



International Conference

ENGINEERING MECHANICS 2010

Svratka, Czech Republic, May 10 – 13, 2010

SUBSTRUCTURE AND MACROELEMENTS IN THE DESIGN OF THE COMPOSITE LAYERED ELEMENTS

I. Eisner^{*}, I. Lizoň, M. Žmindák^{}**

Summary: *At the present time mainly FEM is used for numerical modelling of composite layered solids and structures. Using FEM, a significant amount of research has been devoted to the analysis of vibration and dynamics, buckling and postbuckling, failure and damage analysis and etc. The aim of the paper is derivation of macro-element and sub-structuring technique for analysis of layered solids with linear material behaviour. The elimination is performed by static condensation algorithm. Created program modules are implemented into Interactive Computing System FEM (ICS FEM).*

1. Úvod

V posledných rokoch vzrastajú požiadavky na plošné a priestorové sústavy. Cieľom je minimalizovať hmotnosť týchto konštrukcií a zvýšiť ich pevnosť a únosnosť. Jednou z možností je použiť vrstvené konštrukcie zložené z kompozitných materiálov. Kompozitné materiály predstavujú najúčinnnejšie využitie potenciálnych možností hmoty a energetických úspor nielen z hľadiska materiálu ale aj z hľadiska využívania konštrukcie. Vlastnosti kompozitov sú dané vlastnosťami svojich materiálových zložiek, ich objemovým podielom a geometriou vystuženia vzhľadom na k systému. V praxi sa najviac používajú viacvrstvé kompozity, ktoré sa skladajú z niekoľkých tenkých rôzne orientovaných jednosmerných lamín. Významnou vlastnosťou vláknových kompozitov je pomer ich vysokej pevnosti k hmotnosti. Ďalšou prednosťou týchto materiálov je možnosť vyrobiť materiál požadovaných mechanických vlastností v danom smere.

Všeobecne známa numerická metóda na riešenie kompozitných konštrukcií je Metóda konečných prvkov (MKP). Súčasný výskum v oblasti MKP sa orientuje hlavne na analýzu,

^{*} Igor Eisner: IPM Engineering, Sokolská 12; 960 01 Zvolen; tel: +421 45 536 6078, fax: +421 45 536 6078; e-mail: Eisner@ipmeng.sk

^{*} Ing. Ivan Lizoň: IPM Engineering, Sokolská 12; 960 01 Zvolen; tel: +421 45 536 6078, fax: +421 45 536 6078; e-mail: Lizon@ipmeng.sk

^{**} Prof. Ing. Milan Žmindák, PhD.: University of Žilina, Faculty of Mechanical Engineering; Department of Applied Mechanics.: tel: +421 41 513 2962, fax: +421 565 2940; e-mail: Milan.Zmindak@fstroj.uniza.sk

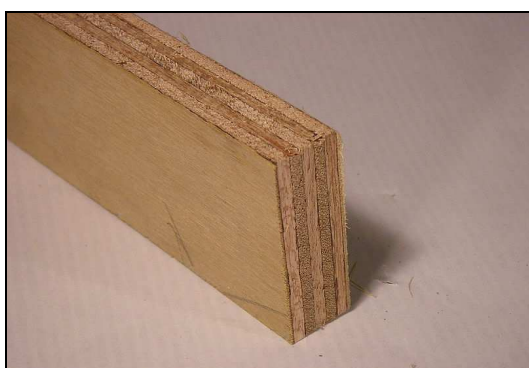
poškodzovanie a únavu kompozitných konštrukcií (Barbero, 2008). Ako alternatívna metóda na riešenie doskových a škrupinových konštrukcií je metóda hraničných prvkov (MHP) (Sládek 2002). Napriek veľkému úspechu metódy konečných prvkov (MKP) a MHP ako presných a výkonných numerických nástrojov pre riešenie okrajových alebo počiatočných okrajových problémov v oblastiach so zložitými tvarmi, stále vzrastá záujem o rozvíjanie nových pokročilých numerických metód. Ďaleko väčšiu pozornosť za posledné desaťročie získali bezsieťové metódy a to hlavne kvôli ich vysokej adaptívnosti a nízkych nárokoch na prípravu vstupných údajov pre numerické analýzy (Žmindák, 2006).

Cieľom tohto článku je odvodiť vrstvený makroprvok a postup subkonštrukcií pre analýzu vrstvených telies s lineárnym správaním sa materiálu. Vytvorené programové moduly sú potom implementované do interaktívneho výpočtového systému IVS MKP.

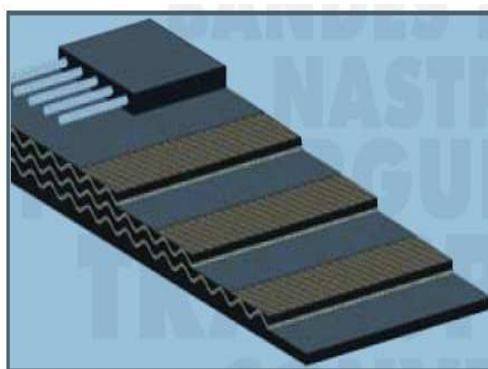
2. Vrstvené materiály

Typickými predstaviteľmi vrstvených materiálov, ktoré nám súčasná technológia umožňuje vytvárať sú:

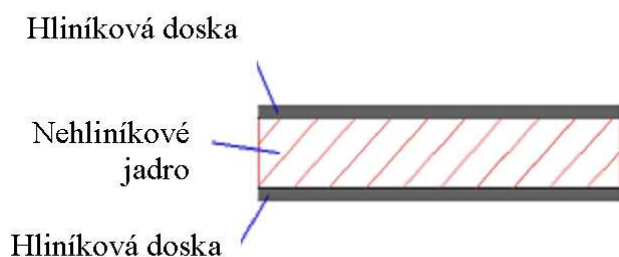
- drevené vrstvené konštrukcie, ako sú preglejky, obr. 1a
- gumené pásy vytvorené kombináciou gumy a tkaniny a pod. obr. 1b
- kombinácia hliníku a polyméru (v strednej vrstve), obr.1c
- lamináty a pod.



(a) drevený vrstvený materiál, preglejka



(b) gumený pás



(c) Kombinácia hliníku a iného materiálu

Obr.1. Príklady vrstvených materiálov

Poznamenajme, že vrstvené dosky na obr. 1c sú vyrábané na báze technológie celoplošného lepenia vo vákuovom lise.

Jednotlivé jeho vrstvy sú vytvárané z rôznych typov materiálov za účelom

- zvýšenia ich pevnosti
- splnenia funkčných a úžitkových parametrov
- zníženia hmotnosti konštrukcie ktorá je z vrstveného materiálu vytvorená.

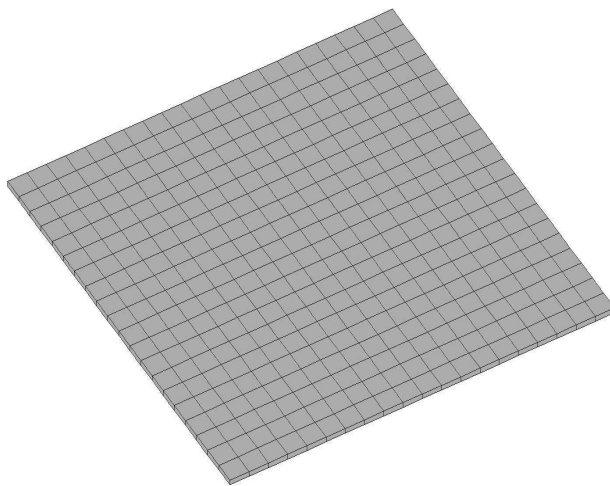
Jednotlivé vrstvy sú navzájom spájané rôznymi typmi lepidiel ktoré po vytvrdnutí získajú plnohodnotné materiálové vlastnosti z hľadiska pružnosti a pevnosti tak i z hľadiska odolnosti voči dynamickému namáhaniu.

V ďalšom odvodíme postup riešenia MKP použitím vrstvených prvkov. Ich úlohou je zohľadniť v jednom prvku materiálové vlastnosti jednotlivých vrstiev a väzbu medzi jednotlivými vrstvami.

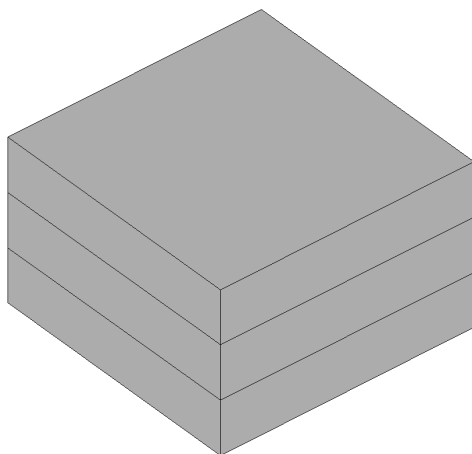
Na obr.2a je jednoduchá subkonštrukcia jednej vrstvy. Vrstvený prvok reprezentujúci makroprvok 1. úrovne je na obr. 2b a je vytvorený z troch subkonštrukcií, má osem uzlov s parametrami deformácií u , v a w , tak ako základný 8 uzlový telesový prvok. Vrstvený prvok Ω^p je súborom n makroprvkov (vrstiev) $\Omega_m^e, m=1, 2, \dots, n$. Preto môže byť jeho matica tuhosti $\mathbf{K}^p$ typu (N, N) stanovená známym adičným algoritmom (Kolář, 1979)

$$\mathbf{K}^e = \sum_{m=1}^n \bar{\mathbf{K}}_e^m \quad (1)$$

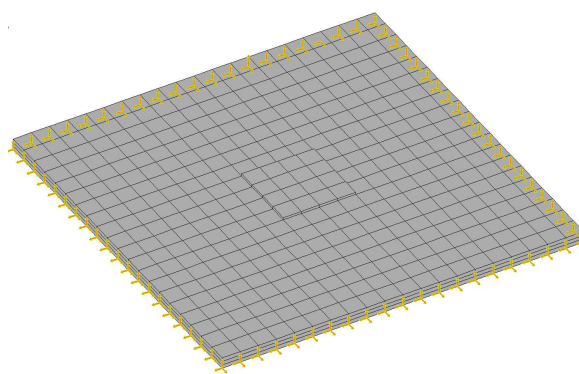
$\bar{\mathbf{K}}_e^m$ je lokálna matica tuhosti subkonštrukcie. Z jednotlivých makroprvkov sa potom zostaví matica tuhosti celej konštrukcie s uvažovaním príslušných okrajových podmienok. Na obr. 2c je príklad voľne podopretej dosky a výsledky jej riešenia budú uvedené v článku 6.



Obr. 2a. Subkonštrukcia jednej vrstvy



Obr.2b Vrstvený prvok reprezentujúci makroprvok 1. úrovne



Obr.2c Celá konštrukcia zložená z makroprvkov 1. úrovne

Obr. 2. Subkonštrukcia a makroprvok

3. Tvorba makroprvkov a eliminácia voľných uzlov.

Cieľom tejto časti je ukázať postup statickej kondenzácie (Bathe, 1996) ako účinného algoritmu pre tvorbu makroprvkov. Vychádzame z nasledovných rovníc rovnováhy

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2)$$

Ako voľné budeme označovať uzly, v ktorých nie je predpísaný ani posuv, ani zaťaženie. Spravidla nás posuvy týchto uzlov v prvej fáze riešenia nezaujímajú, takže ich z riešenia eliminujeme. Tým dosiahneme zmenšenie radu matice tuhosti, pre ktorú musíme nájsť inverznú maticu. To je pre veľké sústavy veľmi výhodné. Ak voľné uzly označíme indexom a , ostatné b a vo vektore posuvov ich zoradíme za sebou, prípadne preskupíme poradie prvkov vo vektoroch $\mathbf{i}$ v matici, potom rovnice rovnováhy vyjadríme pomocou submatic

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{Bmatrix} \quad (3)$$

kde $\mathbf{u}_a$ označuje stupne voľnosti, ktoré budú eliminované a $\mathbf{u}_b$ stupne voľnosti ktoré sú spojené s redukovanou maticou tuhosti. Riešením prvej submaticovej rovnice dostaneme

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{F}_a - \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \mathbf{u}_b \quad (4)$$

respektíve v skrátrenom tvare

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{C} - \mathbf{T} \mathbf{u}_b \quad (5)$$

kde

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{F}_a \quad (6)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \quad (7)$$

Dosadením (4) do druhej submaticovej rovnice v (3) dostaneme sústavu rovníc rovnováhy pre stupne voľnosti b

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} * \mathbf{u}_b \quad (8)$$

kde

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ba} \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \quad (9)$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_b - \mathbf{K}_{ba} \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{F}_a \quad (10)$$

respektíve

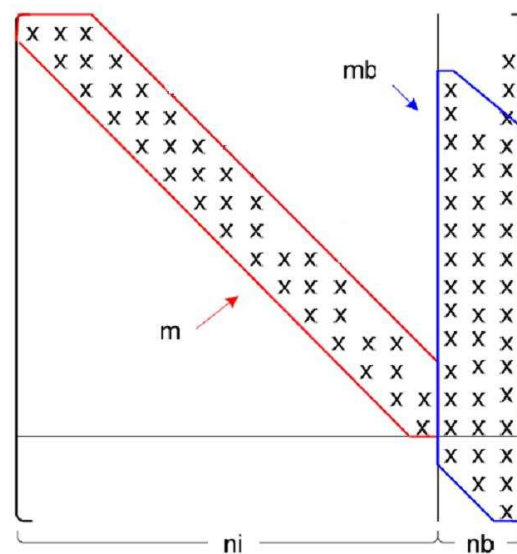
$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_b - \mathbf{K}_{ba} \mathbf{C} \quad (11)$$

Fyzikálne člen $\mathbf{K}_{ba} \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{F}_a$ označuje modifikáciu tuhosti následkom uvoľnenia stupňov voľnosti a .

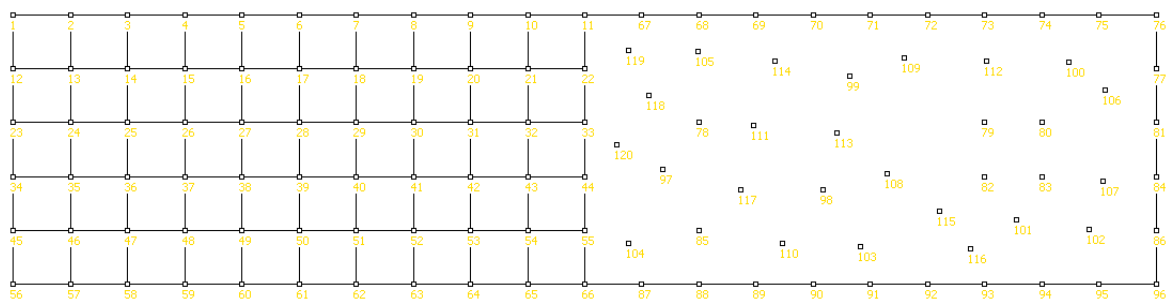
Nakoniec eliminovaním stupňov voľnosti matice tuhosti subkonštrukcie rádu $(n_i + n_b) \times (n_i + n_b)$ až po úroveň n_i získame maticu tuhosti makroprvku o rozmere $n_b \times n_b$ (obr.3).

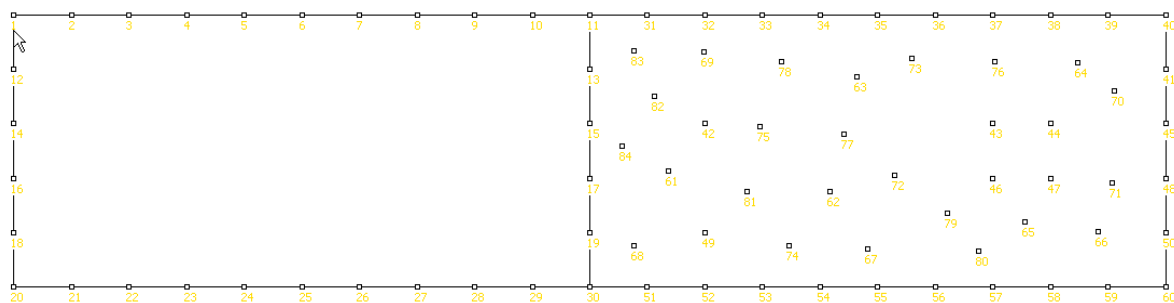
Celý postup riešenia sa zatiaľ vzťahuje iba na statické úlohy. Neskôr sa predpokladá rozšírenie tohto postupu aj pre riešenie úloh lineárnej dynamiky pomocou Guyanovej redukcie (Guyan, 1965).

Poznamenajme, že uvedený postup riešenia použitím subkonštrukcií a makroprvkov sa dá využiť i pri prepojení MKP a bezprvkových formulácií, kedy stupne voľnosti v uzloch na hranici oblasti vytvorenej z konečných prvkov a bezprvkových formulácie vytvárajú hranicu medzi dvomi časťami konštrukcie (obr.4).



Obr. 3 Rozmiestnenie nenulových členov v matici tuhosti subkonštrukcie





Obr.4. Príklad prepojenia makroprvku vytvoreného MKP a oblasti vytvorenej metódou hraničných prvkov

4. Implementácia postupu do programového systému IVS MKP

Implementáciu nových programových modulov do IVS MKP môžeme rozdeliť do troch skupín

1. Zadávanie informácií o novej konštrukcii a ich prezentácia v grafickej forme.
2. Vlastný postup tvorby subkonštrukcií a makroprvkov.
3. Prezentácia výsledkov na úrovni subkonštrukcií a makroprvkov v numerickej a grafickej forme

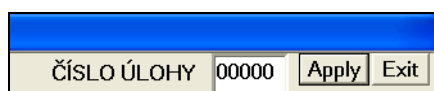
Vrstvené prvky môžeme vytvárať zo všetkých prvkov, ktoré v súčasnosti knižnica IVS MKP obsahuje. Sú to:

- 3D prut, 3D nosník, rovinné prvky, prvky priestorovej napätosti, škrupinové prvky
- kontaktné prvky

Použiť môžeme nasledovné materiálové modely vrstvených prvkov.

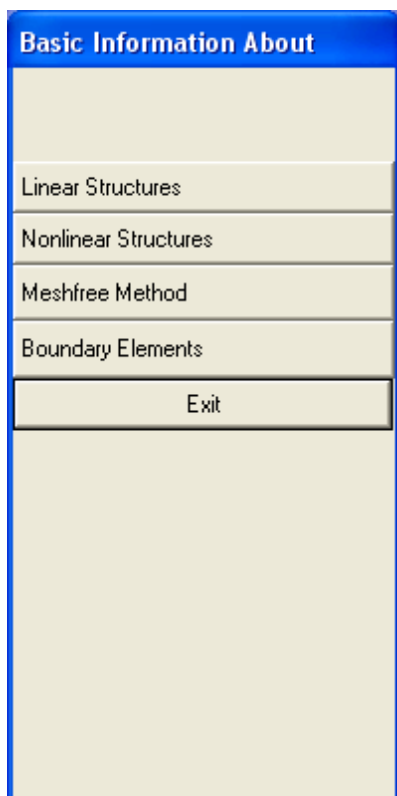
- Lineárne elastický izotropný,
- lineárne elastický ortotropný,
- termoelastický,
- Drucker Pragerov model,
- elastoplastický s izotropným spevňovaním,
- elastoplastický s kinematickým spevňovaním,
- nestlačiteľný Mooney Rivlinov model.

Významnú časť systému IVS, ktorý nám umožňuje riešiť úlohy pomocou subkonštrukcií je štruktúra dátových súborov. Dátové súbory majú vo všeobecnosti nasledovnú štruktúru: A00000.dat. Prvý znak je písmeno abecedy za ktorým nasleduje 5 znakov reprezentujúcich číslo úlohy (obr.5).

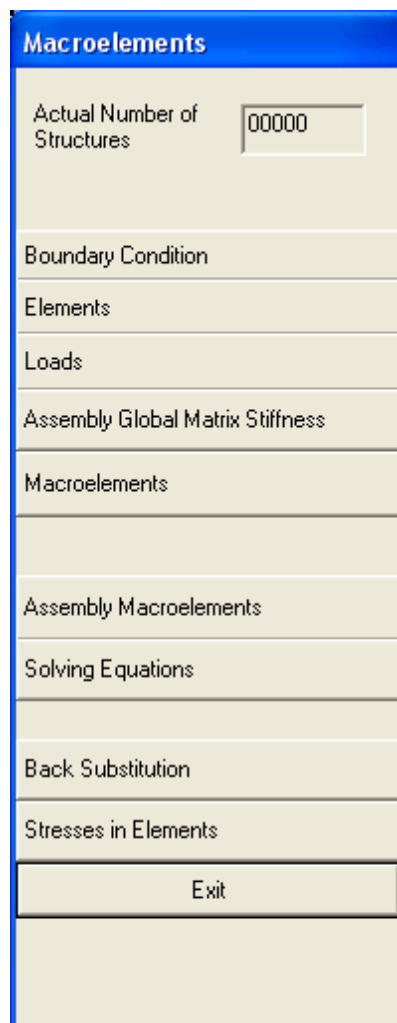


Obr.5. Nastavenie čísla subkonštrukcie

Prvý číselný znak označuje číslo konštrukčnej skupiny. Za ním nasledujúce dvojčíslo označuje číslo úrovne v konštrukčnej skupine. Posledné dva číselné znaky označujú počet subkonštrukcií v príslušnej konštrukčnej skupine. Jednotlivé typy dátových súborov sú stručne popísané v časti, kde sa vytvárajú.



Obr.6. Menu pre voľbu metódy riešenia úlohy



Obr.7. Menu pre vytváranie makroprvkov (krok po kroku)

Menu pre voľbu metódy riešenia úlohy (obr.6) a menu pre vytváranie makroprvkov (obr.7). V ďalšom podrobnejšie opíšeme voľby z obr. 7:

a) *okrajové podmienky*

Boundary Condition

Program načítava pole X00000.DAT a z neho vytvára súbor I00000.DAT . V ktorom sú zapísané pre každý uzol kódové čísla (čísla stupňov voľnosti), so zohľadnením čísel uzlov makroprvku.

b) Prvky

Elements

Prvky implementované v IVS MKP sa môžu v subkonštrukcii objaviť aj viackrát. V tomto prípade hovoríme o skupine prvkov. Skupinu prvkov môžeme vytvoriť z akéhokoľvek hore uvedeného prvku. Poznamenajme, že v príklade uvedenom v čl. 6 sa použila jedna skupina prvkov, ktorá obsahuje prvok priestorovej napätosti.

Programové moduly príslušných prvkov vytvárajú lokálnu maticu tuhosti a lokálnu maticu hmotnosti konštrukcie – subkonštrukcie. Okrem toho sa vypočítajú lokálne vektory zaťaženia pôsobiace na prvok. Tieto zaťaženia sú vypočítané v smere globálnych osí subkonštrukcie. Sú to napríklad zaťaženia od teploty, od vlastnej hmotnosti prvku, plošného, resp. objemového zaťaženia.

c) zaťaženie

Loads

Programový modul, ktorý načítava osamelé zaťaženia, ktoré pôsobia v jednotlivých uzloch konštrukcie.

d) načítavanie subkonštrukcií

Assembly Macroelements

Tento modul načítava na základe kódových čísel celkovú maticu tuhosti, hmotnosti a vektor pravej strany konštrukcie (subkonštrukcie), ktorý zodpovedá zaťaženiu konštrukcie.

e) eliminácia vnútorných stupňov voľnosti

Macroelements

Programový modul eliminuje vnútorné stupne voľnosti konštrukcie. Tento proces popísaný v bodoch 1 - 5 sa cyklicky opakuje pre všetky subkonštrukcie daného makroprvku.

f) Načítavanie makroelementov

Assembly Macroelements

Z jednotlivých makroelementov načítava celkovú maticu tuhosti subkonštrukcie vyššej úrovne, alebo celej konštrukcie.

g) riešenie sústavy rovníc vytvorenej z makroelementov

Solving Equations

Po načítaní celkovej matice tuhosti konštrukcie, a jej pravej strany riešime sústavu rovníc. Výsledkom sú deformácie konštrukcie na hranici medzi príslušnými makroprvkami.

h) spätná substitúcia

Back Substitution

Z vypočítaných deformácií na hraniciach medzi makroprvkami sú pre každú subkonštrukciu vybrané na základe kódových čísel deformácie a z predeliminovaných matíc tuhosti

subkonštrukcií vytvorené v bode e) sú dopočítané spätnou substitúciou deformácie vo vnútorných uzloch každej subkonštrukcie

i) výpočet napätí v základných prvkoch každej subkonštrukcie

Stresses in Elements

Z vypočítaných deformácií sú počítané napätia v každej skupine prvkov každej subkonštrukcie.

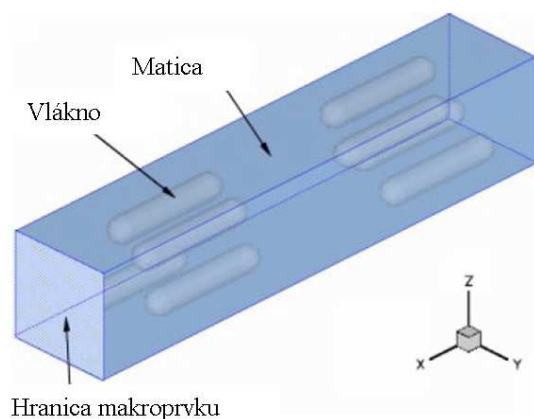
5. Praktické aplikácie

Pri praktickej aplikácii horeuvedenej teórie je možné postupovať dvomi spôsobmi:

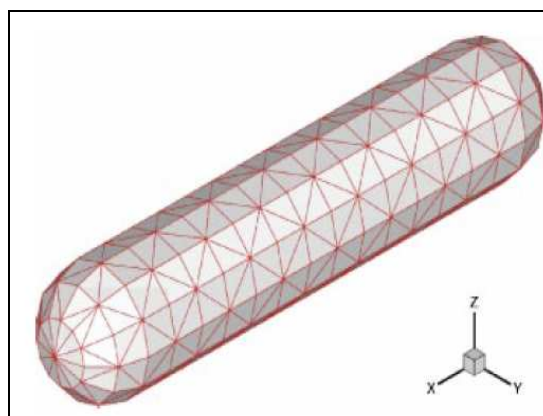
- horeuvedené vzťahy spracovať do programovej formy s využívaním algoritmov pre maticovú inverziu, násobenie matíc. Teda s využitím maticových formulácií, alebo
- využiť vhodný algoritmus na riešenie veľkých sústav lineárnych algebraických rovníc.

So zameraním sa na vlastnosti matice sústavy, ktorá je pozitívne definitná, symetrická a pásová, pričom zohľadňuje riedkosť matice sústavy.

Z popísaného postupu riešenia vyplýva, že vytvárané makroprvky sú s inými spájané prostredníctvom stupňov voľnosti na jeho hranici. Takto vytvorenú oblasť je možné na tejto hranici spojiť s inou oblasťou vytvorenou prostredníctvom inej numerickej metódy, ako je MKP napr. bezprvkovými formuláciami, ako je MHP, metóda MLPG a pod. (Sládek, 2007). Príklad modelu takto riešenej oblasti je na obr. 8. (Liu, 2005). Na obr. 9 je ukážka modelu matrice vytvoreného pomocou MHP. Sieť MHP vytvorená na krátkom vlákne obsahuje 456 hraničných prvkov. Stupne voľnosti, kde je vytvorené prepojenie medzi oboma metódami, je na hranici medzi krátkymi vláknami a modelom. Stupne voľnosti oblasti vytvorenej MKP a ležia v priestore medzi vonkajšími plochami kvádra a povrchmi jednotlivých krátkych vlákien, sú (obr.8) eliminované horeuvedeným postupom.



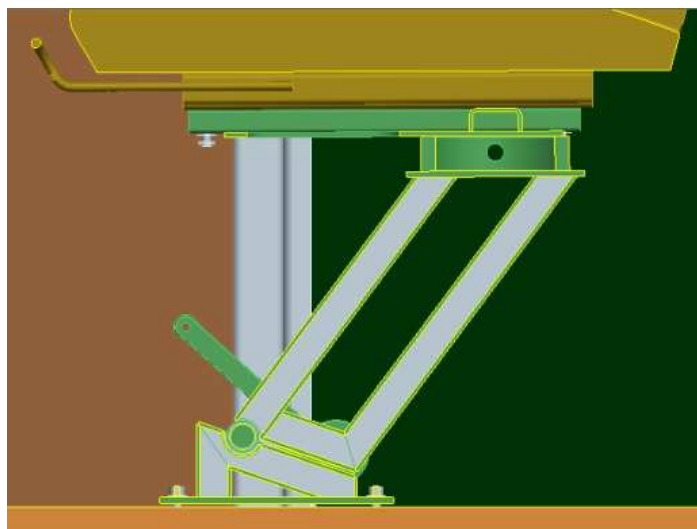
Obr. 8. Krátke vlákna a matrica



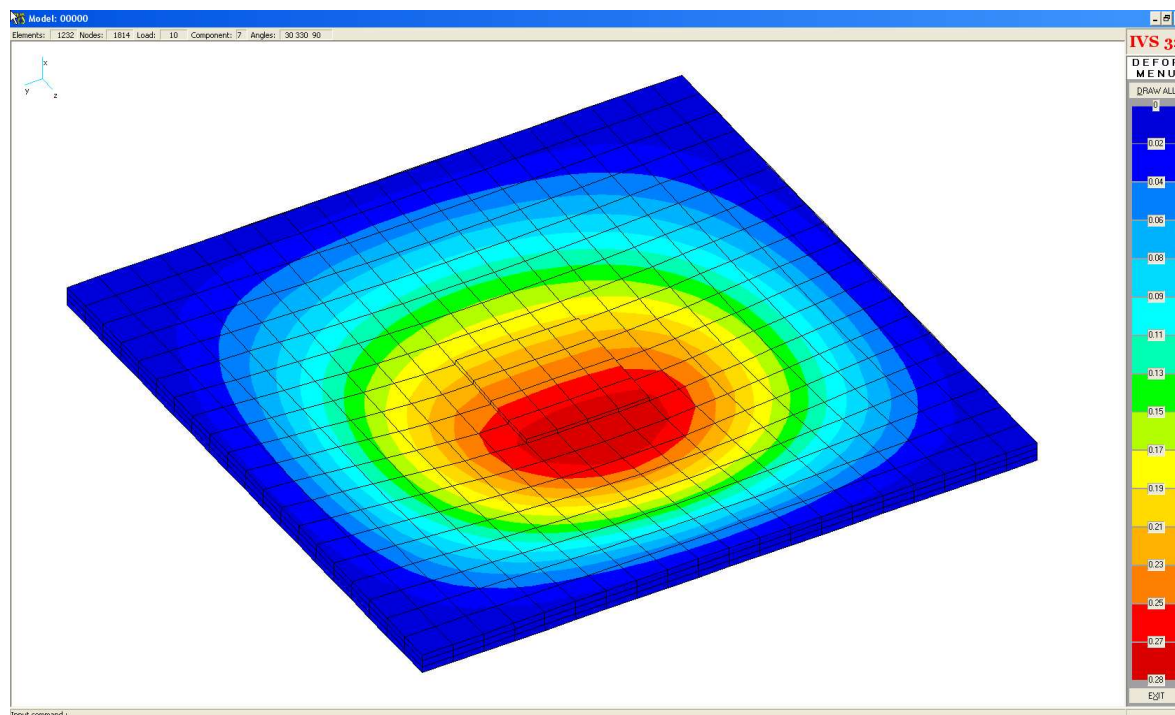
Obr.9. Sieť MHP

Praktická aplikácia reprezentuje uchytenie stoličky na obr. 10 o jednoduchú vrstvenú dosku o rozmeroch 1000 x 1000 x 24 mm. Materiál dosky je preglejka vytvorená z troch vrstiev.

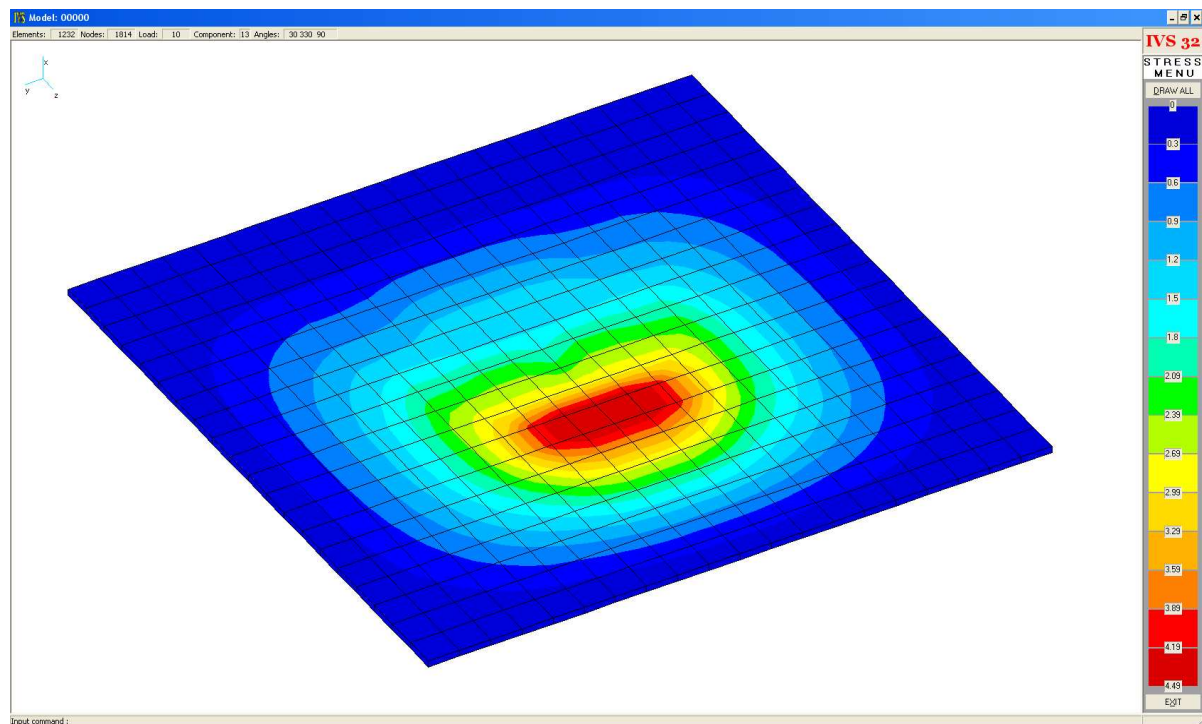
Numerický model konštrukcie bol vytvorený z makroprvkov 1.úrovne a makroprvok má rozmer 20 x 20 x 24 mm. Každá vrstva pozostáva zo smrekového dreva, ktorého vlákna majú v každej vrstve svoj smer natočený o 45° . Na povrchu a spodnej časti dosky je uložený kovový štvorec, ktorý je priskrutkovaný o dosku. Makroprvok bol vytvorený zo subkonštrukcie na obr.2a. Úloha bola riešená s konečnými prvkami priestorovej napätosti s lineárnym anizotropným materiálovým modelom. Kovová doska bola vytvorená zo základných prvkov priestorovej napätosti. Súčasne bola táto úloha riešená ako 1 konštrukcia vytvorená zo základných prvkov ako celok. Výsledky oboch riešení sa zhodujú a sú uvedené na obr. 11. až obr.14.



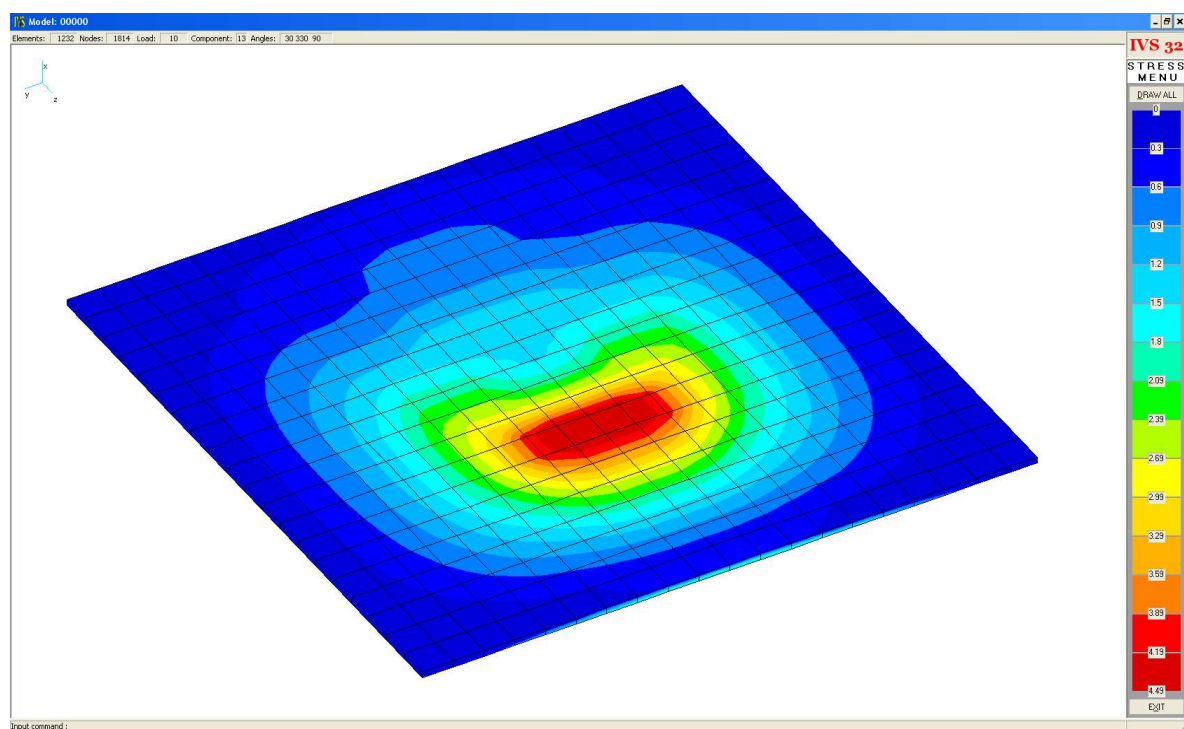
Obr. 10. Uchytenie stoličky o dosku



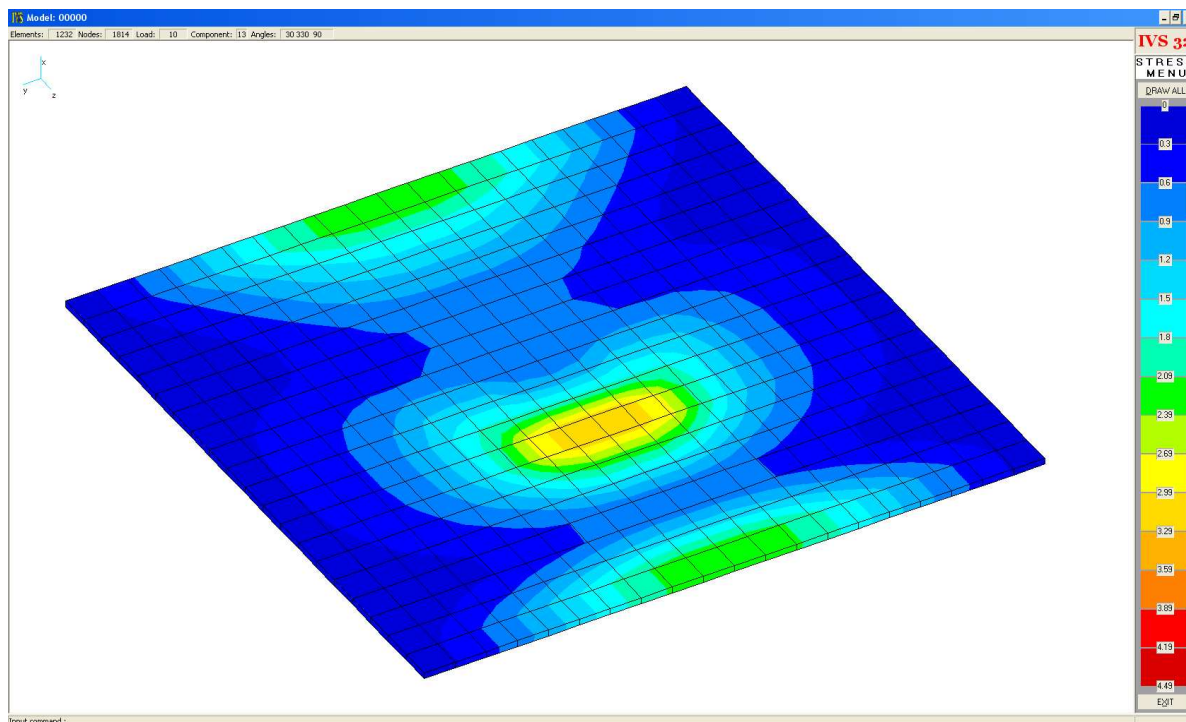
Obr.11 Pribeh deformácií vo vrstvenej doske, deformácie sú v [mm]



Obr.12 Pribeh von Misesových napätí vo vrchnej vrstve (napätia sú v MPa).



Obr.13 Pribeh von Misesových napätí v strednej vrstve



Obr.14 Priebeh von Misesových napätí v spodnej vrstve

6. Záver

V tomto príspevku sa venujeme riešeniu vrstvených prvkov MKP použitím makroprvkov a subkonštrukcií. Tento postup umožňuje vytvárať prvky kompozitných materiálov so zohľadnením rôznorodosti materiálových vlastností, materiálových modelov a vmestkov, ktoré môžu byť do časti konštrukcie umiestnené na základe teórie pravdepodobnosti ich výskytu v použitom materiáli, ktoré sú uvádzané v materiálových vlastnostiach príslušného kompozitného materiálu. Kompozitný prvok zložený z viacerých subkonštrukcií môže obsahovať i spevňovacie vlákna, ktoré môžu mať obecné rôznorodé materiálové vlastnosti pri aplikácii vhodných materiálových modelov. Na základe takto vytvorenej zložitej štruktúry je možné vytvoriť kompozitný prvok, ktorý má vnútorne niekoľko 10 000 stupňov voľnosti, ale vo svojej konečnej podobe vzhľadom na okolité prvky celej konštrukcie vystupuje ako napr. štvoruholníková škrupina s 24 stupňami voľnosti. 6 stupňov voľnosti v každom uzle. Takýto prístup k riešeniu v podstate stiera doterajšiu najväčšiu nevýhodu metódy konečných prvkov čo sa týka veľkého počtu neznámych parametrov deformácií, pri riešení takto náročných úloh ako predstavujú kompozitné materiály a ich štruktúra.

V ďalšom riešení sa predpokladá prepojenie konštrukčných oblastí riešených MKP s MHP a vybranými bezprvkovými formuláciami. To umožní využiť výhody viacerých numerických metód pri riešení tvarovo a materiálovo náročných konštrukcií.

7. PodĎakovanie

Autori tohto príspevku ďakujú Agentúre na podporu vedy a techniky (APVV) za finančnú podporu projektov APVV-0169-07, "Simulácia porušovania dynamicky zaťažených škrupinových konštrukcií zložených z kompozitných materiálov, a APVV-0143-04,

Numerická simulácia porušovania únosnosti konštrukcií v oblasti veľkých deformácií a plasticity materiálu s viactelesovým kontaktom na základe bezpečnostných predpisov.

8. Literatúra

Barbero, E.J. (2008) *Finite element Analysis of Composite Materials*, CRC Press Taylor & Francis Group.

Bathe, K.J. (1996) *Finite element procedures.*, Prentice-Hall.

Guyan, R.J. (1965) „Reduction of Stiffness and Mass Matrices“, *AIAA Journal*, Volume 3, Number 2, pp. 380.

Kolář V. a kol. (1979) *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metódou konečných prvků*, SNTL.

Liu Y.J., Nishimura N.(2005) A Fast Boundary Element Method for the Analysis of Fiber-Reinforced Composites Based on a Rigid-Inclusion Model, *Journal of Applied Mechanics*.

Sládek, J., Sládek, V., Zhang, Ch. (2007): Thick functionally graded plates and shells analyzed by a meshless method, In: *Proc of conference Computational modelling and experiments of Composite materials wit micro and nano-structure* (V. Kompiš eds.), Liptovský Mikuláš.

Žmindák, M., Novák, P., Melicher, R. (2006) New Continuum Formulations for Modelling of Fiber Reinforced Composites. *Machine Dynamics Problems*, Warsaw University of Technology, Vol. 30, No 4, 2006, pp. 103-111.