



Approximation of the compliance function based on continuous retardation spectrum

P. Havlásek, M. Jirásek¹

Summary: When describing rheologic processes in concrete, such as creep or relaxation, efficient numerical methods based on the exponential algorithm for a Kelvin or Maxwell chain are often used. Efficient identification of parameters of such a rheologic chain is a difficult problem. This paper is focused on one specific method using the concept of continuous retardation spectrum, which provides explicit formulae for determination of parameters.

1. Úvod

Funkci poddajnosti pro popis dotvarování betonu je pro účely numerické implementace vhodné approximovat Dirichletovou řadou. Tato řada odpovídá Kelvinovu reologickému řetězci, jehož chování je popsáno diferenciálními rovnicemi a je pro něj vyvinut efektivní exponenciální algoritmus.

Příspěvek se týká metody založené na pojmu retardačního spektra, kterou lze jednoduše určit parametry Dirichletovy řady approximující danou funkci poddajnosti. Tato metoda bude představena v aplikaci na funkci poddajnosti modelu B3 profesora Bažanta a na funkce poddajnosti modelů z norem ACI a CEB. Oproti klasické metodě nejmenších čtverců, vedoucí na řešení soustavy lineárních rovnic, poskytuje metoda vycházející z retardačního spektra explicitní vzorce pro určení tuhostí jednotlivých článků Kelvinova řetězce. Přesnost a zároveň i složitost vzorců závisí na zvoleném řádu approximace. V příspěvku bude provedena podrobná analýza těchto aspektů a navržen postup představující z praktického hlediska optimální kompromis.

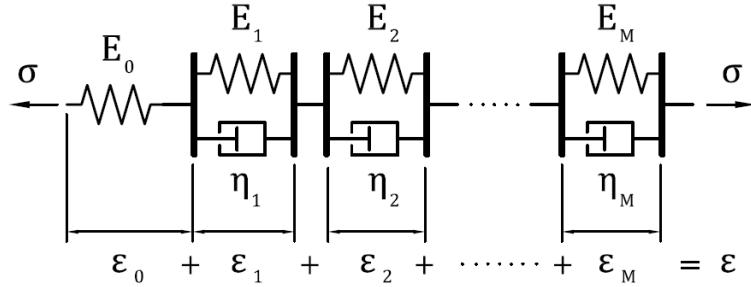
2. Vztah mezi retardačním spektrem a funkcí poddajnosti

Kelvinův reologický řetězec (viz obrázek 1) vznikne sériovým spojením jednotlivých Kelvinových článků, ve kterých jsou paralelně zapojeny pružiny o tuhosti E_μ s viskózními tlumiči o viskozitě η_μ , $\mu = 1, 2, \dots, M$. Většina deformace se při zatížení Kelvinova článku s parametry η_μ a E_μ odehraje v čase blízkém jejich poměru. Proto se zavádí pomocná veličina

$$\tau_\mu = \eta_\mu / E_\mu \quad (1)$$

zvaná retardační čas. Při sestavování Kelvinova řetězce je proto dobré volit retardační časy jednotlivých článků tak, aby byly rovnoměrně rozděleny (v logaritmické stupnici) a pokryly zkoumaný časový interval.

¹ Ing. Petr Havlásek, Prof. Ing. Milan Jirásek, DrSc., Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague, 166 29 Prague, Czech Republic, petr.havlasek@gmail.com



Obrázek 1: Schéma Kelvinova řetězce.

Dirichletova řada popisující funkci poddajnosti Kelvinova řetězce má tvar

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{\mu=1}^M \frac{1}{E_\mu} (1 - e^{-t/\tau_\mu}) \right] H(t) \quad (2)$$

a představuje součet příspěvků všech článků Kelvinova řetězce. První člen této řady, $1/E_0$, popisuje poddajnost elastické pružiny, která umožňuje simulovat okamžité deformace, a $H(t)$ je Heavisideova funkce.

Graf závislosti poddajnosti $1/E_\mu$ na $\ln \tau_\mu$ se nazývá retardační spektrum materiálu. Pro řetězec popsaný Dirichletovou řadou (2) je toto spektrum diskrétní. Spojité retardační spektrum popisuje Kelvinův řetězec, který má nekonečně mnoho Kelvinových článků s nekonečně malými poddajnostmi a spojite se měnícími retardačními časy. Funkce poddajnosti je pak popsaná vztahem

$$\Phi(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} L(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d(\ln \tau), \quad t \geq 0 \quad (3)$$

kde $L(\tau)$ představuje spojité retardační spektrum. Příklad spojitého retardačního spektra je znázorněn na obrázku 2. V inženýrských úlohách, kde se při popisu funkce poddajnosti lze spokojit s přesností v řádu procent, lze takové spojité spektrum nahradit spektrem diskrétním, jehož retardační časy budou v logaritmickém měřítku rovnoměrně vzdálené. Tuhostí vstupující do příslušné Dirichletovy řady lze pak pro pevně zvolené retardační časy určit integrací. Na obrázku 2 jsou šrafou vyznačeny plochy, které odpovídají poddajnostem $1/E_\mu$. Pokud se sousední retardační časy zvolí v poměru 1:10, lze tuhost E_μ vypočítat jako $1 / (L(\tau_\mu) \ln 10)$. Poddajnost nultého člena (pružiny) lze buď určit integrací,

$$\frac{1}{E_0} = \int_{\tau=0}^{\tau_1/\sqrt{10}} L(\tau) d(\ln \tau) \quad (4)$$

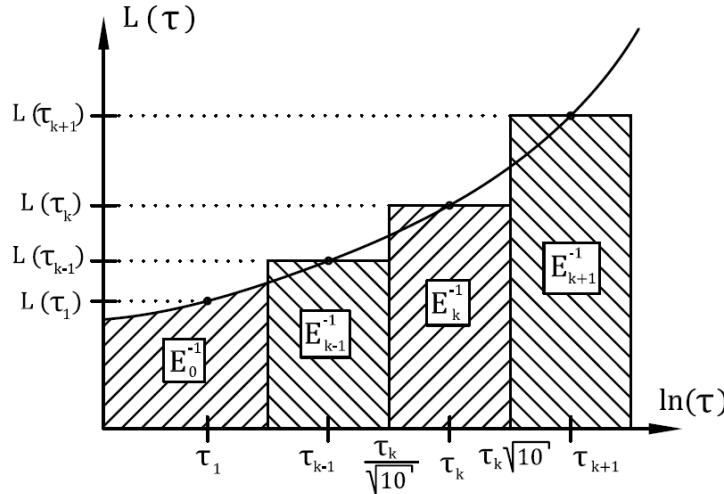
nebo lze do Dirichletovy řady zařadit členy, jejichž retardační časy budou velmi malé (např. 10^{-15} dne).

Funkce popisující retardační spektrum $L(\tau)$ může být získána využitím Postova-Widderova vzorce pro inverzní Laplaceovu transformaci. Podle něj je k -tá aproximace retardačního spektra dána vzorcem

$$L_k(\tau) = -\frac{(-k\tau)^k}{(k-1)!} \Phi^{(k)}(k\tau), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

kde $\Phi^{(k)}$ označuje k -tou derivaci analyticky předepsané (a dostatečně hladké) funkce poddajnosti. Pro $k \rightarrow \infty$ aproximace konvergují k přesnému retardačnímu spektru:

$$L(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(\tau) \quad (6)$$



Obrázek 2: Spojité retardační spektrum. Určení tuhostí jednotlivých členů Kelvinova řetězce.

3. Určení členů Dirichletovy řady vybraných modelů pro popis dotvarování

V této kapitole budou pro vybrané modely (model B3, model ACI a CEB) uvedeny postupy a vzorce, kterými lze určit parametry Kelvinova reologického řetězce tak, aby odpovídající Dirichletova řada aproxirovala původní funkci poddajnosti s minimální chybou.

3.1. Model B3 - základní dotvarování

Funkce poddajnosti modelu B3 je definována součtem funkce poddajnosti popisující základní dotvarování $J_b(t, t')$ a funkce vyjadřující dotvarování spojené s vysycháním $J_d(t, t')$. Základní dotvarování pak lze dále rozdělit na část elasticou J_e , viskoelasticou $J_v(t, t')$ a viskózní $J_f(t, t')$. Nejprve bude rozebrána funkce poddajnosti nestárnoucího materiálu, která je použita při popisu viskoelastické části dotvarování stárnoucího materiálu podle teorie solidifikace. Tato funkce je v modelu B3 dána předpisem

$$\Phi(t - t') = q_2 \ln \left[1 + \left(\frac{t - t'}{\lambda_0} \right)^n \right], \quad (7)$$

kde q_2 [MPa⁻¹] je empirický součinitel závisející na obsahu cementu v betonové směsi a tlakové pevnosti a λ_0 a n jsou konstanty s typickými hodnotami $\lambda_0 = 1$ den a $n = 0,1$. Jelikož q_2 je multiplikativní konstanta, stačí pozornost soustředit na funkci odpovídající hodnotě $q_2 = 1$, kterou označíme

$$\Phi_b(t) = \ln(1 + t^n) = \ln[f(t)], \quad \text{kde } f(t) = 1 + t^n \quad (8)$$

Dosazením vztahu (8) do (5) lze určit libovolný řád approximace funkce $L(\tau)$. Následující dva řádky uvádějí approximace prvních dvou řádů:

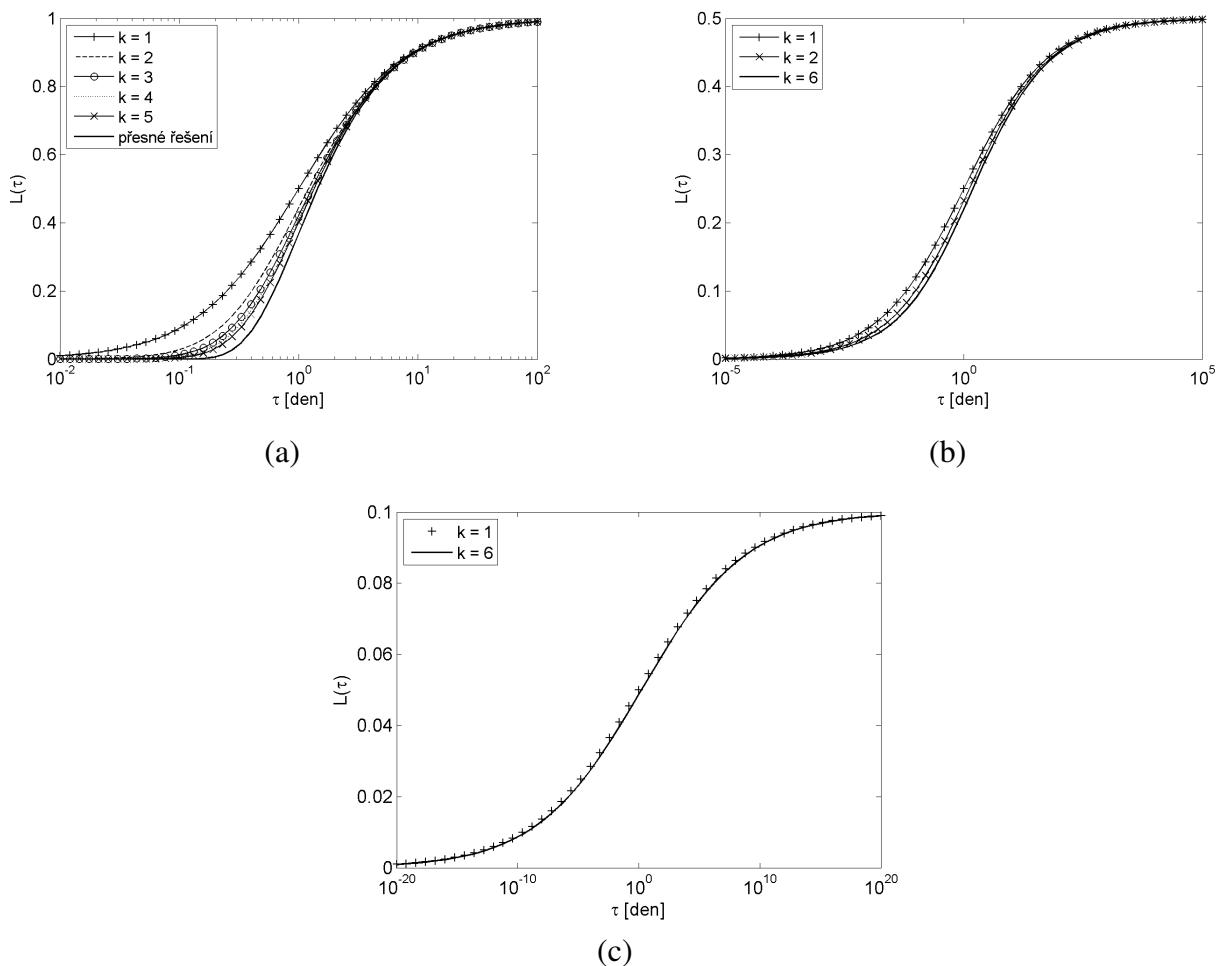
$$L_1(\tau) = \tau \Phi'_b(\tau) = \frac{n\tau^n}{1 + \tau^n} \quad (9)$$

$$L_2(\tau) = -4\tau^2 \Phi''_b(2\tau) = \frac{n(2\tau)^n [1 - n + (2\tau)^n]}{[1 + (2\tau)^n]^2} \quad (10)$$

Pro $n = 1$ lze navíc určit přesné řešení:

$$L(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k\tau}{1 + k\tau} \right)^k = e^{-1/\tau} \quad (11)$$

Na obrázku 3 jsou uvedena retardační spektra pro různé hodnoty parametru n a pro různé řády approximace. Pro $n = 1$ je navíc zobrazeno i přesné (limitní) řešení. Jak je vidět, retardační spektra pro menší hodnotu parametru n konvergují rychleji k přesnému řešení; pro $n = 0,1$ (doporučená hodnota parametru modelu B3) je rozdíl mezi jednotlivými approximovanými řešeními minimální. Platí, že $L(\tau) \rightarrow n$ pro $\tau \rightarrow \infty$.



Obrázek 3: Retardační spektrum funkce (8) pro hodnoty (a) $n = 1$, (b) $n = 0,5$, (c) $n = 0,1$.

Pokud byly zvoleny retardační časy článků Kelvinova řetězce v násobcích deseti a pokud je první retardační čas označen τ_1 , pak lze vztah (3) approximovat takto:

$$\begin{aligned}\Phi_b(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty} L(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d(\ln \tau) \approx \\ &\approx \int_{\tau=0}^{\tau_1/\sqrt{10}} L_k(\tau) d(\ln \tau) + (\ln 10) \sum_{\mu=1}^M L_k(\tau_\mu) (1 - e^{-t/\tau_\mu})\end{aligned}\quad (12)$$

V něm lze identifikovat jednotlivé poddajnosti článků Kelvinova řetězce,

$$\frac{1}{E_0} = \int_{\tau=0}^{\tau_1/\sqrt{10}} L_k(\tau) d(\ln \tau), \quad \frac{1}{E_\mu} = (\ln 10) L_k(\tau_\mu) \quad (13)$$

Pro druhý řád approximace (tedy pro $k = 2$) a se zahrnutím multiplikativní konstanty q_2 dostáváme

$$\frac{1}{E_0} = q_2 \ln(1 + \tilde{\tau}_0) - \frac{q_2 \tilde{\tau}_0}{10(1 + \tilde{\tau}_0)}, \quad \tilde{\tau}_0 = \left(\frac{2\tau_1}{\sqrt{10}} \right)^{0.1} \quad (14)$$

$$\frac{1}{E_\mu} = q_2 (\ln 10) \frac{\tilde{\tau}_\mu (0.9 + \tilde{\tau}_\mu)}{10(1 + \tilde{\tau}_\mu)^2}, \quad \tilde{\tau}_\mu = (2\tau_\mu)^{0.1} \quad (15)$$

Na obrázku 4(a) je zobrazen časový průběh přesné bezrozměrné funkce poddajnosti Φ_b a její první, druhé a třetí approximace ($k = 1, 2, 3$). Shoda pochopitelně není dobrá pro doby zatížení mnohem kratší než nejmenší retardační čas τ_1 nebo mnohem delší než největší retardační čas τ_M . Proto je počet retardačních časů a jejich hodnoty vždy třeba volit s ohledem na konkrétní aplikaci. V rozmezí pokrytém retardačními časy je shoda poměrně dobrá, ale jak ukazuje obrázek 4(b), relativní chyba se pro $k = 2$ i $k = 3$ pohybuje kolem 2% a výrazně se nesníží ani pro vysoký řád approximace $k = 6$. Podstatného zlepšení lze dosáhnout úpravou, při které jsou po určení tuhostí E_μ všechny retardační časy τ_μ vynásobeny empirickou konstantou 1,35 (v grafu označena jako "upravené 1") a tuhost článku spojeného s nejdelším retardačním časem τ_M je vydělena hodnotou 1,2 ("upravené 2"). Po této úpravě se i pro nízký řád approximace $k = 2$ relativní chyba pohybuje do 0,3%.

3.2. Model B3 - dotvarování spojené s vysycháním

V této části budou formulovány vztahy, kterými lze určit parametry Kelvinova řetězce v případě popisu dotvarování spojeného s vysycháním modelu B3. Funkce poddajnosti je učena vzorcem

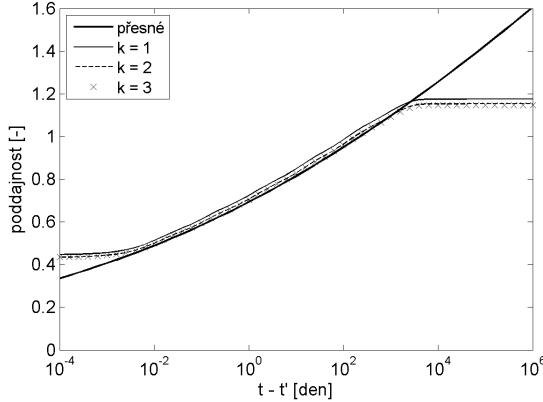
$$J_d(t, t') = q_5 \sqrt{e^{-g(t-t_0)} - e^{-g(t'-t_0)}}, \quad t \geq t' \geq t_0, \quad (16)$$

kde q_5 [MPa^{-1}] je parametr závislý na průměrné tlakové pevnosti betonu \bar{f}_c a konečné hodnotě smrštění ε_{sh}^∞ . Pomocná funkce $g(\hat{t})$ je definovaná vztahem

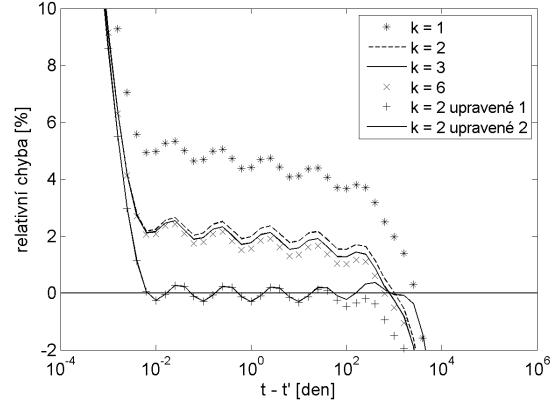
$$g(\hat{t}) = 8 [1 - (1 - h)S(\hat{t})], \quad (17)$$

kde h značí relativní vlhkost a

$$S(\hat{t}) = \tanh \sqrt{\frac{\hat{t}}{\tau_{sh}}} \quad (18)$$



(a)



(b)

Obrázek 4: (a) Grafy funkce poddajnosti v závislosti na řádu approximace, (b) relativní chyba vztavená k analytickému vzorci.

V posledním vzorci označuje τ_{sh} veličinu známou jako poločas vysychání.

Oproti funkci popisující základní dotvarování je tato funkce stárnoucí, tzn. její funkční hodnota nezávisí jen na délce trvání zatížení $t - t'$, ale i na stáří betonu t_0 , ve kterém začalo vysychání, a na stáří t' , ve kterém začalo působit zatížení. Časy t_0 a t' můžeme chápat jako parametry, které mají vliv na poddajnosti jednotlivých článků Kelvinova řetězce. Pro zjednodušení zápisu označíme $t'_0 = t' - t_0$. Pro pevně zvolenou hodnotu t'_0 můžeme stanovit retardační spektrum funkce poddajnosti

$$\Phi_d(t) = \sqrt{e^{-g(t+t'_0)} - e^{-g(t'_0)}}, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

kde proměnná t má nyní význam délky trvání zatížení, tj. stejný význam jako rozdíl $t - t'$ v původním vzorci (16). Navíc byl koeficient q_5 položen roven jedné. První a druhá derivace funkce (19) podle t je dána vztahy

$$\Phi'_d(t) = -\frac{e^{-g(t+t'_0)} g'(t+t'_0)}{2\Phi_d(t)} \quad (20)$$

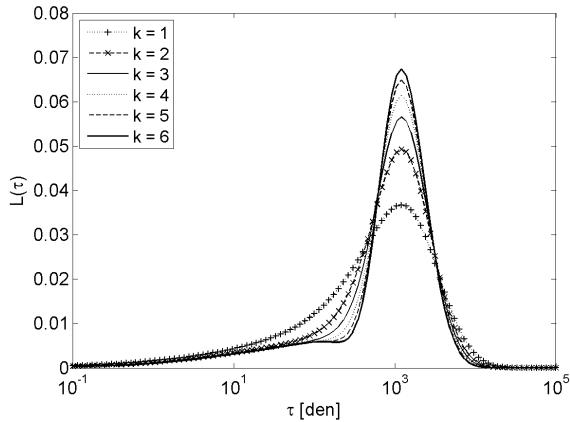
$$\Phi''_d(t) = \frac{e^{-g(t+t'_0)} [g'^2(t+t'_0) - g''(t+t'_0)]}{2\Phi_d(t)} - \frac{e^{-2g(t+t'_0)} g'^2(t+t'_0)}{4\Phi_d^3(t)} \quad (21)$$

kde g' a g'' značí první a druhou časovou derivaci funkce g . Vyšší řády derivací funkce Φ''_d zde pro svou složitost nejsou uvedeny; k jejich získání bylo použito symbolické prostředí programu Matlab. První a druhá approximace retardačního spektra je určena stejným postupem jako v předchozím případě:

$$L_1(\tau) = \tau \Phi'_d(\tau) = -\tau \frac{e^{-g(\tau+t'_0)} g'(\tau+t'_0)}{2\Phi_d(\tau)} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} L_2(\tau) &= -4\tau^2 \Phi''_d(2\tau) = \\ &= -2\tau^2 \left(\frac{e^{-g(2\tau+t'_0)} [g'^2(2\tau+t'_0) - g''(2\tau+t'_0)]}{\Phi_d(2\tau)} - \frac{e^{-2g(2\tau+t'_0)} g'^2(2\tau+t'_0)}{2\Phi_d^3(2\tau)} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Na obrázku 5 jsou uvedeny approximace $L_k(\tau)$ retardačního spektra funkce Φ_d pro konkrétní hodnoty $t'_0 = 7$ dní, $h = 0,5$ a $\tau_{sh} = 1000$ dní. Jak je z grafu vidět, retardační spektra se pro jednotlivé řády approximace liší více než v případě funkce Φ_b z rovnice (8). Lze tedy předpokládat, že pro nižší řády approximace bude značný rozdíl mezi Dirichletovou řadou a přesnou funkcí poddajnosti. S rostoucím řádem approximace se spektrum zužuje a jeho funkční hodnoty rostou. Jeho vrchol je přibližně v čase τ_{sh} . Tuhosti E_μ článků Kelvinova řetězce lze určit nume-

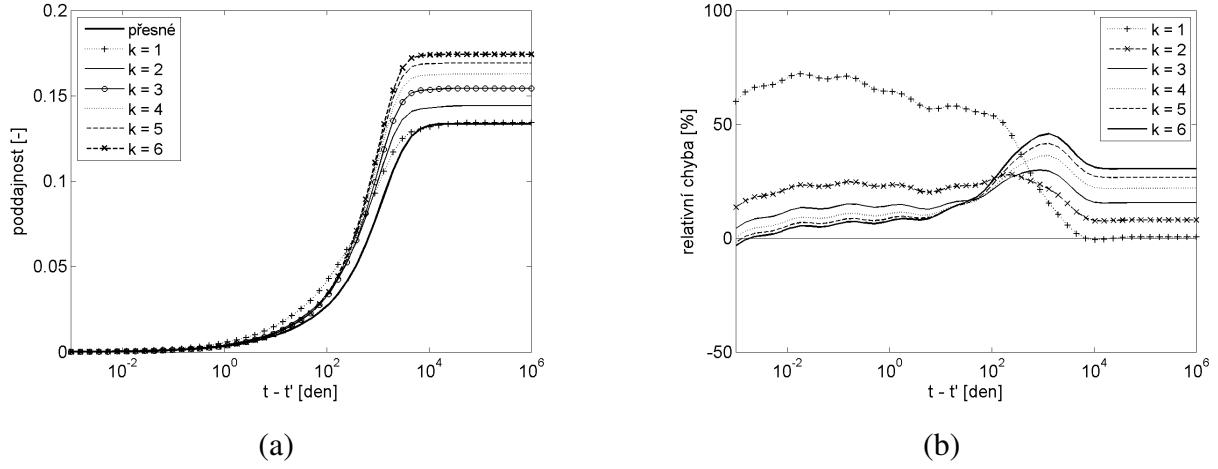


Obrázek 5: Retardační spektrum pro dotvarování spojené s vysycháním modelu B3.

rickou integrací užitím obdélníkového pravidla, tj. dle vzorce (13). Určit vzorec pro výpočet tuhosti nultého Kelvinova článku by znamenalo vyhodnotit první z výrazů (13). Tuto komplikaci lze obejít posunutím času t_{min} , tedy nahrazením pružiny Kelvinovými články s krátkými retardačními časy. Nejkratší retardační čas lze zvolit např. jako 10^{-3} dne, pro který je funkční hodnota většiny retardačních spekter velmi malá.

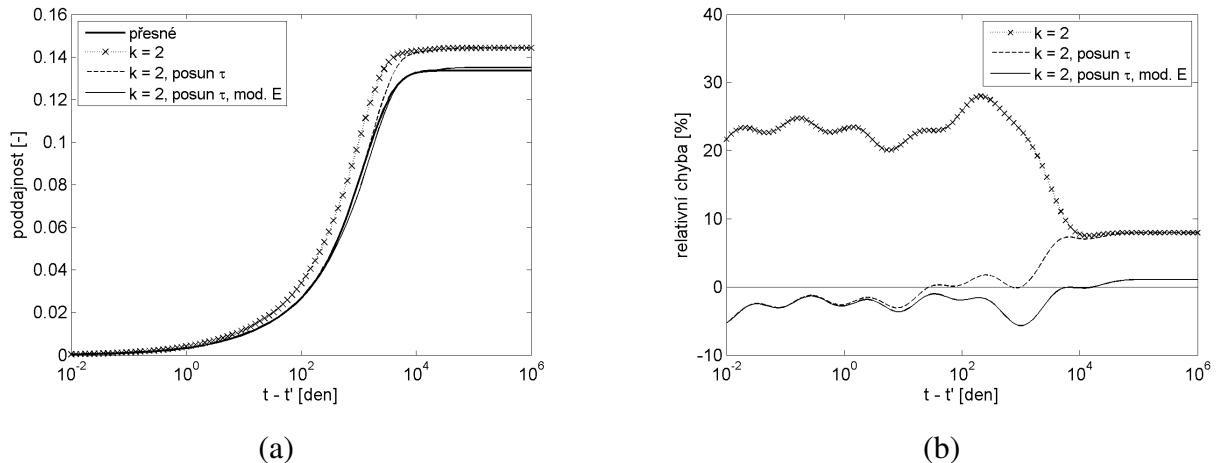
Na obrázku 6 je zachycen průběh přesné funkce poddajnosti a její approximace. Tento graf byl vytvořen s identickou kombinací parametrů jako retardační spektrum na obrázku 5. Chyba vzniklá při approximaci řádu $k = 1$ je způsobena špatným průběhem retardačního spektra, které se značně liší od spekter získaných pro vyšší řády approximace. Pro vyšší řády approximace je retardační spektrum velmi úzké a chyba vzniká nepřesnou numerickou integrací vztahů pro určení tuhostí jednotlivých článků. Chybu se povedlo výrazně snížit až současným zpřesněním numerické integrace (Simpsonovo pravidlo, Booleovo pravidlo) a zmenšením násobků retardačních časů z desetinásobku na dvojnásobek. Složitost vzorců společně s vysokým počtem Kelvinových článků klade zvýšené nároky na výpočet. Proto byl učiněn pokus upravit tuhosti jednotlivých článků Kelvinova řetězce při zachování násobků retardačních časů a způsobu integrace (obdélníkové pravidlo) tak, aby pro nízký (druhý) řád approximace byla chyba co nejmenší. Druhý řád approximace byl zvolen jako jakýsi kompromis mezi složitostí výsledných vzorců a přesností řešení.

Na obrázku 7 je uveden průběh funkce poddajnosti a relativní chyby pro řád approximace $k = 2$ a pro přesné řešení v čase. Prvního zlepšení bylo dosaženo vynásobením všech retardačních časů (až po určení tuhostí E_μ) konstantou 1,6. Příslušný graf je v legendě označen "k = 2, posun τ". Touto úpravou došlo ke snížení chyby z původních 30% na 10%. Největší chyba vzniká v čase τ blízkém poločasu vysychání τ_{sh} a je způsobena nepřesnou numerickou integrací. Aby nebylo nutné zpřesňovat numerickou integraci nebo zahušťovat retardační časy jen na vybraném úzkém úseku, který je navíc závislý na dalších parametrech, byl učiněn pokus vybrané tuhosti



Obrázek 6: Průběh bezrozměrné funkce poddajnosti (a) a relativní chyby (b) pro dotvarování spojené s vysycháním modelu B3 v čase a v závislosti na řádu approximace k .

E_μ vynásobit konstantou a tím chybu mezi approximovaným a přesným řešením snížit. Proto byl zvolen základní retardační čas $\tau_{basic} = \tau_{sh}$. Od tohoto retardačního času jsou v násobcích deseti odvozeny retardační časy zbylých jednotek. Pevně zvolená poloha retardačních časů umožní modifikovat konkrétní tuhosti. Nejlepší shody bylo dosaženo při vynásobení tuhosti E_{basic} koeficientem 1,1, tuhosti $E_{basic+1}$ hodnotou 0,8 a $E_{basic+2}$ součinitelem 1,2. Výsledný průběh je na obrázku 7 označen "k = 2, posun τ , mod. E". Relativní chyba se ve většině případů pohybuje do 5%.



Obrázek 7: Průběh bezrozměrné funkce poddajnosti (a) a relativní chyby (b) pro dotvarování spojené s vysycháním modelu B3 v čase. Řád approximace $k = 2$, $t_0 = 7$ dní, $t' = 14$ dní, $h = 0,5$, $\tau_{sh} = 1000$ dní.

3.3. Model ACI

Norma ACI 318-02 uvádí pro výpočet dotvarování vztah

$$C(t) = \left(\frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \right) C_u \quad (24)$$

kde $C(t)$ je hodnota součinitele dotvarování závislá na délce trvání zatížení t a C_u je jeho konečná hodnota, závislá na čase t' , který můžeme považovat za parametr. Z hlediska popisu dotvarování reologickým řetězcem stačí soustředit pozornost jen na funkci

$$\Phi_{ACI}(t) = \frac{f(t)}{10 + f(t)}, \text{ kde } f(t) = t^{0.6} \quad (25)$$

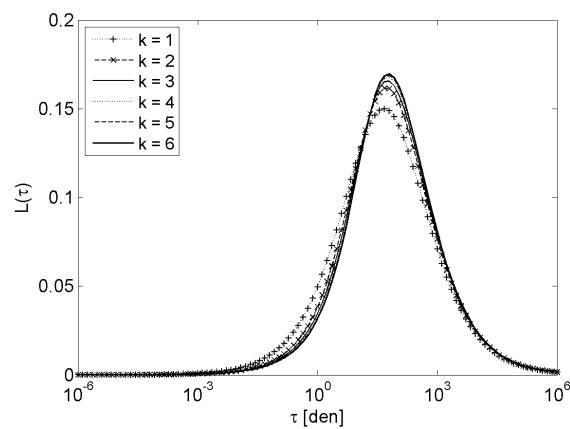
Následující vztahy uvádějí první tři časové derivace této funkce:

$$\Phi'_{ACI}(t) = \frac{10f'(t)}{[10 + f(t)]^2} \quad (26)$$

$$\Phi''_{ACI}(t) = \frac{10f''(t)}{[10 + f(t)]^2} - \frac{20f'^2(t)}{[10 + f(t)]^3} \quad (27)$$

$$\Phi'''_{ACI}(t) = \frac{10f'''(t)}{[10 + f(t)]^2} - \frac{60f'(t)f''(t)}{[10 + f(t)]^3} + \frac{60f'^3(t)}{[10 + f(t)]^4} \quad (28)$$

Vyšší derivace bezrozměrné funkce $\Phi_{ACI}(t)$ zde pro svou složitost nejsou uvedeny. Funkce approximující retardační spektrum se získají podle stejného postupu jako ve dvou předešlých kapitolách. Na obrázku 8 je zobrazeno retardační spektrum v závislosti na čase a v závislosti na uvažovaném řádu approximace. Podobně jako v případě funkce Φ_d modelu B3 je hodnota funkce poddajnosti shora omezená (oproti funkci Φ_b modelu B3, která je shora neomezená), a proto je spektrum pro vysoké hodnoty času τ blízké nule. Oproti retardačnímu spektru funkce Φ_d modelu B3 konvergují funkce $L_k(\tau)$ rychleji k přesnému řešení.



Obrázek 8: Retardační spektrum podle normy ACI.

Parametry Kelvinova řetězce určíme stejným postupem jako v předcházející kapitole. Retardační časy jsou voleny opět v násobcích deseti a pro výpočet tuhostí E_μ je použita jednobodová integrace - obdélníkové pravidlo. Pro řád approximace $k = 1$ platí pro poddajnost elastické

pružiny zařazené před Kelvinův řetězec a pro poddajnost μ -tého Kelvinova článku vztahy

$$\frac{1}{E_0} = 1 + \tau_1^{-0.6} 10^{1.3} \quad (29)$$

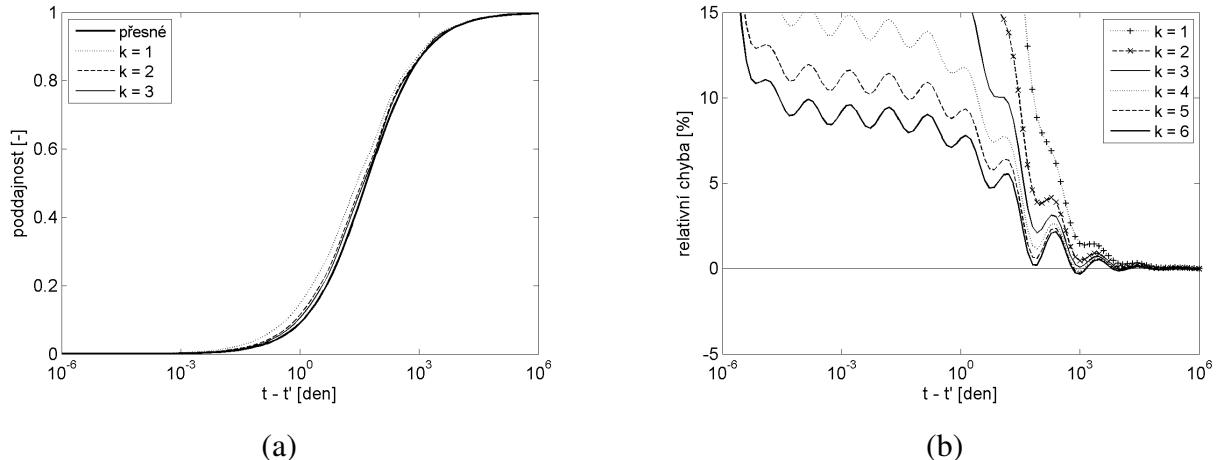
$$\frac{1}{E_\mu} = (\ln 10) \frac{6\tau^{0.6}}{(\tau^{0.6} + 10)^2} \quad (30)$$

zatímco pro řád approximace $k = 2$ platí vztahy

$$\frac{1}{E_0} = 1 - \frac{16\tilde{\tau}_0 + 100}{(\tilde{\tau}_0 + 10)^2}, \quad \tilde{\tau}_0 = \left(\frac{2\tau_1}{\sqrt{10}} \right)^{0.6} \quad (31)$$

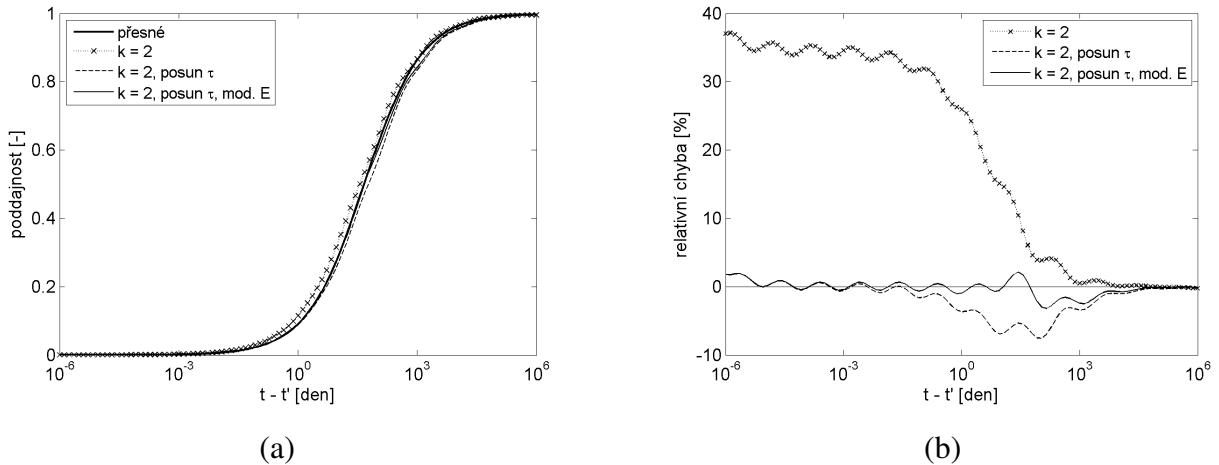
$$\frac{1}{E_\mu} = 24\tilde{\tau}_\mu \frac{0.4\tilde{\tau} + 1}{(\tilde{\tau}_\mu + 10)^3}, \quad \tilde{\tau}_\mu = (2\tau_\mu)^{0.6} \quad (32)$$

Pro určení tuhostí při vyšším řádu approximace bylo použito symbolické prostředí programu Matlab. Na obrázku 9(a) je uveden časový průběh funkce $\Phi_{ACI}(t)$ a jeho approximací a na obrázku 9(b) relativní chyby vztažené k přesnému řešení. V porovnání s approximacemi funkce Φ_d modelu B3 se v tomto případě všechny funkce bez ohledu na řád approximace blíží pro dlouhé časy trvání zatížení ($\tau \geq 10.000$ dní) ke stejné (správné) hodnotě. Nejlepší shody s analyticky předepsanou funkcí bylo dosaženo pro nejvyšší řád approximace $k = 6$, kdy se relativní chyba téměř na celém intervalu pohybovala do 10%.

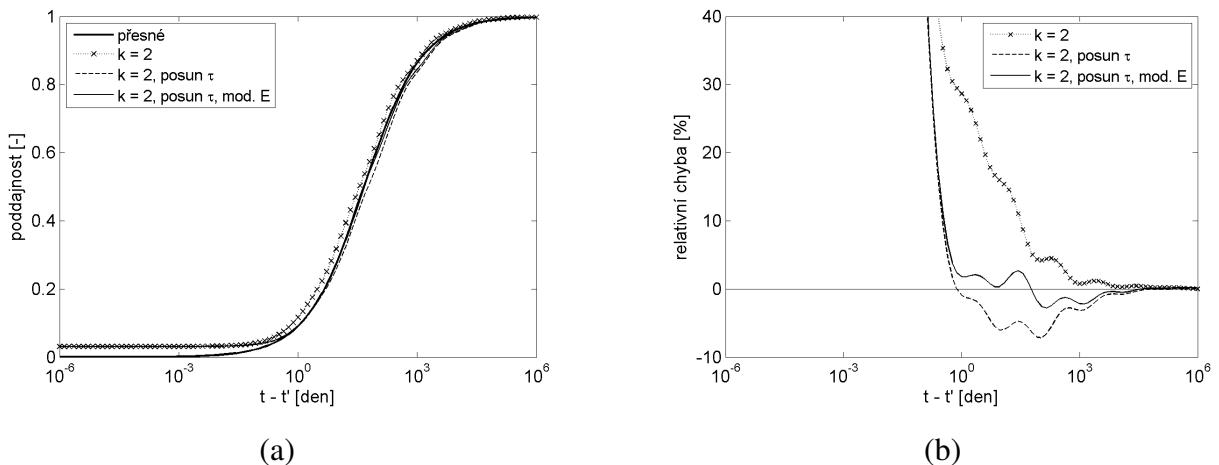


Obrázek 9: Průběh bezrozměrné funkce poddajnosti (a) a relativní chyby (b) podle normy ACI v čase a v závislosti na řádu approximace k .

Vrchol retardačního spektra funkce $\Phi_{ACI}(t)$ je blízko času $\tau = 100$ dní. Proto bude aplikován podobný postup jako v předchozí kapitole: nejprve se pro vybraný řád approximace určí konstanta, kterou se po určení tuhostí E_μ vynásobí všechny retardační časy a tím dojde k vodorovnému posunu funkce poddajnosti blíže k analytickému řešení. Ve druhé fázi se pevně zvolí retardační časy a provede se optimalizace tuhostí E_μ . Jako základní retardační čas byl zvolen vrchol retardačního spektra, tj. $\tau_{basic} = 100$ dní. Výsledek optimalizace při řádu approximace $k = 2$ je znázorněn na obrázku 10. Pro stejný řád approximace a pro nejkratší retardační čas $\tau_1 = 1$ den jsou výsledky uvedeny na obrázku 11. Parametry Kelvinova řetězce byly upraveny; všechny retardační časy byly vynásobeny konstantou 1,64 (graf $k = 2$, posun τ), tuhost $E_{basic-1}$



Obrázek 10: Průběh bezrozměrné funkce poddajnosti (a) a relativní chyby (b) v čase. Řád aproximace $k = 2$.

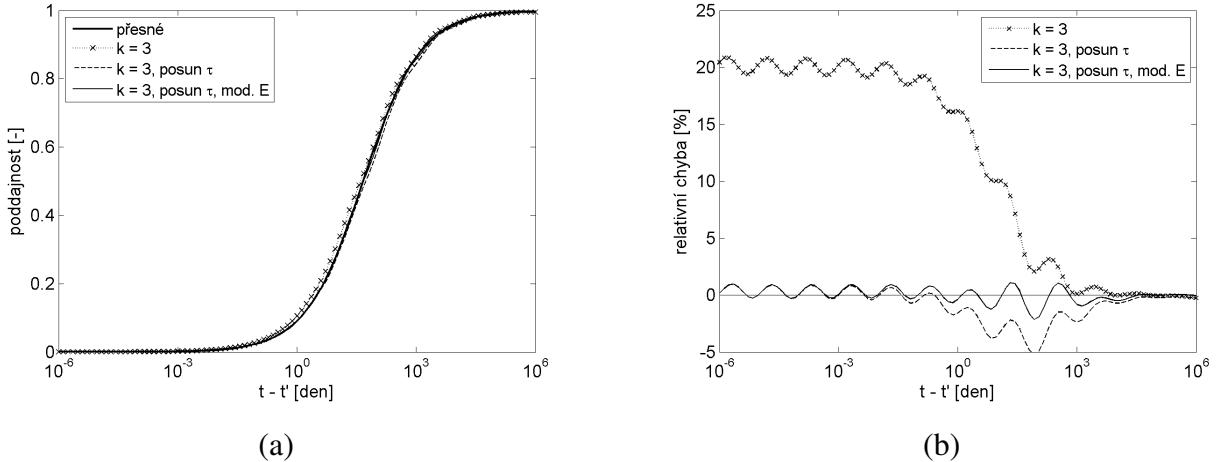


Obrázek 11: Průběh bezrozměrné funkce poddajnosti (a) a relativní chyby (b) v čase. Řád aproximace $k = 2$. Nejkratší retardační čas $\tau_1 = 1$ den.

byla vynásobena součinitelem 0,86, E_{basic} koeficientem 1,1 a tuhostí $E_{basic+1}$ a $E_{basic+2}$ hodnotou 1,05 (graf $k = 2$, posun τ , mod. E).

Stejný postup byl použit i pro vyšší řád approximace, $k = 3$. Výsledné průběhy a relativní chyby bezrozměrné funkce poddajnosti jsou znázorněny na obrázku 12. Pro optimalizaci jejího průběhu byla použita následující sada parametrů: konstanta násobící retardační časy 1,35 (graf $k = 3$, posun τ) a součinitele násobící tuhosti $E_{basic-1}$, E_{basic} , $E_{basic+1}$ po řadě 0,95, 0,97, 1,15 (graf $k = 3$, posun τ , mod. E).

Jak je z grafů vidět, vynásobením retardačních časů došlo k významnému zmenšení relativní chyby. V případě řádu approximace $k = 2$ došlo na intervalu $(0; \infty)$ ke snížení relativní chyby z původních 35% na $\pm 0,8\%$. Na stejném intervalu byla v případě approximace $k = 3$ původní relativní chyba 20%, která byla posunem snížena na srovnatelnou hodnotu jako v případě o řád nižší approximace. Úpravou tuhostí E_μ bylo dosaženo dalšího zlepšení. Změna se týkala tuhostí, které ovlivňují průběh bezrozměrné funkce poddajnosti v blízkosti retardačního



Obrázek 12: Průběh bezrozměrné funkce poddajnosti (a) a relativní chyby (b) v čase. Řád aproximace $k = 3$.

spektra. Pro $k = 2$ se relativní chyba snížila z 8% na $\pm 3\%$ a pro vyšší approximaci $k = 3$ ze 6% na $\pm 2,5\%$.

Závěrem této kapitoly lze tedy konstatovat, že v případě úpravy parametrů Dirichletovy řady popisující reologické chování Kelvinova řetězce se hodí uvedené vzorce (32). Při vyšším řádu approximace $k = 3$ je zvýšená přesnost vykoupena mnohem vyšší složitostí vzorců.

3.4. Model CEB

Doporučení CEB-FIP uvádí pro funkci poddajnosti vztah

$$J_{CEB}(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{ci}}, \quad (33)$$

kde $E_c(t_0)$ je modul pružnosti závisející na stáří betonu v okamžiku zatížení t_0 , $\phi(t, t_0)$ je součinitel dotvarování a E_{ci} je modul pružnosti betonu ve stáří 28 dní. Pozornost bude soustředěna pouze na vztah popisující součinitel dotvarování,

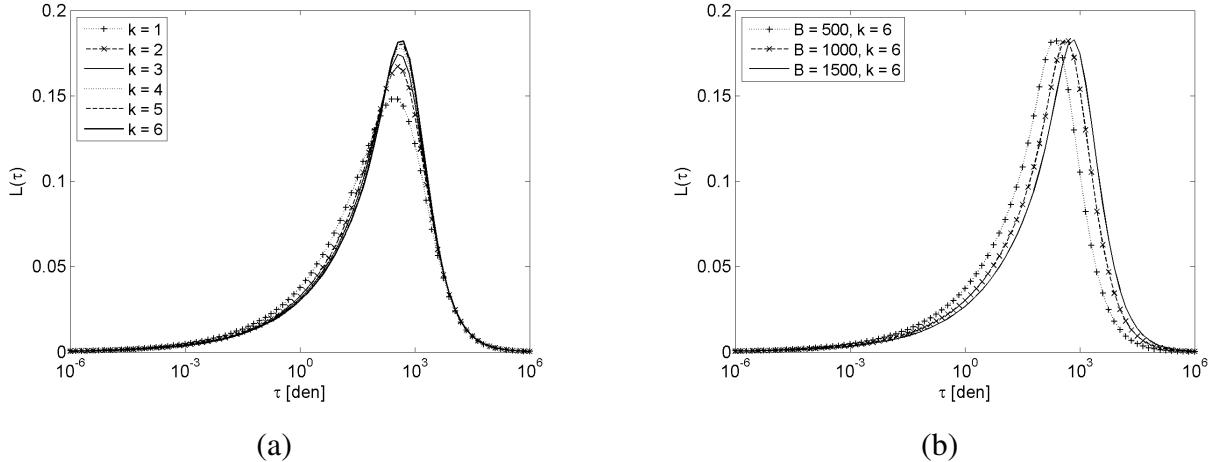
$$\phi(t, t_0) = \varphi_0 \beta_c(t, t_0), \quad (34)$$

kde φ_0 je parametr určující předpokládanou (konečnou) hodnotu dotvarování. Jeho hodnota závisí na relativní vlhkosti okolního prostředí, efektivní tloušťce průřezu, tlakové pevnosti a stáří betonu v okamžiku zatížení. Druhý člen $\beta_c(t, t_0)$ určuje časový průběh dotvarování a je dán vztahem

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0) / t_1}{\beta_H + (t - t_0) / t_1} \right]^{0.3}, \quad (35)$$

s konstantou $t_1 = 1$ den a parametrem β_H , který závisí na efektivní tloušťce průřezu, relativní vlhkosti a tlakové pevnosti, a jehož hodnota se pohybuje nejčastěji v intervalu (500, 1500).

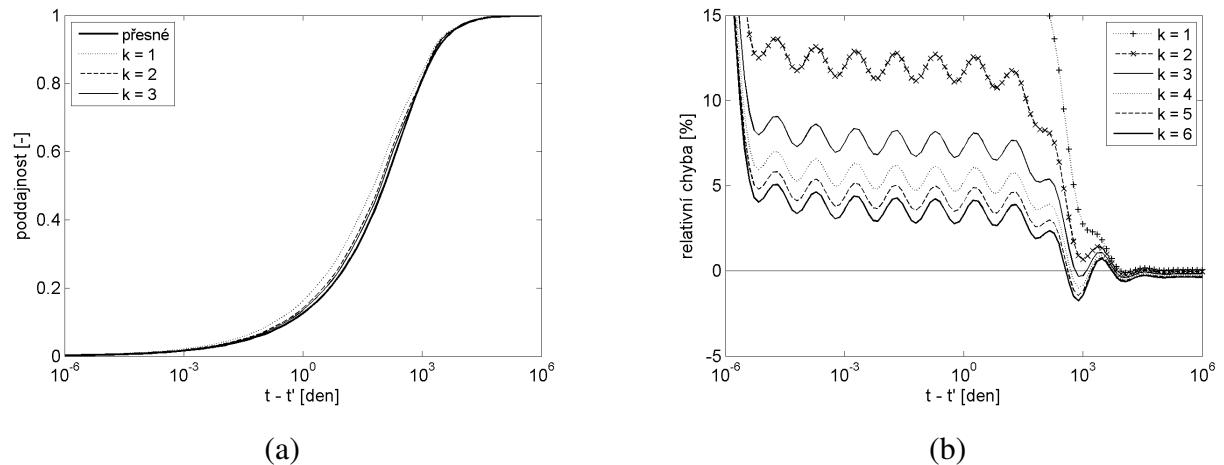
Postup výpočtu tuhostí Kelvinova řetězce je stejný jako v minulé kapitole; nyní se bude pracovat s funkcí (35). Grafy retardačních spekter v závislosti na řádu approximace a na čase τ jsou uvedeny na obrázku 13(a). Tvarem jsou podobné grafům spekter podle normy ACI.



Obrázek 13: Retardační spektrum modelu CEB v závislosti na řádu aproksimace (a), $\beta_H = 1000$ dní. Retardační spektrum pro řadu aproksimace $k = 6$ a různé hodnoty parametru β_H (b).

Nepříjemnou vlastností retardačního spektra funkce $\beta_c(\tau)$ je jeho závislost na parametru β_H , kterým lze ovlivnit jeho horizontální posun (viz obrázek 13(b)).

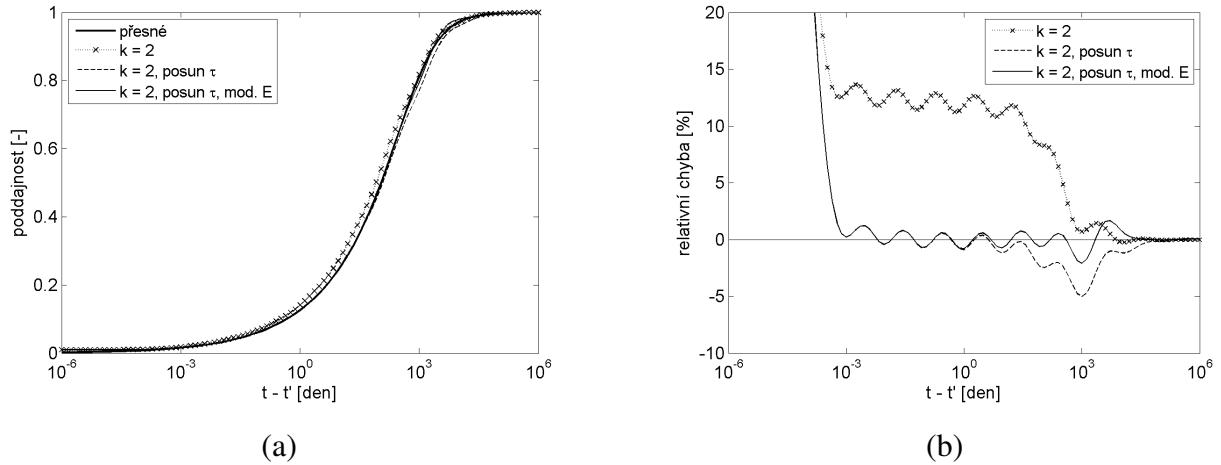
Průběh a přesnost bezrozměrné funkce určující průběh dotvarování jsou znázorněny na obrázku 14. Bez přidaných korekcí je přesnost mnohem lepší než u normy ACI. Pro řadu aproksimace $k = 2$ je nyní nejvyšší relativní chyba okolo 12% (ACI 35%) a pro $k = 3$ okolo 8% (ACI 20%).



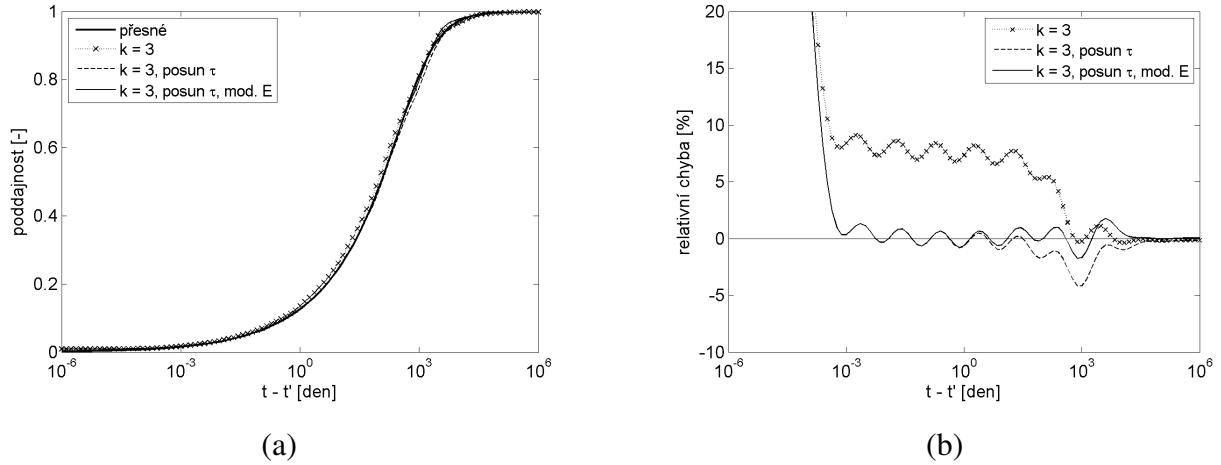
Obrázek 14: Průběh funkce poddajnosti modelu CEB v čase a v závislosti na řádu aproksimace (a), průběh relativní chyby (b). Parametr $\beta_H = 1000$ dní.

Dalšího zlepšení přesnosti je možné dosáhnout, pokud všechny časy vynásobíme konstantou 1,47 pro $k = 2$ a 1,28 pro $k = 3$. Tím se v obou případech sníží maximální chyba na cca 5%. Dále, pokud ztotožníme retardační čas τ_{basic} s hodnotou β_H , můžeme upravit tuhosti jednotlivých článků a tím dosáhnout ještě menší chyby; pro $k = 2$ se ukázaly jako nejlepší tyto parametry: pro tuhost $E_{basic-1}$ součinitel 0,95, E_{basic} 0,94 a pro $E_{basic+1}$ 2,3. Pro řadu aproksimace $k = 3$: $E_{basic-1}$ 0,96, E_{basic} 0,95, $E_{basic+1}$ 1,8. Graf zobrazující průběh a relativní chybu bezrozměrné funkce poddajnosti pro řadu aproksimace $k = 2$ je uveden na obrázku 15, pro $k = 3$

na obrázku 16. V obou případech je relativní chyba srovnatelná, proto je rozumné volit nižší řád ($k = 2$), pro který mají vzorce pro výpočet tuhosti článků jednodušší tvar.



Obrázek 15: Průběh funkce poddajnosti modelu CEB v čase (a), průběh relativní chyby (b). Parametr $\beta_H = 1000$ dní, řád aproksimace $k = 2$. Grafy jsou vyneseny pro základní úlohu, základní úlohu s upravenými retardačními časy a základní úlohu s upravenými retardačními časy i tuhostmi jednotlivých Kelvinových jednotek.



Obrázek 16: Průběh funkce poddajnosti modelu CEB v čase (a), průběh relativní chyby (b). Parametr $\beta_H = 1000$ dní, řád aproksimace $k = 3$. Grafy jsou vyneseny pro základní úlohu, základní úlohu s upravenými retardačními časy a základní úlohu s upravenými retardačními časy i tuhostmi jednotlivých Kelvinových jednotek.

3.5. Volba retardačních časů

Tento oddíl se týká optimálního způsobu volby retardačních časů τ_μ Kelvinova řetězce s ohledem na průběh retardačního spektra a složitost vyjádření funkce poddajnosti. Dále budou uvedena doporučení pro jednotlivé výše zmíněné modely dotvarování. Ve všech případech jsou retardační časy voleny v násobcích deseti.

Retardační spektrum pro popis základního dotvarování modelu B3 je rostoucí funkce, současně jeho předpis není komplikovaný a pro řád approximace $k = 2$ lze analyticky vyjádřit integrál při výpočtu tuhosti pružiny E_0 podle vztahu (4). Díky tomu stačí zařadit do Kelvinova řetězce jen minimální počet článků, které popíší reologické chování na kýženém časovém intervalu. Pokud jsou časy t_{min} a t_{max} spodní a horní hranicí tohoto intervalu, pak postačuje vytvořit řetězec, jehož nejkratší retardační čas bude $\tau_1 \leq 0.3t_{min}$ a nejdélší retardační čas $\tau_M \geq 0.5t_{max}$.

Retardační spektrum získané z funkce poddajnosti pro dotvarování spojené s vysycháním modelu B3 je na intervalu cca $(0, \tau_{sh})$ rostoucí a ve zbylé části klesající funkce. Proto není nutné do řetězce zařazovat členy, které mají vysoké retardační časy a pro které jsou hodnoty funkce $L(\tau)$ malé. Pro celkový popis funkce poddajnosti je dobré zařadit články s retardačními časy pokrývající interval od 10^{-3} dne do $100\tau_{sh}$. Protože pro tuhost elastické pružiny E_0 nebyl určen explicitní vzorec, musí být do řetězce zařazeny články s malými retardačními časy.

Spektra získaná z funkcí pro modely ACI a CEB mají podobný průběh jako spektrum pro dotvarování spojené s vysycháním modelu B3. Současně pro ně existuje vzorec pro výpočet tuhosti E_0 . Proto pro popis dotvarování je potřeba vytvořit řetězec s extrémními retardačními časy $\tau_1 \leq t_{min}$ a $\tau_M \geq t_{max}$, a současně τ_M nemusí být větší než cca 10.000 dní.

4. Závěr

V příspěvku bylo ukázáno, že pro stanovení parametrů Kelvinova řetězce může být kromě standardní metody nejmenších čtverců použita metoda využívající retardační spektrum. Výhoda této metody spočívá v tom, že pro určení tuhostí E_μ poskytuje explicitní vzorec. Ve všech zkoumaných případech (model B3 pro popis základního dotvarování a dotvarování spojeného s vysycháním, model ACI a model CEB) byly uvedeny postupy, kterými lze dosáhnout z inženýrského pohledu velmi dobré shody mezi approximovaným řešením funkce poddajnosti a řešením analytickým. Nejlepší shody bylo dosaženo pro nestárnoucí funkci poddajnosti pro popis základního dotvarování modelu B3, kdy relativní chyba oscilovala kolem nuly s amplitudou 0,3%. Pro model z normy ACI a pro model CEB je relativní chyba v oblasti před a za maximem retardačního spektra do 1% a v oblasti maxima retardačního spektra do 2,5%. Největší chyby je dosahováno při approximaci funkce poddajnosti popisující dotvarování spojené s vysycháním. Tato funkce má velmi komplikovaný tvar a navíc je závislá na mnoha parametrech. Proto bylo obtížné stanovit univerzální postup pro minimalizaci relativní chyby, která se v nejhorských případech pohybuje do 5%. Větší chyba vzniká jen tehdy, pokud dojde k zatížení již vyzrálého betonu; celkové dotvarování je pak ale téměř zanedbatelné. Ve všech případech byl z hlediska inženýrské přesnosti jako postačující shledán druhý řád approximace funkce retardačního spektra.

5. Reference

- Bažant, Z. P., Jirásek, M., 2010: *Creep and Hygrothermal Effects in Concrete Structures*. Springer, New York.
- Bažant, Z. P., Baweja, S., 2000: *Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3. Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage - Structural Design Effects*.
- Hilsdorf, Müller, 1996: *Structural Concrete, Textbook on Behaviour, Design and Performance. fib Bulletin Nr. 1*.

Committee 318, 2002: *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02)*. Portland Cement Association, Skokie, Illinois.