

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{-1} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0} & \mathbf{0}] & (\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} + \omega^2\mathbf{M})^{-1} \\ \mathbf{U}^{-1} & \begin{bmatrix} -(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \\ (i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0} & \mathbf{0}] & \mathbf{V}_1(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{W}_1^T + \bar{\mathbf{V}}_1(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{W}}_1^T \\ \mathbf{U}^{-1} & \begin{bmatrix} -(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \\ (i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{0} & \mathbf{0}] & [\mathbf{V}_1(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}](\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{U}^{-1} & \begin{bmatrix} -(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \\ (i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} & -\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1} \\ -\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} & \bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

protože $\mathbf{W}_1^T = \mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1}$ a reálná část matice

$$[\mathbf{V}_1 \ \bar{\mathbf{V}}_1][\mathbf{W}_1 \ \bar{\mathbf{W}}_1]^T = 2\text{Re}(\mathbf{V}_1 \mathbf{W}_1^T) = 2\text{Re}[(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1}] = \mathbf{0}.$$

Úplné řešení v $3n$ -stavovém prostoru je

$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} + \omega^2\mathbf{M})^{-1}\mathbf{f}_0 e^{i\omega t} = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= [(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} + \omega^2\mathbf{M})^{-1}e^{i\omega t} - \mathbf{V}_1 e^{\mathbf{J}_1 t}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{W}_1^T - \bar{\mathbf{V}}_1 e^{\bar{\mathbf{J}}_1 t}(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{W}}_1^T]\mathbf{f}_0 \\ &\quad - [\mathbf{V}_1 e^{\mathbf{J}_1 t}\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 e^{\bar{\mathbf{J}}_1 t}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1}]\mathbf{v}_0 \\ &\quad + [\mathbf{V}_1 e^{\mathbf{J}_1 t}\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 e^{\bar{\mathbf{J}}_1 t}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}]\mathbf{v}_0^1 \\ &= [\mathbf{V}_1(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}](\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \\ &\quad - [\mathbf{V}_1 e^{\mathbf{J}_1 t}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1}\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 e^{\bar{\mathbf{J}}_1 t}(i\omega\mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}](\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_0 \\ &\quad - [\mathbf{V}_1 e^{\mathbf{J}_1 t}\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 e^{\bar{\mathbf{J}}_1 t}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1}(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1}]\mathbf{v}_0 \\ &\quad + (\mathbf{V}_1 e^{\mathbf{J}_1 t}\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 e^{\bar{\mathbf{J}}_1 t}\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})(\mathbf{V}_1\mathbf{J}_1\mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1\bar{\mathbf{J}}_1\bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1}\mathbf{v}_0^1 \end{aligned} \quad (21)$$

a odpovídá řešení v $2n$ -stavovém prostoru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{tj. } \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{u}}_2(t) = \mathbf{P}_2 \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}, \quad (22)$$

$\mathbf{N}_2, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{2n, 2n}$, $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbf{u}_2(t) \in \mathbb{C}^{2n}$ nebo

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{tj. } \dot{\mathbf{u}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}.$$

Uvažujeme-li i řešení příslušné homogenní rovnice

$$\dot{\mathbf{u}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2(t), \quad (23)$$

pro počáteční podmínky $\mathbf{u}_2(0) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(0) \\ \mathbf{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^1 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_{02}$, $\mathbf{u}_{02} \in \mathbb{C}^{2n}$, je odpovídající problém

vlastní hodnoty koeficientové matice $\mathbf{A}_2$ v $2n$ -stavovém prostoru a modální $\mathbf{U}$ a Jordanova kanonická matice $\mathbf{D}$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{D}. \quad (24)$$

V $2n$ -stavovém prostoru je úplným (homogenním a partikulárním) řešením

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{b}_0 + \mathbf{U} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}, \quad (25)$$

kde $\mathbf{b}_0 = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{u}_{01} - (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{p}_0$, píšeme v takovém tvaru, aby $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_{02}$. V $2n$ -stavovém prostoru pak máme:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) = [\mathbf{V}_1 \bar{\mathbf{V}}_1] \cdot \left\{ e^{\mathbf{D}t} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{-1} (\mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} (\mathbf{v}_0^1 - \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1} \mathbf{v}_0) \\ -\bar{\mathbf{V}}_1^{-1} (\mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} + \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} (\mathbf{v}_0^1 - \mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{v}_0) \end{bmatrix} \right. \right. \\ \left. \left. - \begin{bmatrix} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1} \mathbf{V}_1^{-1} (\mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 \\ -(i\omega \mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1} \bar{\mathbf{V}}_1^{-1} (\mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 \end{bmatrix} \right\rangle \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{J}_1)^{-1} \mathbf{V}_1^{-1} (\mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \\ -(i\omega \mathbf{I} - \bar{\mathbf{J}}_1)^{-1} \bar{\mathbf{V}}_1^{-1} (\mathbf{V}_1 \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_1^{-1} - \bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{J}}_1 \bar{\mathbf{V}}_1^{-1})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}_0 e^{i\omega t} \end{bmatrix} \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

což dá po úpravě vztah (21).

3. 4n-stavový prostor, formulace a řešení

Obecnějším tvarem rovnice (1) je

$$\mathbf{K}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) = \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{f}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{f}}(t) + \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{f}}(t), \quad (27)$$

kde matice $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{C}^{n,n}$ dávající nenulovou pravou stranu rovnice (27) rozšiřují možné způsoby aplikace budících účinků na dynamický systém a homogenní rovnice

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{f}(t) + \hat{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{f}}(t) + \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{M}} \in \mathbb{C}^{n,n} \quad (28)$$

s regulární maticí $\hat{\mathbf{M}}$ zobecňuje typ (polyharmonického) buzení. Rovnici (3), tj. (mono)harmonickému buzení s budící úhlovou frekvencí $\omega > 0$ pak v tomto případě odpovídá (bi)harmonické buzení s úhlovými frekvencemi $+\omega, -\omega$ a speciální matice $\hat{\mathbf{K}} = \omega^2 \mathbf{I}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{I}$. Protože je operativnější zadávat vektory polyharmonických budících sil s odpovídajícími frekvencemi a daným časovým průběhem buzení než implicitně matice $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{M}}$ do rovnice (28), musíme nejprve zvolit řešení homogenní rovnice (28) a odpovídající koeficientové matice k nim pomocí konstrukčních vzorců dopočítat. Výjimku tvoří matice $\tilde{\mathbf{M}}$, kterou můžeme zvolit libovolně, ale tak aby byla regulární, nejjednodušeji jako matici jednotkovou $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{I}$. Potom zvolíme vektory dimenze n v počtu $2n$ jako sloupce matice $\mathbf{F}_2 \in \mathbb{C}^{n,2n}$ o hodnotě n a odpovídající, obecně komplexní vlastní čísla $s_{F_\nu} \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, \dots, 2n$ problému (28) a zejména také strukturu Jordanovy kanonické matice $\mathbf{J}_{F_2} \in \mathbb{C}^{2n,2n}$, které bude odpovídat požadovaný časový průběh jednotlivých komponent polyharmonického buzení typu $\mathbf{f}_\nu e^{s_{F_\nu} t}$ resp. $t^\ell \mathbf{f}_\nu e^{s_{F_\nu} t}$, $\ell > 0$. Musíme pochopitelně respektovat zvolené řetězce vlastních a hlavních vektorů odpovídajících násobným vlastním číslům a zajistit regularitu matice

$$\mathbf{U}_{F_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{J}_{F_2} \\ & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n,2n},$$

abychom mohli, řešením rovnice

$$\mathbf{U}_{F_2} \mathbf{W}_{F_2}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{0}$ je nulová matice řádu n , získat matici $\mathbf{W}_{F_2} \in \mathbb{C}^{n,2n}$. Hledané koeficientové matice $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{B}}$ pak získáme – viz např. Kozánek (2002), podle vzorců

$$\hat{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{M}} \mathbf{F}_2 \mathbf{J}_{F_2}^2 \mathbf{W}_{F_2}^T \hat{\mathbf{M}}, \quad \hat{\mathbf{K}} = -\hat{\mathbf{M}} \mathbf{F}_2 \mathbf{J}_{F_2}^3 \mathbf{W}_{F_2}^T \hat{\mathbf{M}} - \hat{\mathbf{M}} \mathbf{F}_2 \mathbf{J}_{F_2}^2 \mathbf{W}_{F_2}^T \hat{\mathbf{B}}.$$

Ve $4n$ -stavovém prostoru $\mathbf{u}(t) = [\dot{\mathbf{v}}(t)^T, \mathbf{v}(t)^T, \mathbf{f}(t)^T, \dot{\mathbf{f}}(t)^T]^T \in \mathbb{C}^{4n}$, s počáteční podmínkou $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = [\dot{\mathbf{v}}(0)^T, \mathbf{v}(0)^T, \mathbf{f}(0)^T, \dot{\mathbf{f}}(0)^T]^T = [\mathbf{v}_0^{1T}, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{f}_0^T, \mathbf{f}_0^{1T}]^T$ můžeme rovnice (27) a (28) zapsat po doplnění rovnostmi

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t), \quad \dot{\mathbf{f}}(t) = \dot{\mathbf{f}}(t) \quad (29)$$

jako homogenní

$$\mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t), \quad \mathbf{P}, \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}, \quad (30)$$

kde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & -\mathbf{K} & \tilde{\mathbf{K}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{K}} & -\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

a matice $\mathbf{I}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n, n}$, $\mathbf{N}$ je regulární. Vynásobíme-li rovnici (30) zleva maticí $\mathbf{N}^{-1}$ a označíme-li matici $\mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}$, můžeme rovnici (30) zapsat ve tvaru s jedinou koeficientovou maticí řádu $4n$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \quad (32)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}} & \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{B}} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}} & -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}.$$

Jordanova modální a spektrální faktorizace matice $\mathbf{A}$ je

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1}, \quad (33)$$

regulární modální matice, Jordanova matice jsou řádu $4n$: $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}$, $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}$.

Řešení rovnice (32), tzn. i úplné řešení rovnic (27) a (28) zapisujeme jako v kapitole 2 ve tvaru maticové exponenciely (7). Z blokové struktury matice $\mathbf{A}$ vyplývá, že její vlastní čísla (prvky na diagonále matice $\mathbf{J}$) jsou dána sjednocením vlastních čísel hlavních submatic

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}} & -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix}.$$

Submaticová struktura modální matice $\mathbf{X}$ je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{J} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{F}\mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}, \mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n, 4n} \quad (34)$$

a matice $\mathbf{V}, \mathbf{F}, \mathbf{J}$ vyhovují rovnicím

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{F} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F}\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{F}\mathbf{J}^2 = \mathbf{K}\mathbf{V} + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{J} + \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{J}^2, \quad \mathbf{K}\mathbf{F} + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{J} + \mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{J}^2 = \mathbf{0}.$$

3.1 Rezonanční případ

V rezonančním případě, kdy je alespoň jedno z vlastních čísel, označené s , společným vlastním číslem matic $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_F$, je matice $(\mathbf{K} + s\mathbf{B} + s^2\mathbf{M})$ singulární a Jordanova kanonická matice nediagonální i v případech, kdy jak matice $\mathbf{A}_2$ tak i matice $\mathbf{A}_F$ jsou diagonalizovatelné. V tomto případě bude výchylka dynamického systému $\mathbf{v}(t)$ obsahovat funkci $t^\ell e^{st}$, $\ell \geq 1$.

3.2 Nerezonanční případ

Pokud matice $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_F$ nemají žádné vlastní číslo společné, jde o nerezonanční případ, matice $(\mathbf{K} + s_F\mathbf{B} + s_F^2\mathbf{M})$ je pro všechna vlastní čísla s_F (obecně komplexní parametry buzení) matice $\mathbf{A}_F$ regulární. V tomto případě můžeme blokovou strukturu Jordanovské kanonické matice $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}$ zapsat jako blokově diagonální

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_F & \\ & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_F \in \mathbb{C}^{2n, 2n}$$

a pomocí modálních a spektrálních rozkladů matic $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_F$ v $2n$ -stavovém prostoru

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_2^{-1} \text{ tj. } \mathbf{A}_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{J}_2 \quad \text{resp.} \quad \mathbf{A}_F = \mathbf{U}_F \mathbf{J}_F \mathbf{U}_F^{-1} \text{ tj. } \mathbf{A}_F \mathbf{U}_F = \mathbf{U}_F \mathbf{J}_F$$

zapsat i blokovou strukturu matice $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{4n, 4n}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_{2F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_F \end{bmatrix}, \quad (35)$$

kde submatici $\mathbf{U}_{2F} \in \mathbb{C}^{2n, 2n}$ je možné určit z rovnice

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{U}_{2F} - \mathbf{U}_{2F} \mathbf{J}_F = -\mathbf{A}_{2F} \mathbf{U}_F. \quad (36)$$

Protože matice $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{J}_F$ nemají žádné společné vlastní číslo, lineární rovnice (36) s neznámou maticí $\mathbf{U}_{2F}$ nemá netriviální homogenní řešení, ale má pouze řešení partikulární. Můžeme potom explicitně zapsat i matici inverzní, která vystupuje v rovnici (7)

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2^{-1} & -\mathbf{U}_2^{-1} \mathbf{U}_{2F} \mathbf{U}_F^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_F^{-1} \end{bmatrix}.$$

Podobně jako v kapitole 2, i zde nediagonální matice $\mathbf{J}_2$ způsobí přítomnost funkcí typu t^ℓ , $\ell \geq 1$ v homogenním řešení $2n$ -stavového prostoru koeficientové matice $\mathbf{A}_2$ což je vlastnost uvažovaného dynamického systému nezávislá na vnějším buzení.

4. Závěr

Byla ukázána možnost sjednocení homogenního a partikulárního řešení soustav n obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (zobecnění na případy soustav rovnic vyššího řádu je zřejmé) se speciálními pravými stranami. K tomu byly formulovány $3n$ a $4n$ -stavové prostory a řešení zapsáno pomocí maticové exponenciely. V těchto stavových prostorech je pak jev rezonance charakterizován násobností vlastního čísla koeficientové matice. V numerické praxi bychom neměli ovšem zapomínat na to, že pro větší n je obtížné získat příslušný maticový vlastní rozklad, tj. modální matici $\mathbf{X}$ a Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$. V nerezonančním případě je řešení v $3n$ a $4n$ -stavových prostorech dané řešením v $2n$ -stavových prostorech.

5. Poděkování

Tato práce byla podporována v rámci projektu GA ČR č. 101/09/1522.

6. Literatura

- Lancaster, P. (1966) *Lambda-matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, Oxford.
- Newland, D. E. (1989) *Mechanical vibration analysis and computation*, Longman, Essex.
- Kozánek, J. (2002) Resolvent of matrix polynomials, pseudospectra and inversion problems. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, Vol. 3, No. 1, pp. 49-80.
- Kozánek, J. (2009) Dvuhmotový dynamický systém se singulární maticí tuhosti. In.: *Proc. Interactions and Feedbacks 2009*, ÚT AV ČR, Praha, pp. 17-24.