International Conference
ENGINEERING MECHANICS 2010
Svratka, Czech Republic, May 10 – 13, 2010

# K ČASOVĚ HETERONOMNÍMU TLUMENÍ V NELINEÁRNÍCH PARAMETRICKÝCH PLANETOVÝCH SOUSTAVÁCH

**M. Hortel*, A. Škuderová***

**Summary:** *The present world development of mobile machines leads to a high-powered high-speed constructions with minimum dimensions and masses. By such light high-speed systems as are for example the speed reducers of turbines onto propellers occur in a discs of the cog wheels the lightening holes, which cause the speed heteronomy in the damping properties of wheel discs and thereby the total damping incidence in gear meshes. This study elaborates the methodology of analysis of the influence of time variable damping in gear mesh of kinematic pairs on the internal dynamics of non-linear parametric systems.*

## 1. Úvod

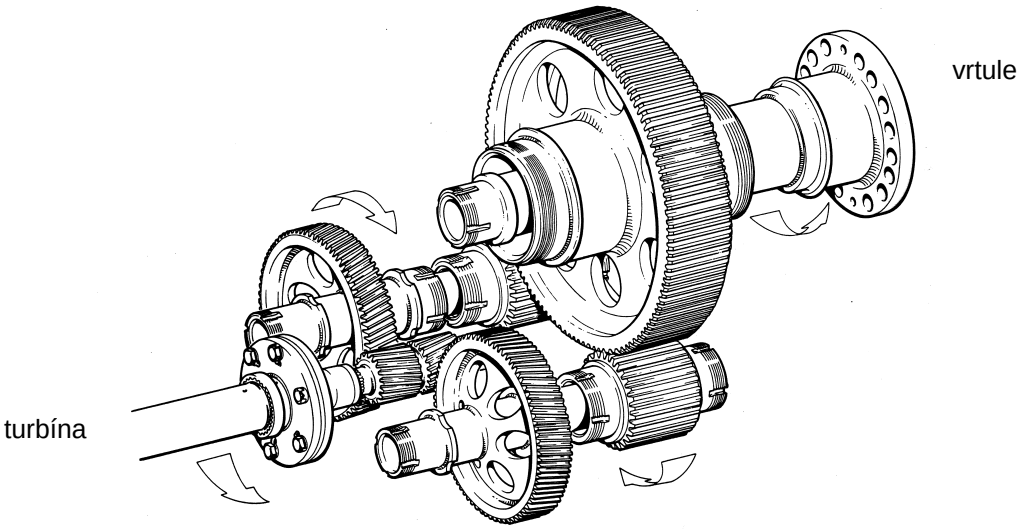
Současný světový vývoj mobilních strojů vede na vysokovýkonné vysokootáčkové konstrukce o minimálních dimenzích a hmotnostech.

Problematika tlumení v takových nekonzervativních soustavách obecně tvoří stale otevřenou záležitost zvláště v oblasti základního výzkumu dynamiky – vnitřní dynamiky nelineárních heteronomních systémů s časově variabilními členy, jako jsou planetové soutavy s kinematickými vazbami – ozubenými koly, tj. s dělenými toky výkonů. Vnitřní dynamika v těchto soustavách je vysoce aktuální a výzkum je motivován především neobjasněností řady dynamických jevů – fenoménů, které s těmito systémy úzce souvisejí a ovlivňují jejich bezpečnost a spolehlivost. Vznik a existence těchto jevů není dosud v mnoha případech ani z hlediska základního poznání u takových složitých soustav zcela znám.

Jejich metodické, tj. analytické, numerické a experimentální zvládnutí kvalitativní a kvantitativní analýzy vlivu parametrů na jejich bezpečnost a spolehlivost, např. *tlumení* – lineární, nelineární a kombinované včetně samobuzení jakož i tuhostních lineárních a nelineárních členů systému atd., tvoří základní předpoklad pro vysvětlení mnohých jevů zvláště u vysokootáčkových lehkých leteckých konstrukcí, např. převodových pseudoplanetových soustav turbovrtulových pohonových jednotek, kde otáčky hnacích turbín se dnes pohybují okolo až devadesáti tisíc za minutu.

U takových lehkých vysokootáčkových soustav se mnohdy vyskytují u disků kol reduktorů otáček turbín na vrtule vylehčující otvory, které způsobují otáčkovou heteronomitu v tlumících vlastnostech disků kol a tím i celkový tlumící dopad v záběrech ozubení kol, viz obr.1.

* Ing. Milan Hortel, DrSc., Ing. Alena Škuderová, Ph.D.: Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i.; Dolejškova 5, 18200 Praha 8; tel.: +420.266 053 803, fax: +420. 286 584 695; e-mail: hortel@it.cas.cz




Obr. 1 – Ukázka leteckého turbovrtulového reduktoru pohonové jednotky s vylehčujícími otvory v discích kol.

Vylehčující otvory disků jakož i tvary disků mohou mít obecně, dle funkčních požadavků, různé tvary. Z toho plyne, že i *radiální* tuhosti - hmotnosti a proto i z těchto vlastností vyplývající tlumící charakteristiky mohou mít na otáčkách příslušných kol závislé složité funkcionální závislosti. Vzhledem k tomu, že tyto funkce nejsou pro různorodost prvků dosud obecně známé, je třeba tyto tlumící charakteristiky v závislostech na úhlech pootočení kol kvantitativně experimentálně stanovit a v analytických a numerických řešeních je funkcionálně vyjádřit např. Fourierovými řadami.

Příspěvek navazuje na předchozí výzkum vlivu lineárního a nelineárního či kombinačního tlumení v záběru ozubení jedné větve silového toku pseudoplanetové soustavy [1]. Byl uskutečněn teoretický pokus o stanovení jistých dosud neznámých hlubších zákonitostí vlivu materiálového a viskózního tlumení v zubové mezeře (technologické vůli) při odskocích boků zubů – rázových jevech na vnitřní dynamiku záběru ozubení kinematických dvojic v oblastech lineárního, kvadratického a kombinovaného tlumení s *konstantními* tlumícími koeficienty $K$, viz vektorový výraz tvaru [1]

$$ {}_1\mathbf{K}(\beta,\delta_i,H)\,\mathbf{v}' + \sum_{K_1>1} {}_{K_1}\mathbf{K}(D,D_i,H)\left|\mathbf{w}'(\mathbf{v}')\right|^{K_1} \operatorname{sgn}(\mathbf{w}'(\mathbf{v}')) \text{ pro } K_1 = 2{,}3\,, \tag{1} $$

kde čárky značí derivace vektorů podle bezdimenzionálního času $\tau$.

## 2. K vlivu časově proměnlivého tlumení od vylehčujících diskových otvorů kol

Další dosud teoreticky neznámou oblastí tlumení v záběru ozubení je vliv časové, tj. otáčkové proměnlivosti tlumení jak již bylo řečeno u vylehčených disků ozubených kol. Toto časové kolísání tuhosti – hmotnosti disků – je zde závislé na velikosti, tvaru a počtu vylehčujících

otvorů po obvodu kol. Výsledné tlumení a jeho charakteristika je pak funkcí velikosti a šíře vlastního ozubení, tloušťky věnce ozubení, rozměrů disků, velikosti, *tvaru* a *počtu* vylehčujících otvorů, otáčkové $\omega$ a záběrové frekvence $\omega_c$ kol a ozubení včetně materiálu, jeho technologického zpracování a provozní teploty v záběru ozubení.

Z uvedeného vyplývá, že skutečné tlumení v záběru ozubení je složitou časově proměnlivou, tj. heteronomní funkcí, která nejen může svými kvantitativními, ale zejména svými kvalitativními vlastnostmi ovlivňovat např. fázové posuvy amplitud relativních pohybů v záběru ozubení vůči amplitudám výsledných časových resp. modifikovaných tuhostních funkcí ozubení a může tak rozhodujícím způsobem ovlivňovat dynamiku, tj. dynamické síly těchto soustav.

Takovou časovou funkci tlumení disku $k_d(t) = k_d(t+T)$ ozubeného kola s periodou $T = 2\pi/\omega$ v intervalu $\langle 0;T \rangle$, která splňuje podmínky jednoznačnosti a konečnosti, s konečným počtem maxim a minim a nespojitostí (Dirichletovy podmínky) lze rozvinout v konvergentní řadu tvaru

$$k_d(t) = k_d(t+T) = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} k_d(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{T}\int_0^{T} k_d(t)\cos p\, m\omega t\, dt\right]\cos p\, m\omega t\, dt\right.$$

$$\left. + \left[\frac{2}{T}\int_0^{T} k_d(t)\sin p\, m\omega t\, dt\right]\sin p\, m\omega t\, dt\right\}, \qquad (2)$$

kde $\omega = \pi n/30$ je úhlová rychlost ozubeného kola (pro převod mezi centrálním kolem 2 a satelitem 3 při $i$ = 1, je $n = n_2 = n_3$), n … počet otáček kola, p … *počet vylehčujících otvorů* v disku ozubeného kola, či obecně počet period průběhů tlumení vyvolaných nehomogenitou disku kola.

Protože dosud nejsou experimentálně zjištěny funkcionální závislosti tlumení $k_d(t)$, bude v následujících studiích v "nultém" přiblížení aplikována místo výrazu (2) zjednodušená funkce

$$k_d(t) = k_{d0} + k_d \sin p\omega t\,, \qquad (3)$$

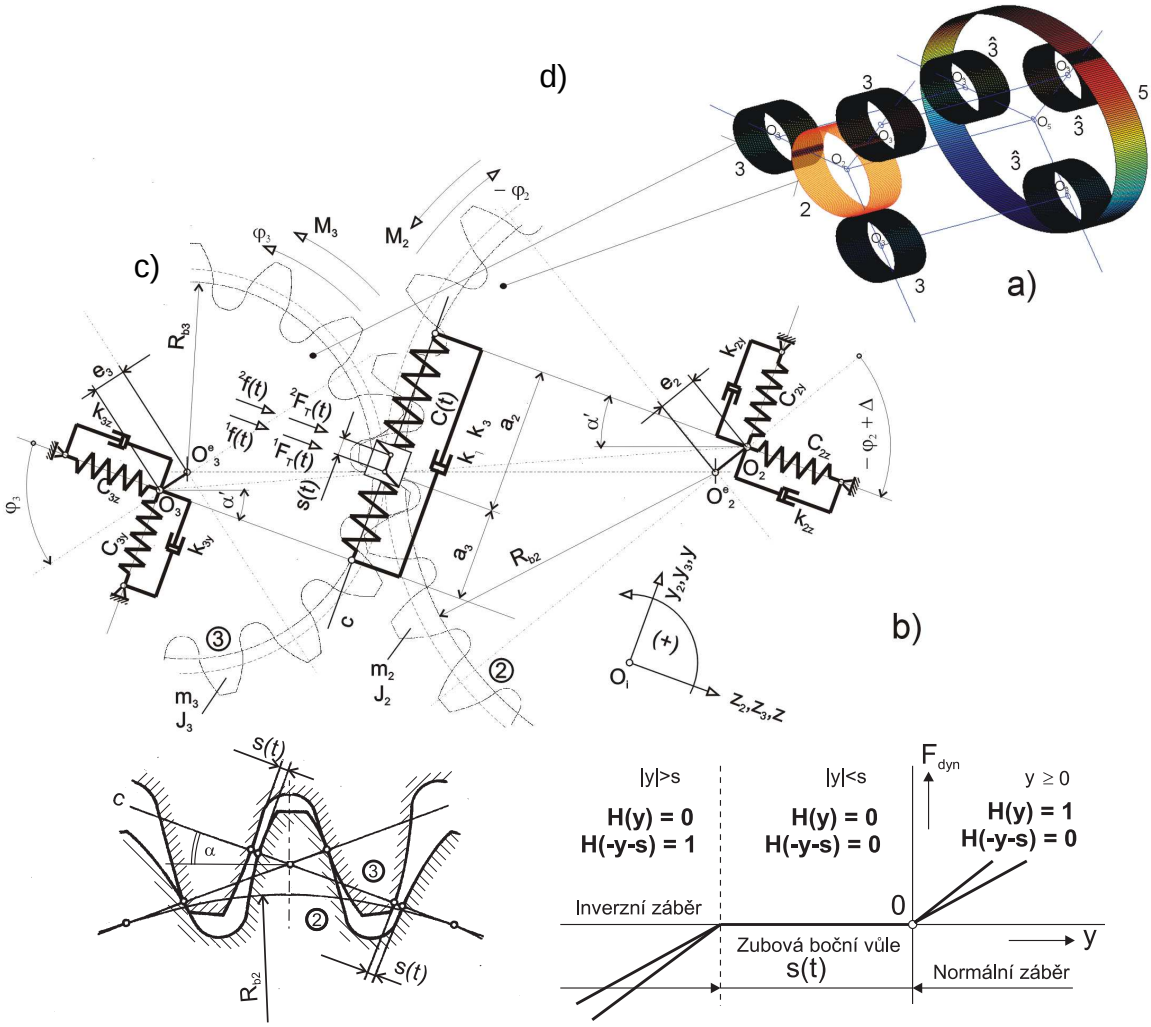
kde $p$ = 1,2,3,… a $k_{d0}, k_d$ jsou konstantní koeficienty tlumení. Zavedením bezdimenzionálního času $\tau = \omega_c t$ do (3), kde $\omega_c = Z\omega$ ($Z$ … počet zubů kol) je záběrová frekvence zubů, plyne pro časově proměnlivé tlumení v záběru ozubení výraz v bezrozměrném času $\tau$

$$k_d(\tau) = k_{d0} + k_d \sin pZ^{-1}\tau\,. \qquad (4)$$

Zavedeme-li tuto časovou heteronomní funkci (3) do soustavy pohybových rovnic náhradního matematicko-fyzikálního modelu *jedné* větve silového toku pseudoplanetové soustavy dle obr.2, tj. centrálního kola 2 a jedné planety 3, máme soustavu obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic s časově proměnlivými koeficienty tvaru [1]

$$\mathbf{M}\mathbf{v}'' + \left[{}_1\mathbf{K}(\beta,\delta_i,H) + {}_1\mathbf{k}_d(t)\right]\mathbf{v}' + \sum_{K_1>1}\left[{}_{K_1}\mathbf{K}(D,D_i,H) + {}_{K_1}\mathbf{k}_d(t)\right]\left|\mathbf{w}'(\mathbf{v}')\right|^{K_1}\operatorname{sgn}(\mathbf{w}'(\mathbf{v}'))$$

$$+ {}_1\mathbf{C}(\varepsilon,\kappa,Y_n,U_n,V_n,H,t)\,\mathbf{v} + \sum_{K>1} {}_K\mathbf{C}(\varepsilon,\kappa,I_n,H,t)\,\mathbf{w}^K(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(a_n,b_n,\overline{\varphi},H,t), \qquad (5)$$




Obr.2 – Náhradní matematicko-fyzikální model páru ozubených kol (b) pseudoplanetové soustavy s dvojnásobnými satelity (a), technologická boční zubová vůle *s(t)* (c) a hodnoty Heavisideových funkcí *H* v oblastech zubového záběru s vůlemi (d).

kde $\mathbf{v}$ je zde obecně 6-dimenzionální vektor pohybu soustavy, $\mathbf{w}^K(\mathbf{v})$ je K-tá mocnina vektoru $\mathbf{v}$, která je definovaná vztahem $\mathbf{w}^K(\mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{w}(\mathbf{v})\mathbf{w}^{K-1}(\mathbf{v}))$, přičemž $\mathbf{D}(\mathbf{w}(\mathbf{v})$ je diagonální matice, ve které jsou prvky na hlavní diagonále tvořeny prvky vektoru $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}$. Dále je $\mathbf{M}$ matice hmotnostních a setrvačných sil, ${}_1\mathbf{K}, {}_1\mathbf{k}_d(t)$ a ${}_{K_1}\mathbf{K}, {}_{K_1}\mathbf{k}_d(t)$ jsou maticemi lineárních, příp. nelineárních konstantních a časově proměnlivých tlumících sil, ${}_1\mathbf{C}$ a ${}_K\mathbf{C}$ pak maticemi kvazilineárních resp. nelineárních vratných sil a $\mathbf{F}(t)$ je vektorem nepotenciálního vnějšího buzení s budícími koeficienty $a_n, b_n$ a $\overline{\varphi}$ fázový úhel. $H$ je Heavisideova funkce, která umožňuje v kompaktním tvaru řešit pohyby – rázy jako důsledek silných neanalytických nelinearit vlivem existence technologických bočních vůlí $s(t)$ ozubení. Příslušné *konstantní* lineární resp. nelineární tlumící členy jsou označeny $\beta, \delta_i$ resp. $D, D_i$, přičemž $\beta(k_1, k_{1m}, H)$,

kde $k_1, k_{1m}$ jsou lineární koeficienty materiálového resp. viskózního tlumení v záběru, $D(k_{2,3}, k_{2,3m}, H)$, kde $k_{2,3}, k_{2,3m}$ jsou nelineární (2 – kvadratické, 3 - kubické) koeficienty materiálového resp. viskózního tlumení v záběru ozubení. Lineární parametrické funkce jsou označeny symboly $Y_n, U_n, V_n$ a nelineární parametrické funkce tzv. parametrické nelinearity symbolem $I_n$. ε a κ představují součinitele trvání záběru a amplitudovou modulaci výsledné tuhostní funkce v ozubení ${}_1\mathbf{C}(t)$.

Studie navazuje na práce z oblasti výzkumu konstantního lineárního a nelineárního tlumení ozubených soukolí v záběru [1]. Rezonanční charakteristiky lineárních jakož i systémů nelineárních s konstantními koeficienty s typickými převisy tuhnoucích či měknoucích rezonančních charakteristik jsou značně rozpracovány. To nelze plně tvrdit o rezonančních charakteristikách lineárních či nelineárních parametrických systémů s rázovými jevy, kde se v průbězích jejich charakteristik mohou projevovat všechny jevy lineárních či nelineárních systémů včetně vlivů časového proměnlivého tlumení ${}_1k_d(t)$, ${}_{K_1}k_d(t)$ a střídání tuhostních hladin – parametrických funkcí a fázových posuvů amplitud relativních pohybů $y(t)$ v důsledku působení tlumících sil vůči parametrické budící funkci $C(t)$.

Výzkum vlivu kombinací konstantního tlumení v záběru ozubení na dynamické vlastnosti vycházel z Tab.1., kde jsou naznačeny jednotlivé kombinace tlumení v záběru ozubení, pro které byly řešeny jednotlivé rezonanční charakteristiky dané mechanické soustavy s konstantním tlumením pohybů.

**Tab.1.** Kombinace konstantních tlumení $k$ v záběru ozubení

| | konzerv. systém v záběru | lineární tlumení v záběru - L | | | kvadratické tlumení v záběru - Kv | | | kubické tlumení v záběru - Ku | | | kombinace tlumení v záběru | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | L + Kv | | | L + Ku | | | L + Kv + Ku | | | Kv + Ku | | |
| $k_1$ | 0 | × | | × | | | | | | | × | | × | × | | × | × | | × | | | |
| $k_2$ | 0 | | | | × | | × | | | | × | | × | | | | × | | × | × | | × |
| $k_3$ | 0 | | | | | | | × | | × | | | | × | | × | × | | × | × | | × |
| $k_{1m}$ | 0 | | × | × | | | | | | | | × | × | | × | × | | × | × | | | |
| $k_{2m}$ | 0 | | | | | × | × | | | | | × | × | | | | | × | × | | × | × |
| $k_{3m}$ | 0 | | | | | | | | × | × | | | | | × | × | | × | × | | × | × |
| Symbol označení řešení v obrázcích | ○ | □ | ● | × | □ | ● | × | □ | ● | × | □ | ● | × | □ | ● | × | □ | ● | × | □ | ● | × |
| Varianta | a | b | | | c | | | d | | | e | | | f | | | g | | | h | | |

Pozn.: $k_{1,2,3}\ldots$ materiálové tlumení ozubení; $k_{1m,2m,3m}\ldots$ tlumení mazacího prostředí v zubové mezeře - vůli; 1 – lineární (L), 2 – kvadratické (Kv), 3 – kubické (Ku)
$k_1 \equiv {}_1k, \ldots; k_{1m} \equiv {}_1k_m, \ldots$

Pro analýzu vlivu časově proměnlivého tlumení ${}_1k_d(t)$, ${}_{K_1}k_d(t)$ disků ozubených kol na dynamické vlastnosti soustav, vycházíme metodicky z Tab.2., kde jsou vyznačené kombinace jak konstantního, tak i časově variabilního, zde ve studii zatím pouze lineárního, tlumení ozubených kol.

**Tab.2.** Kombinace *lineárního* konstantního $k$ a časově proměnlivého tlumení $k_d(t)$ v záběru ozubení při počtu vylehčujících otvorů v disku kola $\boldsymbol{p}=1;6$ a vzájemném *symetrickém* postavení disků kol.

| $\boldsymbol{p}=1;6$ | Konzervativní systém v záběru | Lineární tlumení v záběru - L | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ${}_1k$ | 0 | × | × | × | × |
| ${}_1k_m$ | 0 | × | × | × | × |
| ${}_1k_{d0}$ | 0 | | | × | 1.5 × |
| ${}_1k_d$ | 0 | | × | × | × |
| Symbol označení řešení v obrázcích | ○ | × | ×1 | ×2 | ×3 |
| Varianta | a | b | | | |

Pozn.: ${}_1k$ … konstantní materiálové tlumení

${}_1k_m$ … tlumení mazacího prostředí v zubové vůli

${}_1k_{d0}$ … střední koeficient proměnlivého tlumení ${}_1k_d(t)$, viz r. (3)

${}_1k_d$ … amplituda proměnlivého tlumení ${}_1k_d(t)$, viz r. (3)

V Tab.2. vyznačené *varianty* a *symboly* lineárního řešení mají následující obsahovou strukturu koeficientů tlumení.

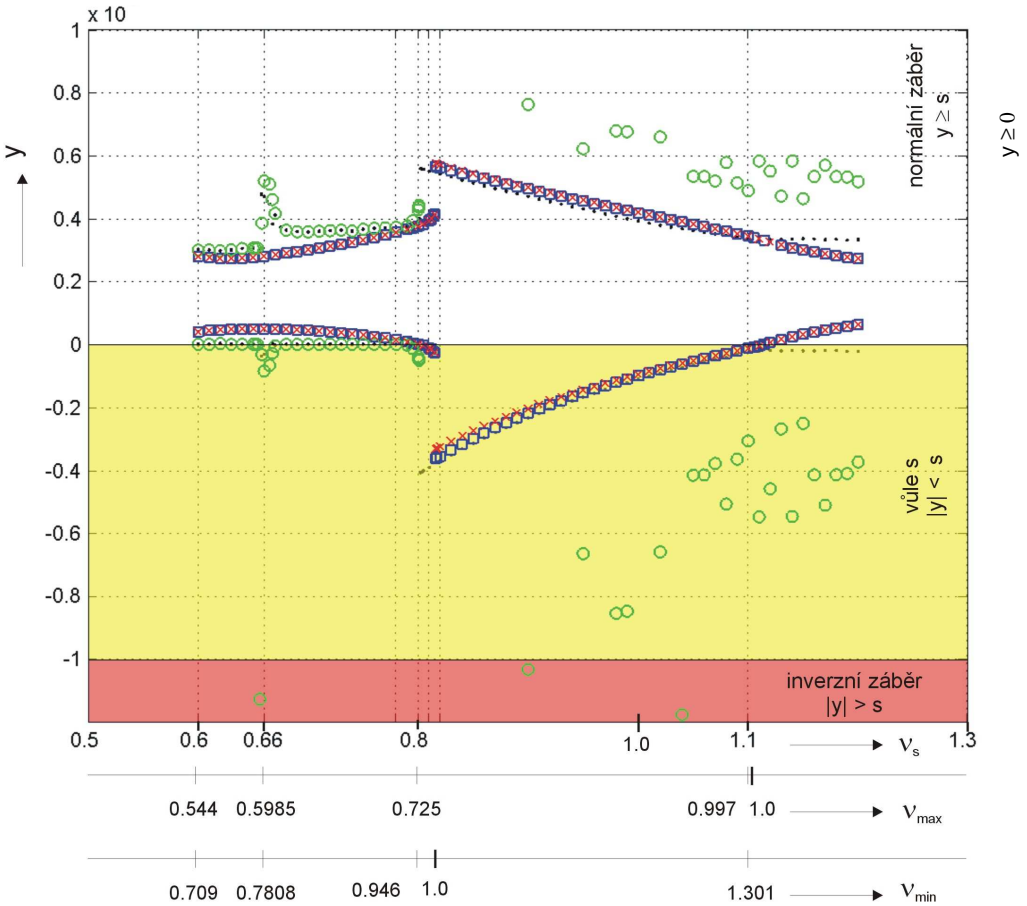
1) *konzervativní* soustava – varianta a
   Symbol ○ – ${}_1k={}_1k_m={}_1k_d(t)=0$
2) *nekonzervativní* soustava – varianta b
   Symbol × – ${}_1k\neq 0;{}_1k_m\neq 0;{}_1k_d(t)=0$
   Symbol ×1 – ${}_1k\neq 0;{}_1k_m\neq 0;{}_1k_{d0}=0;{}_1k_d\neq 0$
   Symbol ×2 – ${}_1k\neq 0;{}_1k_m\neq 0;{}_1k_{d0}\neq 0;{}_1k_d\neq 0$
   Symbol ×3 – ${}_1k\neq 0;{}_1k_m\neq 0;{}_1k_{d0}=1.5\ {}_1k;{}_1k_d={}_1k$

Při vzájemném *nesymetrickém* postavení vylehčujících otvorů $p$ se tlumící účinky v záběru ozubení mohou částečně ovlivňovat – eliminovat.

Všechny rezonanční charakteristiky $\{\nu_s;y(t)\}$ jsou dále řešeny pro nelineární parametrickou soustavu dle obr.2 s parametry $\varepsilon=1.569;\kappa=0.5870;C_{\max}=4.10^5$ [Nmm$^{-1}$]; $m_{red}=0.003123$ [kg]; $i=1;Z_2=Z_3=Z=21$. Rovněž všechny hodnoty lineárního materiálového tlumení ${}_1k;{}_1k_d$ a hodnoty lineárního viskózního tlumení v prostředí zubové mezery ${}_1k_m$ jsou uvažovány stejné, tj. ${}_1k;{}_1k_{d0};{}_1k_d;{}_1k_m=$ 3.95 [Nmm$^{-1}$s] , což odpovídá poměrným tlumením $\beta,\beta_m,D,D_m,{}_1\bar{k}_d,{}_{K_1}\bar{k}_d=0.062$, viz r. (5).

Protože nekonzervativní soustava vede pro všechny zde uvedené varianty tlumení na ustálené či kvaziustálené kmitání již při páté otáčce soukolí, jsou pro porovnání všechny amplitudo-frekvenční charakteristiky včetně soustavy konzervativní, jejíž řešení je v celém rozsahu otáček parametrické soustavy nestabilní, vyneseny pro tuto pátou otáčku.

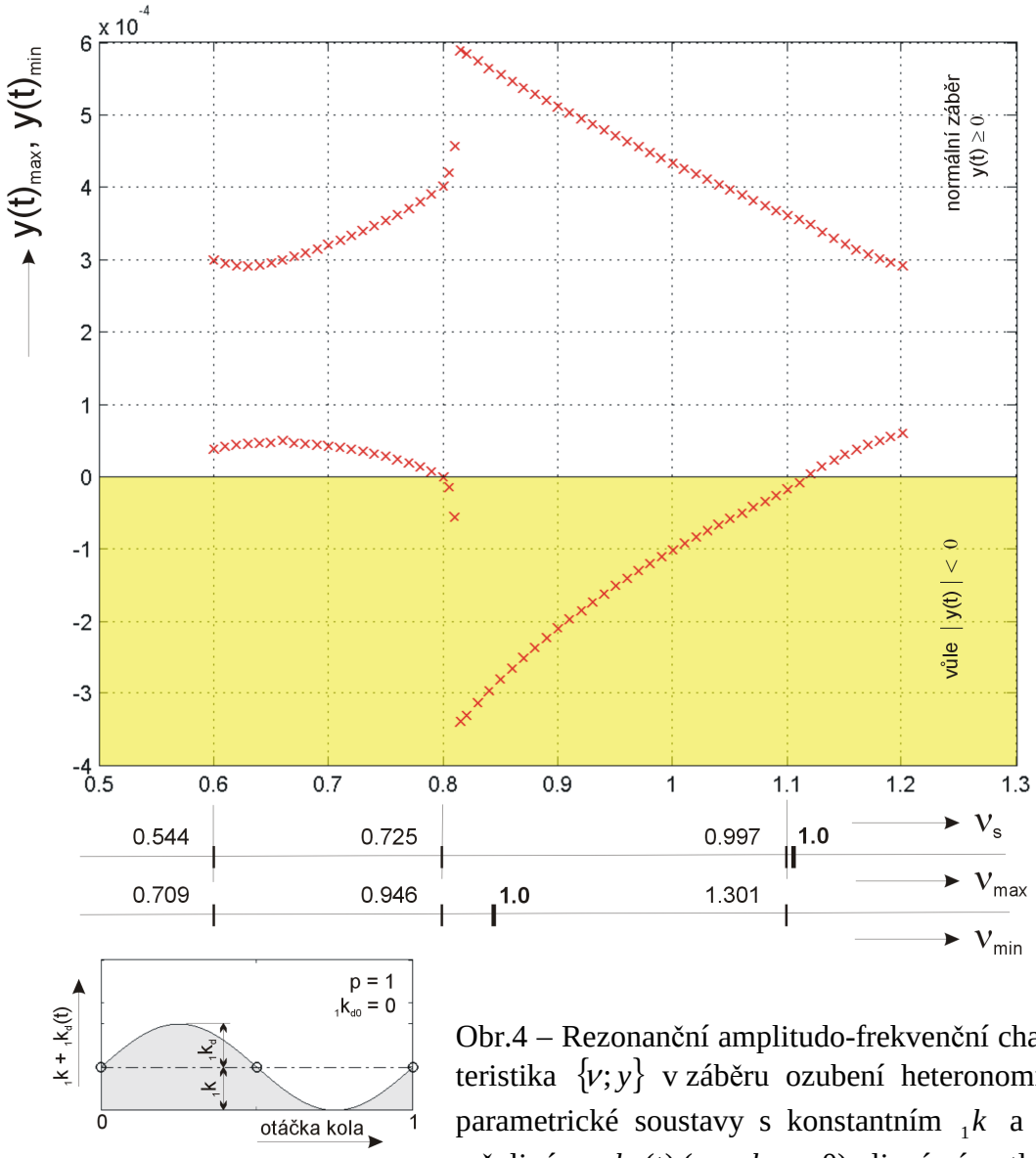
Pro možnost porovnání vlivu lineárního časově proměnlivého tlumení ${}_1k_d(t)$ na dynamické vlastnosti nelineární, v tuhostech záběru s časově proměnlivými – parametrickými tuhostmi jsou v obr. 3 vyneseny v souřadnicích relativního pohybu $y(t)$ rezonanční křivky – charakteristiky pro pátou otáčku soukolí se silnými nelinearitami – vůlemi v závislosti na naladění $\nu_s = \omega_c \Omega_s^{-1}$, které je vztaženo ke střední hodnotě výsledné tuhosti $C_s$ ozubení v záběru [1]. Přitom $\omega_c$ představuje záběrovou frekvenci daného ozubení a $\Omega_s^{\ 2} = C_s m_{red}^{\ -1}$ vlastní střední frekvenci, $m_{red}$ je redukovaná hmotnost řešeného modelu s konstantním lineárním tlumením. Rezonanční charakteristiky průběhů relativního pohybu $y(t)$ jsou v obr.3 mimo konzervativní systém vyznačeny pro kombinace tlumení jak materiálového ${}_1k$, tak i viskózního ${}_1k_m$ v mazací olejové vrstvě ve fázi odskoku.




Obr.3 – Rezonanční charakteristiky $\{\nu; y\}$ parametrické – heteronomní soustavy pro lineární konstantní tlumení: □ - materiálové $k_1 \neq 0; k_{1m} = 0$; ● - ve vůli (viskózní) $k_1 = 0; k_{1m} \neq 0$; × - materiálové a viskózní $k_1 \neq 0; k_{1m} \neq 0$; ○ - konzervativní systém v záběru $k_1 = 0; k_{1m} = 0$, viz Tab.1.

V grafu obr.3 je vynesena oblast fáze *normálního* záběru pro $y(t) \geq 0$, která je vyznačena bílou barvou, oblast fáze *odskoků* do zubových vůlí $s(t)$, tj. oblast s rázovými jevy, kde $|y(t)| < s(t)$, která je vyznačena barvou žlutou a fáze *inverzního* záběru, kde $|y(t)| > s(t)$. Tato oblast je vyznačena barvou červenou.

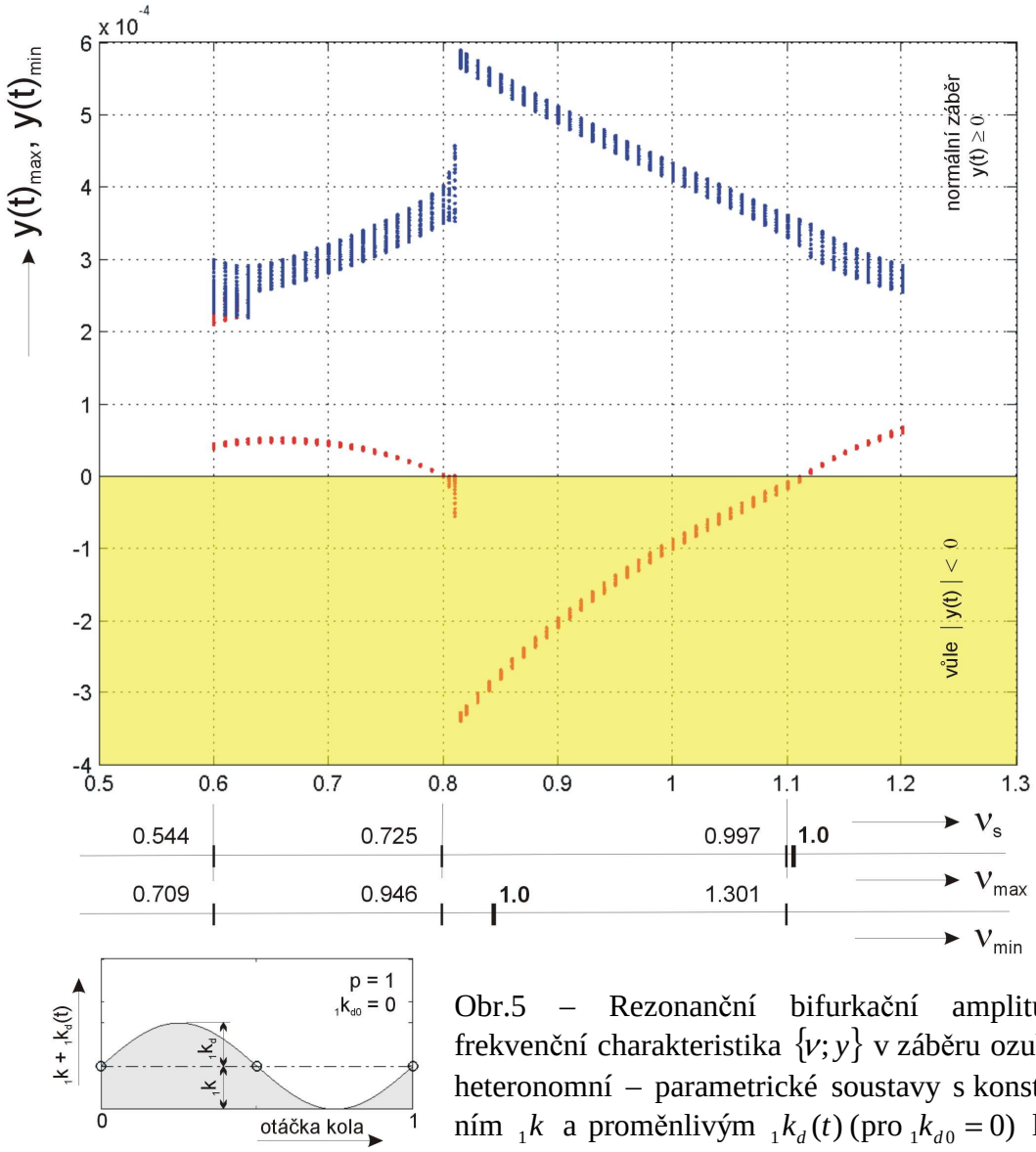
Pro porovnání je pro všechny vyobrazení lišící se charakterem tlumení společná rezonanční charakteristika *konzervativní* homogenní soustavy v záběru ozubení variantního tlumení (a) pro konstantní tlumení $k_1 = k_{1m} = 0$, dle Tab.1. Tato charakteristika je totožná s charakteristikou konzervativní soustavy s variabilním tlumením, kde ${}_1k = {}_1k_m = {}_1k_{d0} = {}_1k_d = 0$, viz Tab.2, a je označena symbolem ○ (zelené barvy). Detailní analýza rezonanční charakteristiky obr.3 je v [1].




Obr.4 – Rezonanční amplitudo-frekvenční charakteristika $\{v; y\}$ v záběru ozubení heteronomní – parametrické soustavy s konstantním ${}_1k$ a proměnlivým ${}_1k_d(t)$ (pro ${}_1k_{d0} = 0$) lineárním tlumením varianty b(x1) – Tab.2. a *p = 1*.

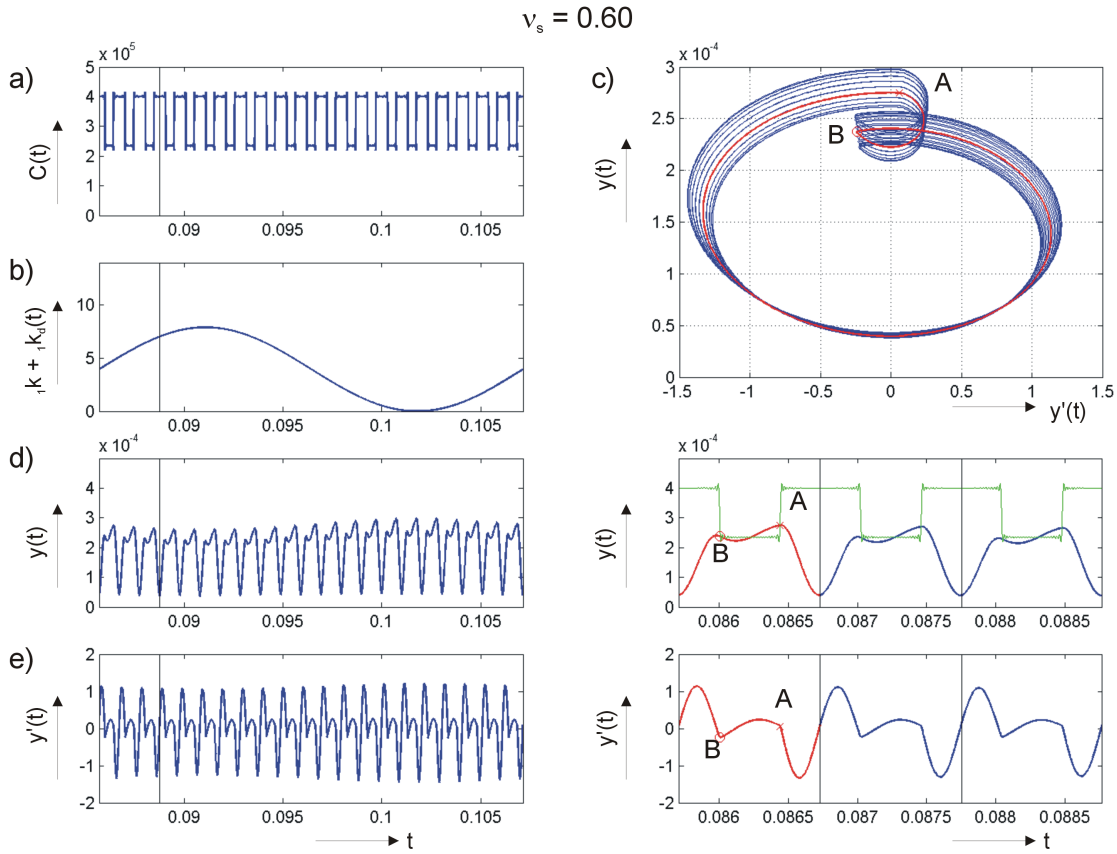
Přejděme nyní na analýzu příkladu dynamických charakteristik soustavy dle Tab.2 s lineárním konstantním $k$ a s časem proměnlivým tlumením ${}_1k_d(t)$ v záběru ozubení s počtem vylehčujících otvorů $p = 1$.

Na obr.4 jsou vyobrazeny rezonanční charakteristiky absolutních maxim a minim relativních pohybů $y(t)$ záběrů ozubení variantního naladění b(×1) páru ozubených kol jedné větve pseudoplanetové soustavy, viz obr.2, v rozmezí frekvenčního naladění $\nu_s \in \langle 0.6;1.2 \rangle$.

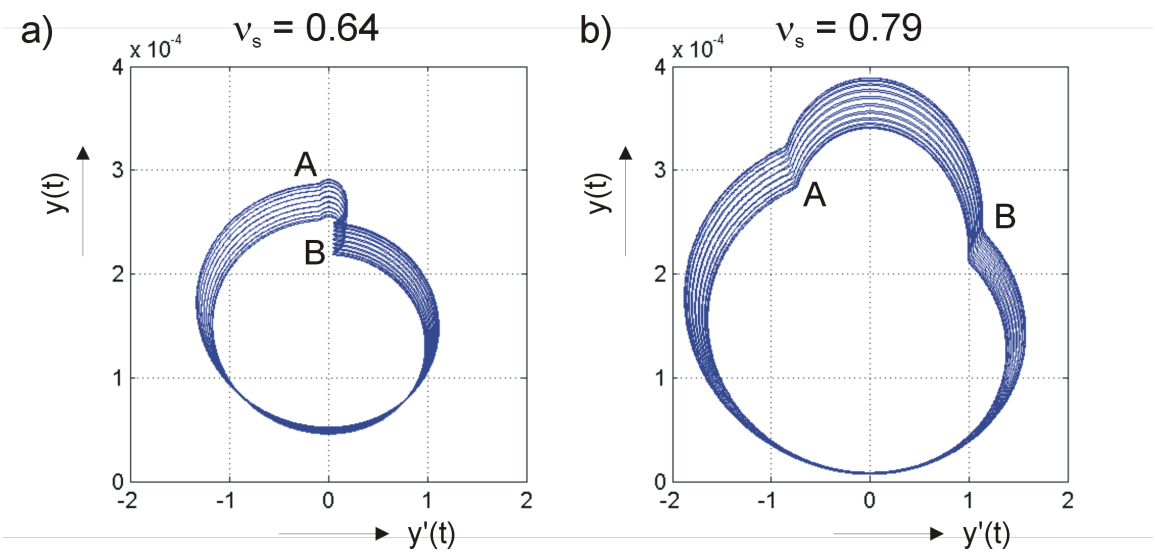



Obr.5 – Rezonanční bifurkační amplitudo-frekvenční charakteristika $\{\nu; y\}$ v záběru ozubení heteronomní – parametrické soustavy s konstantním ${}_1k$ a proměnlivým ${}_1k_d(t)$ (pro ${}_1k_{d0} = 0$) lineárním tlumením varianty b(x1) – Tab.2. při počtu vylehčujících otvorů disku $p$ = 1.

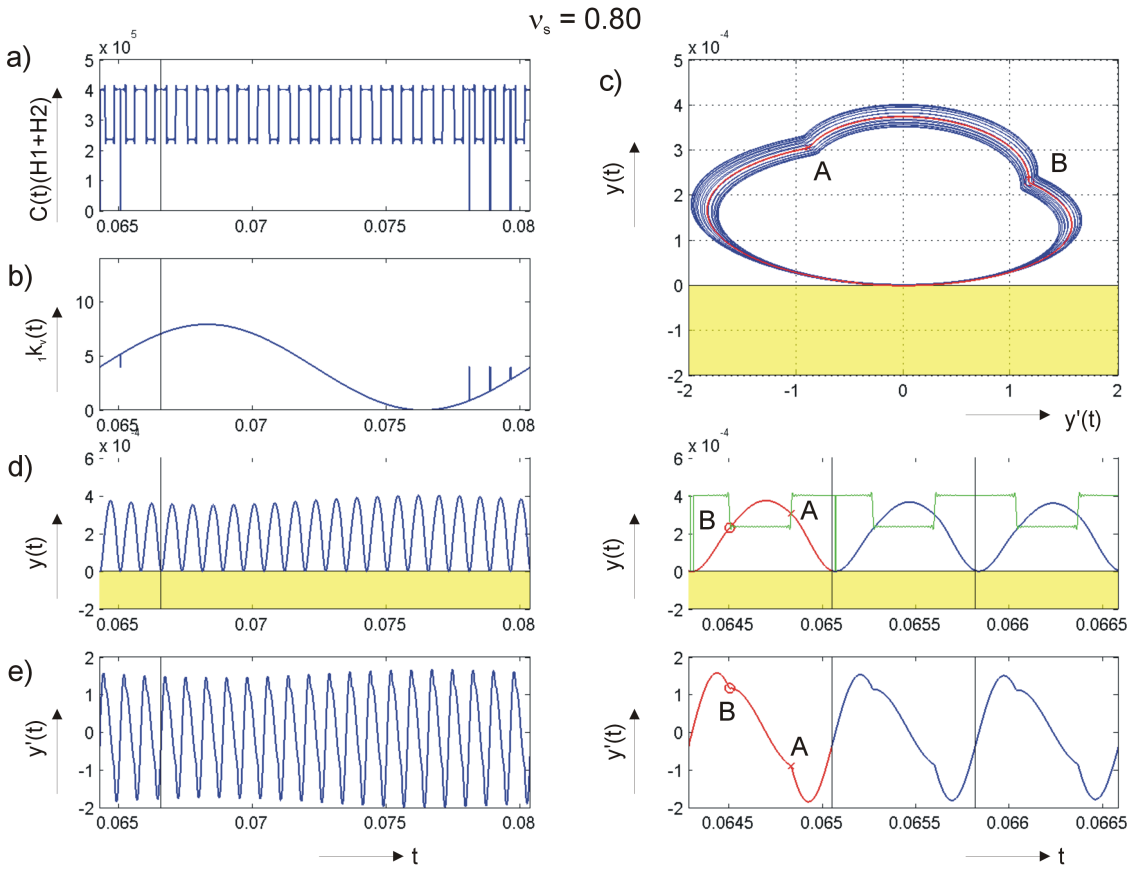
Průběhy vykazují s rostoucím $\nu_s$ až do okolí naladění $\nu_s \approx 0.8$ spojitý hladký divergentní charakter s normálním záběrem ozubení. V okolí singulárního bodu $\nu_s = 0.8$ dochází k odlehnutí – odskoku boků zubů v záběru se nacházejícího ozubení ( $y(t) < 0$) do zubové vůle




Obr.6 – Časové průběhy $C(t)$, tlumení ${}_1k + {}_1k_d(t)$, $y(t)$, $y'(t)$ a fázová rovina $\{y'(t); y(t)\}$ pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.6$ a variantní tlumení b(×1) – Tab.2 při normálním záběru $y(t) > 0$




Obr.7 – Fázové roviny $\{y'(t); y(t)\}$ pro naladění $\nu_s = 0.64$ a $\nu_s = 0.79$.



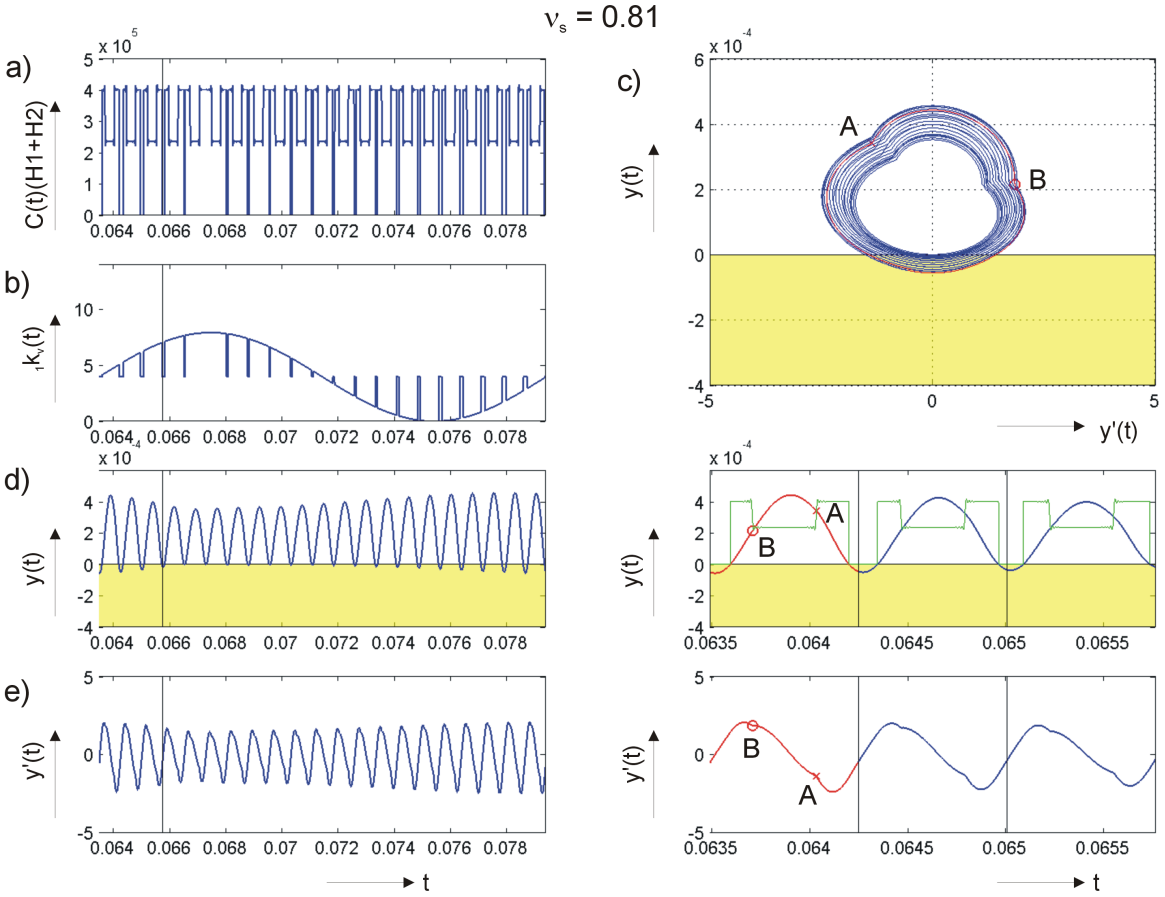

Obr. 8 – Časové průběhy výsledné modifikované tuhostní funkce $C(t)(H1+H2)$, tlumení ${}_1k_v$, $y(t)$, $y'(t)$ a fázová rovina $\{y'(t); y(t)\}$ pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.8$ a variantní tlumení b(×1) – Tab.2 při normálním záběru $y(t) > 0$ a rázových jevech.

$s(t)$. Vlivem blízkosti rezonančního naladění $\nu_{\max} \to 1$ výsledné tuhostní funkce ozubení $C(t)$ dochází v tomto singulárním místě k nespojitému amplitudovému nárůstu relativního pohybu $y(t)$ s následným pozvolným hladkým konvergentním – klesajícím amplitudovým průběhem relativního pohybu $y(t)$. V oblasti naladění $\nu_s \in \langle 0.8;1.12 \rangle$ dochází v záběru ozubení k rázovým jevům, tj. k odskokům do zubové vůle $s(t)$, v obr.4 do žluté oblasti.

Protože otáčková frekvence $\omega$ (při $p = 1$) se od záběrové frekvence $\omega_c$ liší poměrem počtu zubů, tj. pro $i = 1$ je $Z = 21$ a $\omega << \omega_c$, není kvantitativní vliv časově proměnlivého tlumení ${}_1k_d(t)$ variantního naladění b(×1) v oboru funkcionálního naladění $\nu_s \in \langle 0.6;1.2 \rangle$ zde příliš patrný.

Bifurkační rezonanční charakteristiky záběru ozubení v obr.5 mají v rámci maximálního amplitudového rozptylu již členitější průběhy. Fázové roviny ve frekvenčním rozsahu $\nu_s \in \langle 0.6;0.63 \rangle$ vykazují smyčkové průběhy v horní části s větším amplitudovým rozptylem – rozkmitem. To se v bifurkačním grafu projevuje zvláště v okolí naladění $\nu_s \approx 0.6$ členitějším

– víceznačným a širším amplitudovým bifurkačním průběhem. Tento rozkmit je zapříčiněn jednak skokovým – parametrickým průběhem výsledné tuhostní funkce $C(t)$ ozubení




Obr. 9 – Časové průběhy výsledné modifikované tuhostní funkce $C(t)(H1+H2)$, tlumení ${}_1k_v$, $y(t)$, $y'(t)$ a fázová rovina $\{y'(t); y(t)\}$ pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.81$ a variantní tlumení b(×1) – Tab.2 při normálním záběru $y(t) > 0$ a rázových jevech.

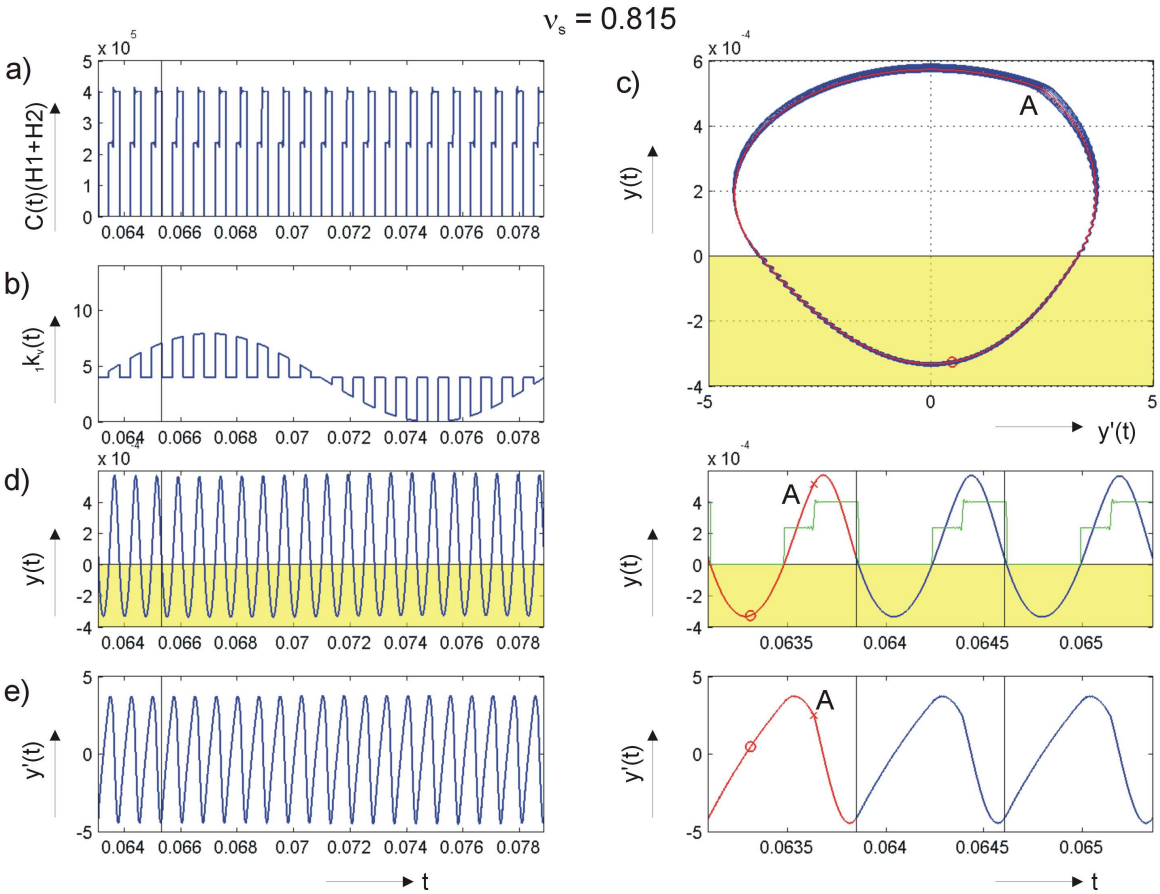
v záběru, obr.6a, a průběhem tlumení ${}_1k_d(t)$, obr.6b. V obr.6c je zakreslen smyčkový průběh fázové roviny $\{y'(t); y(t)\}$ pro 21 period tuhostní funkce $C(t)$ páté otáčky soukolí, červený průběh ve fázové rovině je průběhem první periody této tuhostní funkce. Průběhy relativního pohybu $y(t)$ a jeho rychlosti $y'(t)$ jsou v obr.6d,e znázorněny pro 21 a první 3 periody tuhostní funkce $C(t)$ při naladění $\nu_s = 0.6$.

S rostoucím $\nu_s > 0.63$ přecházejí smyčky fázových průběhů $\{y'(t); y(t)\}$ relativních pohybů v průběhy s nespojitostmi A,B, které se rozvíjejí a natáčejí, viz obr.7a,b, až pro $\nu_s = 0.8$, kdy nastává $y(t) < 0$ a normální záběr přechází do oblastí s odskoky, viz obr.8, kde tuhostní hladiny $C(t)$ nabývají tři úrovně, $C_{\max}, C_{\min}, C = 0$, viz obr.8a. Výsledné tlumení ${}_1k_v(t)$ je zde vlivem odskoků zubových profilů definováno výrazem

$$ {}_1k_v(t) = [{}_1k + {}_1k_d(t)](H1+H2) + {}_1k_m[1-(H1+H2)]. $$

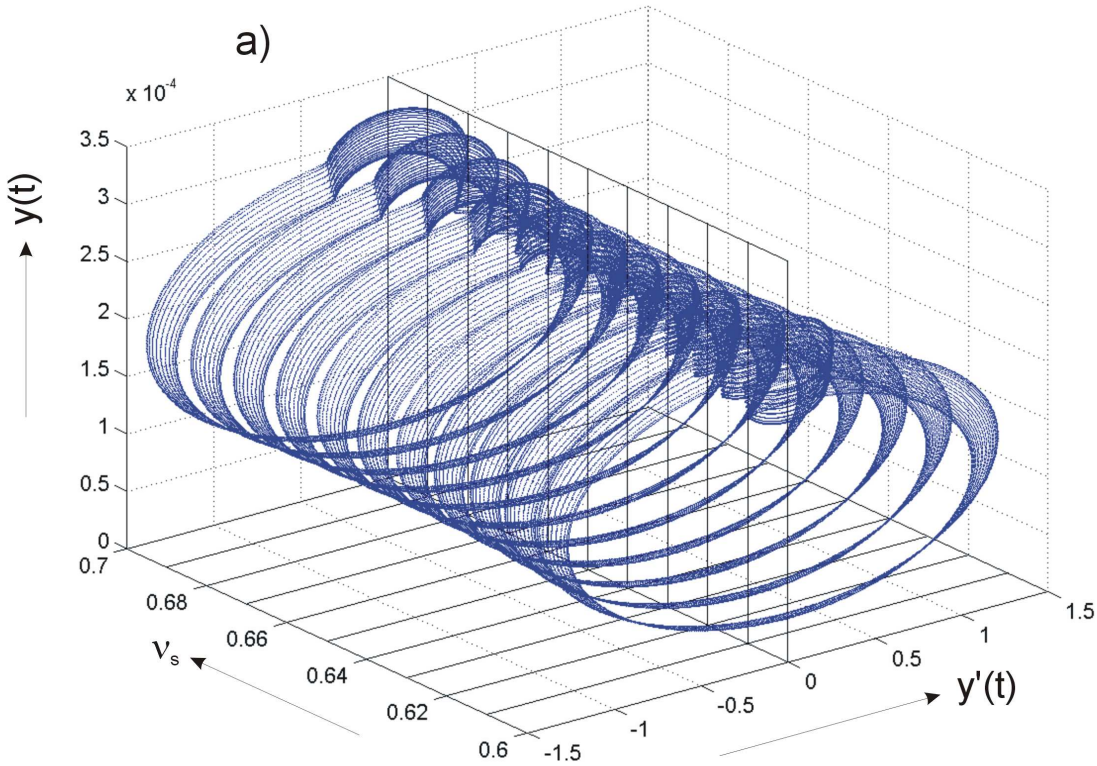
Amplitudový frekvenční průběh v oblastech s odskoky zubových profilů vykazuje užší rozptyl vlivem pouze viskózního tlumení. Materiálové tlumení zubové včetně časově proměnlivého tlumení od disků ${}_1k_d(t)$ je nulové.

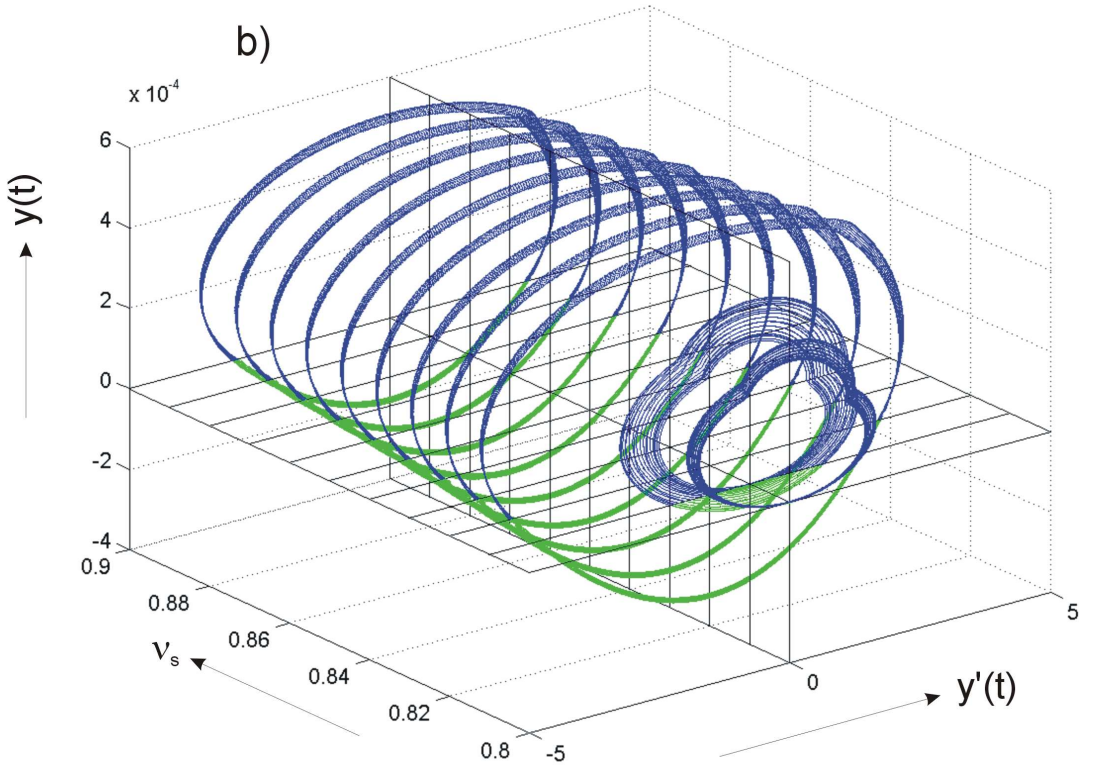
Zajímavý je bifurkační průběh v okolí $\nu_s = 0.81$ a $\nu_s = 0.815$, viz obr.9 a obr.10, kde amplitudy $y(t)$ vlivem naladění $\nu_{\min} \approx 1$ v potenciální tuhostní hladině výsledné zubové tuhosti $C(t)$ skokově narůstají. Průběhy fázových rovin $\{y'(t); y(t)\}$ pro $\nu_s = 0.81$ mají menší amplitudy s širokým rozptylem – rozkmitem a pro $\nu_s = 0.815$ skokově přecházejí na velké amplitudy s velmi malým rozkmitem průběhů ve fázové rovině. Pro dané naladění je to oblast s rázovými jevy vlivem odskoků zubových profilů.




Obr. 10 – Časové průběhy výsledné modifikované tuhostní funkce $C(t)(H1+H2)$, tlumení ${}_1k_v$, $y(t)$, $y'(t)$ a fázová rovina $\{y'(t); y(t)\}$ pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.815$ a variantní tlumení b(×1) – Tab.2 při normálním záběru $y(t) > 0$ a rázových jevech.

Ukázka příkladu celkového chování soustavy ve variantním tlumení b(×1) pro $p = 1$ a dva rozsahy naladění $\nu_s \in \langle 0.6; 0.7 \rangle$, $\nu_s \in \langle 0.8; 0.9 \rangle$ je patrná z obr.11a a obr.11b. Modrou barvou vyznačené průběhy představují fázové portréty při normálním záběru ozubení, zelenou barvou pak fáze záběrů při odskocích zubových profilů do oblasti vůle při rázových jevech v ozubení.




Obr. 11 – Fázové portréty $\{y'(t); y(t); \nu_s\}$ pro dva rozsahy naladění $\nu_s \in \langle 0.6;0.7 \rangle$ a $\nu_s \in \langle 0.8;0.9 \rangle$ a variantním tlumení b(×1) – Tab.2 v záběru ozubení.

## 3. Závěr

Příspěvek je úvodní studií k problematice analýzy vlivu časově proměnlivého tlumení v záběru ozubení na vnitřní dynamiku hmotnostně vylehčených ozubených kol v převodových soustavách.

## 4. Acknowledgement

Studie byla vypracována v rámci grantového projektu GA ČR č. 101/07/0884, č. 101/08/0282 a výzkumného projektu AVOZ 20760514 v Ústavu termomechaniky AV ČR, v.v.i., Praha.

## 5. References

[1] Hortel, M., Škuderová, A.: K numerické analýze dynamických jevů v nelineárních časově heteronomních – parametrických soustavách s rázy v záběru ozubení kinematických dvojic. Část III. *Parazitní jevy, bifurkace a chaos v převodových soustavách s ozubením.* VUT Brno 2008, ISBN 978-80-214-3758-2, 1-105.