



NAJNOVŠIE POSTUPY PRI IMPLEMENTÁCIÍ A RIEŠENÍ PLNE- VIAZANÝCH TERMOMECHANICKÝCH ÚLOH METÓDOU KONEČNÝCH PRVKOV – 64 BITOVÁ VERZIA PROGRAMU

L. Écsi*, P. Élesztős *

Summary: *In this paper the latest advances in fully coupled thermal-structural analysis of a deformable body is presented using the finite element method. The analysis is based on an improved variational formulation of conservation of energy with convective heat transfer. The model employs the updated Lagrange formulation for large deformations/large strains. It also uses the extended NoIHKH material model for cyclic plasticity of metals and the Jaumann objective rate in the form of the Green-Naghdi objective rate utilizing the Rodriguez formula in the Cauchy stress update calculation. Numerical experiment using a notched low carbon steel bar in cyclic tension will be presented and briefly discussed too.*

1. Úvod

Numerické simulácie hrajú čoraz väčšiu úlohu pri návrhu konštrukcií rôznych zariadení ako aj pri zdokonaľovaní technologických procesov a postupov. Ich význam ešte viacej narastá, keď tieto zariadenia sú prevádzkované alebo spomenuté technologické procesy a postupy sú realizované pri vyšších teplotách. V článku sa prezentujú najnovšie výsledky pri riešení plne viazaných termo-mechanických úloh využitím novej variačnej formulácie prvého zákona termodynamiky (Écsi & Élesztős, 2009) a rozšíreného NoIHKH materiálového modelu (Écsi & Élesztős, 2008) s vnútorným tlmením (Écsi & Élesztős, 2008) pre cyklickú plasticitu kovov.

2. Teoretické pozadie úlohy

V predkladanej práci sme predpokladali že deformácie poddajného telesa, idealizovaného ako nepolárneho kontinua, sú konečné. Pri odvodení variačnej formulácie zákona zachovania energie (Écsi & Élesztős, 2009) striktne sme sa držali základných princípov termodynamiky a pracovali sme iba s osvedčenými a experimentálne overenými fyzikálnymi veličinami. Pri zohľadnení rôznych disipačných procesov sme sa nesnažili o úplnosť opisu, t.j. nebrali sme do úvahy tie procesy, ktoré doteraz nemajú jasnú formuláciu, hoci sa môžu odohrávať v materiáli pri deformácii. Využitím upravenej Lagrangeovej formulácie pre veľké pretvorenia/veľké posunutia základné rovnice opisujúce správanie sa telesa, t.j. zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania energie môžeme opísať s nasledovnými variačnými

* Ing. Ladislav Écsi, PhD., Prof. Ing. Pavel Élesztős, PhD.: Ústav aplikovanej mechaniky a mechatroniky, Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita v Bratislave; Námestie slobody 17; 812 31 Bratislava 1; tel.: +421.257 296 345, fax: +421.252 497 890; e-mail: ladislav.ecsi@stuba.sk

rovniciami (Écsi & Élesztős, 2009).

$$\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dv = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} ds, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta T \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\Omega} \delta T (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) dv + \int_{\Omega} (\nabla \delta T) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dv + \int_{\Omega} \delta T \rho c \dot{T} dv - \int_{\Omega} (\nabla \delta T) \cdot \mathbf{q} dv = \\ = \int_{\Omega} \delta T \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\Omega} \delta T \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\partial\Omega} \delta T q_n ds + \int_{\Omega} \delta T r dv, \end{aligned} \quad (2)$$

kde $\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot (\nabla T)$ a $\mathbf{K}$ je tenzor tepelnej vodivosti. V rovniciach (1),(2) $\mathbf{v}, T$ sú vektor rýchlosti a teplota $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}$ značia Cauchyho tenzor napätia a tenzor rýchlosti pretvorenia a symboly $\mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{q}, q_n, r, c, \rho$ reprezentujú vektor objemových síl, vektor povrchových síl, vektor tepelného toku, normálový tepelný tok, zdroj tepla na jednotku objemu, špecifickú tepelnú kapacitu a hustotu materiálu. Keď si berieme do úvahy podobnosť medzi paralelne zapojenou pružinou a viskóznym tlmičom a kontinuum, kde sila v pružine/v tlmiči je úmerná relatívnemu osovému posunutiu/osovej rýchlosti koncov pružiny, ko-rotovaný Cauchyho tenzor napätia s vnútorným tlmením môžeme opísať nasledovnými rovnicami (Écsi & Élesztős, 2009; Écsi & Élesztős, 2008):

$${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el} + {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{damp}, \quad (3)$$

kde

$${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el} = \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el} + {}^n\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el}, \quad (4)$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el} = \Delta t {}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbb{C}}^{\nabla J} : \left({}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{d}} - {}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{d}}^{th} \right), \text{ pri elastickom zaťažení/odľahčení} \quad (5)$$

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el} = \Delta t {}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbb{C}}^{\nabla J} : \left({}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{d}} - {}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{d}}^{th} - {}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{d}}^{pl} \right), \text{ pri plastickom zaťažení} \quad (6)$$

$${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{damp} = {}^{n+1}\hat{\mathbb{C}}^{\nabla Jdamp} : {}^{n+1}\hat{\mathbf{d}}, \quad (7)$$

$${}^0\mathbb{C}^{\nabla J} = 2G\mathbb{I} + \lambda(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (8)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbb{C}}_{abcd}^{\nabla J} = \frac{1}{{}^{n+\frac{1}{2}}J} {}^{n+\frac{1}{2}}R_{ma} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}R_{nb} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}R_{oc} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}R_{pd} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{mi} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{nj} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{ok} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{pl} \cdot {}^0\mathbb{C}_{ijkl}^{\nabla J}, \quad (9)$$

$${}^0\mathbb{C}^{\nabla Jdamp} = 2G^{damp}\mathbb{I} + \lambda^{damp}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad G^{damp} = \frac{E^{damp}}{2(1+\nu^{damp})}, \quad \lambda^{damp} = \frac{\nu^{damp} E^{damp}}{(1+\nu^{damp})(1-2\nu^{damp})}, \quad (10)$$

$${}^{n+1}\hat{\mathbb{C}}_{abcd}^{\nabla Jdamp} = \frac{1}{{}^{n+1}J} {}^{n+1}R_{ma} \cdot {}^{n+1}R_{nb} \cdot {}^{n+1}R_{oc} \cdot {}^{n+1}R_{pd} \cdot {}^{n+1}F_{mi} \cdot {}^{n+1}F_{nj} \cdot {}^{n+1}F_{ok} \cdot {}^{n+1}F_{pl} \cdot {}^0\mathbb{C}_{ijkl}^{\nabla Jdamp}. \quad (11)$$

Analogicky ako v elasto-plasticite s malými pretvoreniami (Écsi & Élesztős, 2008; Écsi & Élesztős, 2008), v materiálovom modeli s vnútorným tlmením pre veľké pretvorenia/veľké posunutia ko-rotovaný Cauchyho tenzor napätia $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$, (3) rozkladáme na elastickú časť $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{el}$, (4) a na viskóznú časť $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{damp}$, (7). Prírastok elastickej časti ko-rotovaného Cauchyho

tenzora napätia $\Delta \hat{\mathbf{G}}^{el}$ definujeme rovnicou (5) pri elastickom zaťažení/odľahčení alebo rovnicou (6) pri plastickom zaťažení. Pri výpočte napätia (3)-(7), sme použili Jaumannovu objektívnu rýchlosť v tvare Green-Naghdi-ovej objektívnej rýchlosti využitím nasledovných tenzorov rotácie,

$${}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{R} = \exp \left[\frac{\Delta t}{2} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{W} \right] \cdot {}^n\mathbf{R}, \quad (12)$$

$${}^{n+1}\mathbf{R} = \exp \left[\Delta t \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}\mathbf{W} \right] \cdot {}^n\mathbf{R}, \quad (13)$$

ktoré pri numerickej implementácii boli vyjadrené pomocou Rodrigueзовho vzorca (Simo & Hughes, 1998), kde $\mathbf{W}$ symbolizuje vírový tenzor. V rovniciach (3)-(11) a (17) ľavé horné indexy $n, n+1/2, n+1$ značia hodnoty fyzikálnych veličín v diskrétnych časoch, ktoré zodpovedajú predchádzajúcej, strednej a okamžitej konfigurácii telesa v priebehu aktuálneho časového kroku Δt . Pri riešení úlohy sme predpokladali, že materiál v počiatočnej konfigurácii je izotropný a uvažovali sme s aditívnym rozkladom $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}^{el} + \hat{\mathbf{d}}^{pl} + \hat{\mathbf{d}}^{th}$ ko-rotovaného tenzora rýchlosti pretvorenia $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{R}$ na elastickú časť $\hat{\mathbf{d}}^{el}$, na plastickú časť $\hat{\mathbf{d}}^{pl}$ a na termálnu časť $\hat{\mathbf{d}}^{th} = \alpha \dot{T} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \alpha \dot{T} \mathbf{I}$, kde α je koeficient tepelnej rozťažnosti, $\dot{T}$ je zmena teploty za jednotku času a $\mathbf{R}$ je rotačný tenzor druhého rádu (12)-(13). V tejto práci sme uvažovali Saint Venant-Kirchhoffový materiálový model (Bonet & Wood, 1997), ktorého elastický materiálový tenzor štvrtého rádu ${}^0\mathbb{C}^{VJ}$ v počiatočnej konfigurácii telesa môžeme vyjadriť rovnicou (8). V rovnici G a λ označujú modul pružnosti v šmyku a Lamého konštantu, $\mathbb{I}, \mathbf{I}$ sú jednotkové tenzory štvrtého a druhého rádu a ν, E sú Poissonovo číslo a modul pružnosti v ťahu. Materiálový tenzor vnútorného tlmenia ${}^0\mathbb{C}^{VJdamp}$ v počiatočnej konfigurácii je formálne rovnako definovaný (10), ako elastický materiálový tenzor pomocou dvoch nezávislých premenných ν^{damp}, E^{damp} , čo zaručuje izotropiu. Aby sme mohli použiť tieto tenzory na výpočet ko-rotovaného Cauchyho tenzora napätia, bolo ich potrebné pretransformovať do strednej a okamžitej konfigurácie telesa v rámci aktuálneho časového kroku a následne ich pootočiť pomocou rovníc (9) a (11). V týchto vzorcoch $\mathbf{F}$ značí gradient deformácie a $J = \det(\mathbf{F})$ je jeho determinant. Rovnice (3)-(13) boli doplnené nasledovnými konštitutívnymi a evolučnými rovnicami:

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_y - R \leq 0, \quad (14)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} (\hat{\mathbf{\Sigma}} - \hat{\mathbf{X}}) : (\hat{\mathbf{\Sigma}} - \hat{\mathbf{X}})}, \quad (15)$$

$$R = Q \left(1 - e^{(-b\varepsilon^{pl})} \right), \quad (16)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}\dot{\hat{\mathbf{X}}} = {}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbb{C}}^{VJcycl} : \hat{\mathbf{d}}^{pl} - \gamma(\varepsilon^{pl}) {}^{n+1}\hat{\mathbf{X}} \dot{\varepsilon}^{pl}; \quad tr(\hat{\mathbf{X}}) = 0, \quad (17)$$

$$\gamma(\varepsilon^{pl}) = \gamma_{\infty} - (\gamma_{\infty} - \gamma_0) e^{(-\omega \varepsilon^{pl})}, \quad (18)$$

$${}^0\mathbb{C}^{\nabla J_{cycl}} = 2G^{cycl}\mathbb{I} + \lambda^{cycl}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad G^{cycl} = \frac{E^{cycl}}{2(1+\nu^{cycl})}, \quad \lambda^{cycl} = \frac{\nu^{cycl}E^{cycl}}{(1+\nu^{cycl})(1-2\nu^{cycl})}, \quad (19)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}\hat{\mathbb{C}}_{abcd}^{\nabla J_{cycl}} = \frac{1}{{}^{n+\frac{1}{2}}J} {}^{n+\frac{1}{2}}R_{ma} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}R_{nb} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}R_{oc} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}R_{pd} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{mi} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{nj} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{ok} \cdot {}^{n+\frac{1}{2}}F_{pl} \cdot {}^0\mathbb{C}_{ijkl}^{\nabla J_{cycl}}. \quad (20)$$

Matematické formulácie (14)-(18) definujú plochu plasticity, evolučnú rovnicu rozšíreného NoIHKH materiálového modelu pre cyklickú plasticitu kovov (Écsi, 2006). Pri odvodení elasto-plastického materiálového tenzora sme využili teóriu asociatívnej plasticity, kde NoIH pravidlo pre izotropné spevnenie a NoKH pravidlo pre kinematické spevnenie boli definované rovnicami (16) a (17). Symboly $\hat{\Sigma}$, $\hat{\mathbf{X}}$, ε^{pl} , $\dot{\varepsilon}^{pl}$ značia deviatorickú časť ko-rotovaného Cauchyho tenzora napätia, ko-rotovaný backstress tenzor, akumulované plastické pretvorenie a rýchlosť akumulovaného plastického pretvorenia. Zvyšné symboly reprezentujú konštantné materiálové parametre. Materiálový tenzor štvrtého rádu pre cyklickú plasticitu ${}^0\mathbb{C}^{\nabla J_{cycl}}$ v počiatočnej konfigurácii telesa je formálne rovnako definovaný ako elastický materiálový tenzor pomocou dvoch nezávislých veličín čo zaručuje izotropiu. Aby sme mohli použiť tento tenzor na výpočet ko-rotovaného Cauchyho tenzora napätia, bolo ho potrebné pretransformovať do strednej konfigurácie telesa v rámci aktuálneho časového kroku a následne ho pootočiť pomocou rovnice (20).

Pri deformácii určité množstvo dodanej mechanickej energie sa premení na teplo. Určenie časti rozptýlenej energie, ktorá sa nevratne premení na teplo, predstavuje zložitý experimentálny problém. V tejto práci sme predpokladali, že tento podiel sa pohybuje okolo 80%, potom sme definovali zdroj tepla na jednotku objemu nasledovne

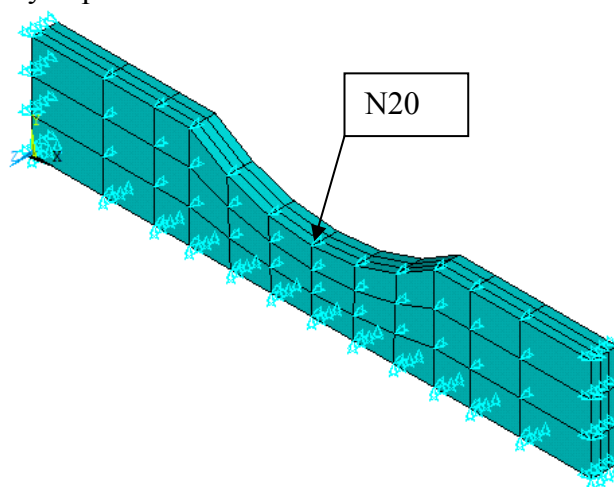
$$r = 0.8\sigma^{el} : \mathbf{d}^{pl} + 0.8\sigma^{damp} : \mathbf{d}. \quad (21)$$

V rovnici (21) prvý člen na pravej strane definuje plastický ohrev a druhý člen je ohrev spôsobený vnútorným tlmením.

3. Numerický príklad

Matematický model sme testovali na tyči s vrubom, ktorá bola zaťažovaná cyklickým ťahom. Obidva konce tyče boli votknuté, pričom jedno votknutie bolo pevné, a druhé vykonalo predpísaný posuv v smere pozdĺžnej osi tyče, definovaný pomocou funkcie sínus a lineárne sa meniacou amplitúdou v štádiu rozbehu v trvaní prvých päť cyklov, ktorá sa nakoniec ustálila na konštantných predvolených hodnotách 1.1/0.5/0.2 mm v štádiu ustálenej prevádzky. V numerickom experimente sme realizovali 10 cyklov s konštantnou uhlovou rýchlosťou 188.5 rad·s⁻¹, ktorej prislúchala 30.0 Hz kruhová frekvencia. Rýchlosť a zrýchlenie pohybujúceho sa konca vzorky sme definovali ako prvú a druhú časovú deriváciu predpísaného osového posuvu. Vzorka na začiatku simulácie bola v pokoji a mala počiatočnú teplotou 0.0 °C. Pri riešení úlohy sa uvažovalo s prestupom tepla cez všetky vonkajšie povrchy telesa s koeficientom prestupu $h = 50.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ a nulovou teplotou okolia. Výpočet bol realizovaný ako nestacionárno-dynamický s časovým krokom 0.000347 s, ktorému zodpovedá 3.75° uhlový prírastok. Ako materiál vzorky sme uvažovali oceľ s nízkym obsahom uhlíka, avšak vzhľadom na to, že nie všetky materiálové parametre použitého modelu boli identifikované meraním, niektoré z nich musíme považovať za informatívne. Tabuľka 1 obsahuje použité materiálové vlastnosti, ktoré ako zjednodušenie

sme predpokladali za konštantné. Pri príprave modelu sme využili dve roviny symetrie a modelovali sme iba štvrtinu telesa. Na obrázku 1 je znázornený model vzorky s vyznačením predpísaných posuvov.



Obr.1 Priestorovo diskretizovaná geometria vzorky

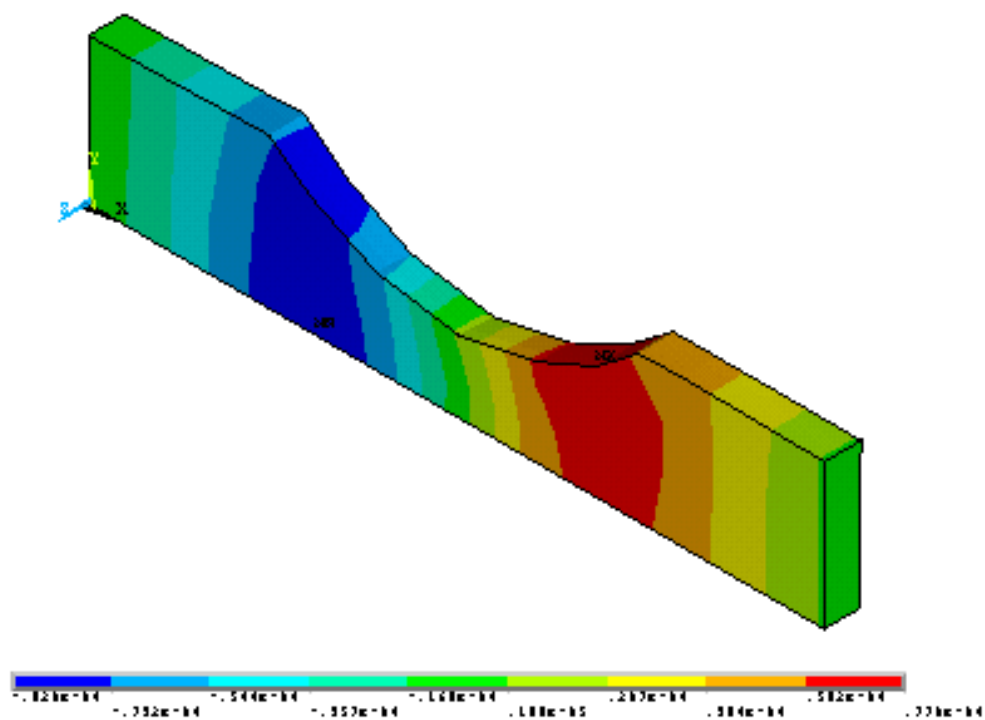
Tab. 1: Materiálové vlastnosti

E [Pa]	$2.1 \cdot 10^{11}$
E^{cycl} [Pa]	$2.1 \cdot 10^5$
E^{damp} [Pa · s]	$2.1 \cdot 10^7$
$\nu = \nu^{cycl} = \nu^{damp}$ [-]	0.3
σ_y [Pa]	$350.0 \cdot 10^6$
Q [Pa]	$150.0 \cdot 10^6$
b [-]	3.0
γ_∞ [-]	0.001
γ_0 [-]	0.002
ω [-]	10.0
ρ [kg/m ³]	7800.0
c [J/kg · K]	500.0
$k_{xx} = k_{yy} = k_{zz}$ [W/m · K]	45.0
$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$ [K ⁻¹]	0.0000126
h [W/m ² · K]	50.0

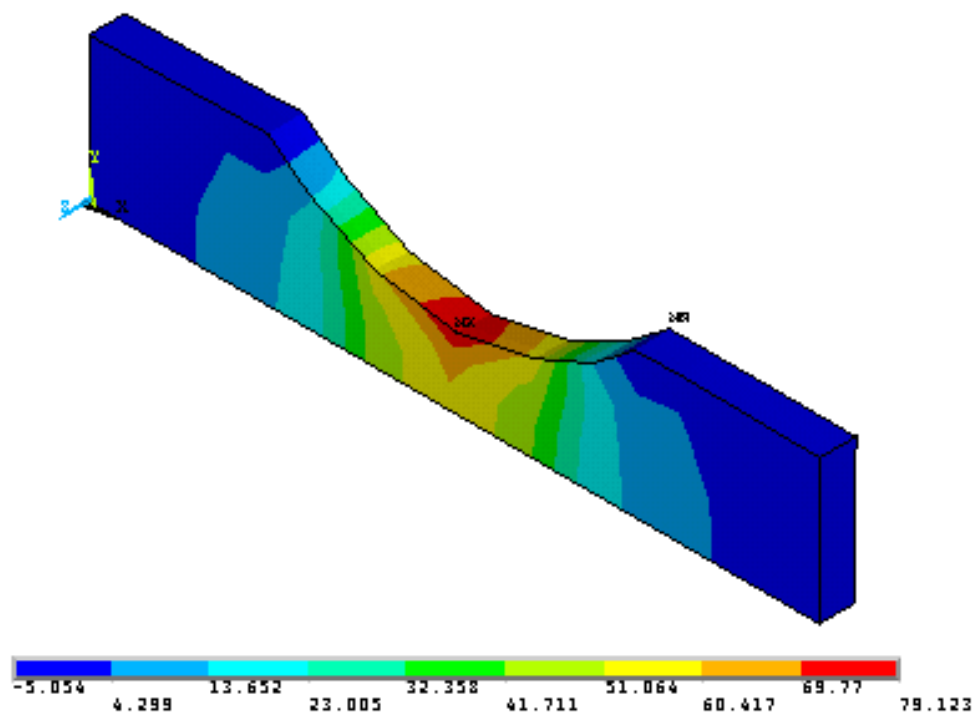
4. Numerické výsledky

Na obrázkoch 2-6 sú znázornené vybrané výsledky, a to priebeh posunutí v osovom smere, priebeh teploty, priebeh Von Misesovho napätia a priebeh akumulovaného plastického pretvorenia v poslednom časovom kroku na konci, t.j. v desiatom zaťažovacom cykle numerického experimentu korešpondujúceho výpočtu s 1.1 mm maximálnou predpísanou amplitúdou pohyblivého konca vzorky. Z obrázkov je dobre vidieť, že v priebehu experimentu vzorka sa výrazne plasticky deformovala, pričom hodnota akumulovanej plastickej

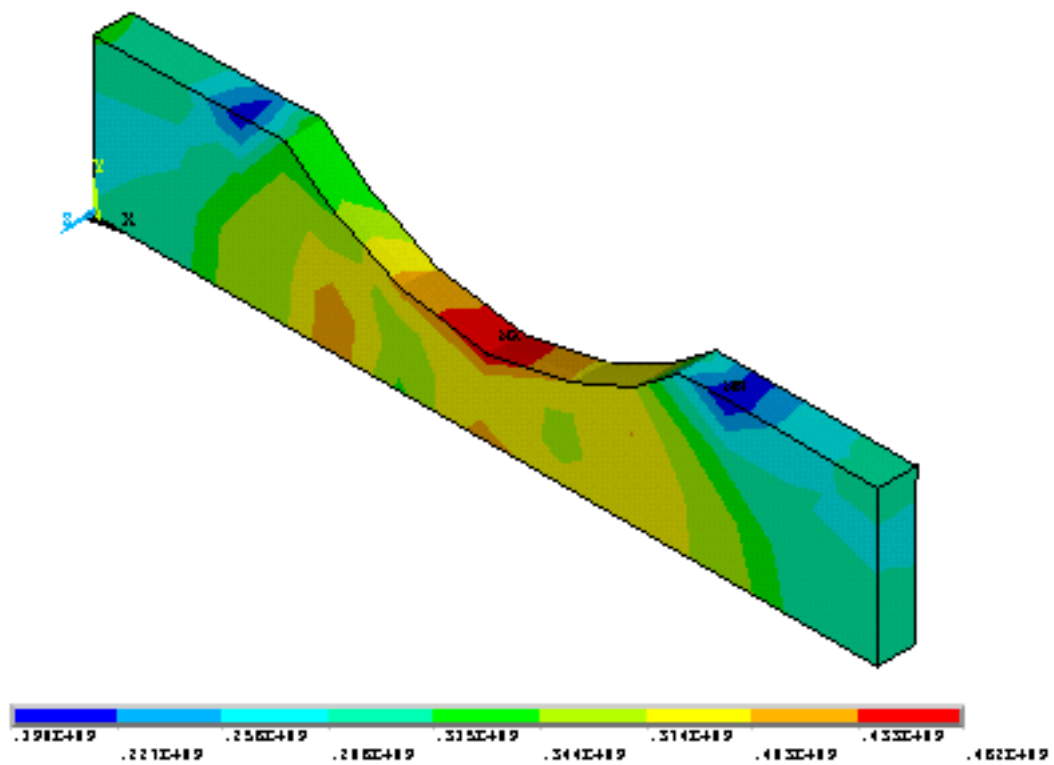
deformácie dosiahla hodnotu až 70%, následkom čoho veľké množstvo mechanickej energie sa nevratne premenilo na teplo. Tento plastický ohrev vyvolal lokálny nárast teploty vzorky, ktorej maximálna hodnota dosiahla až 80.0 °C.



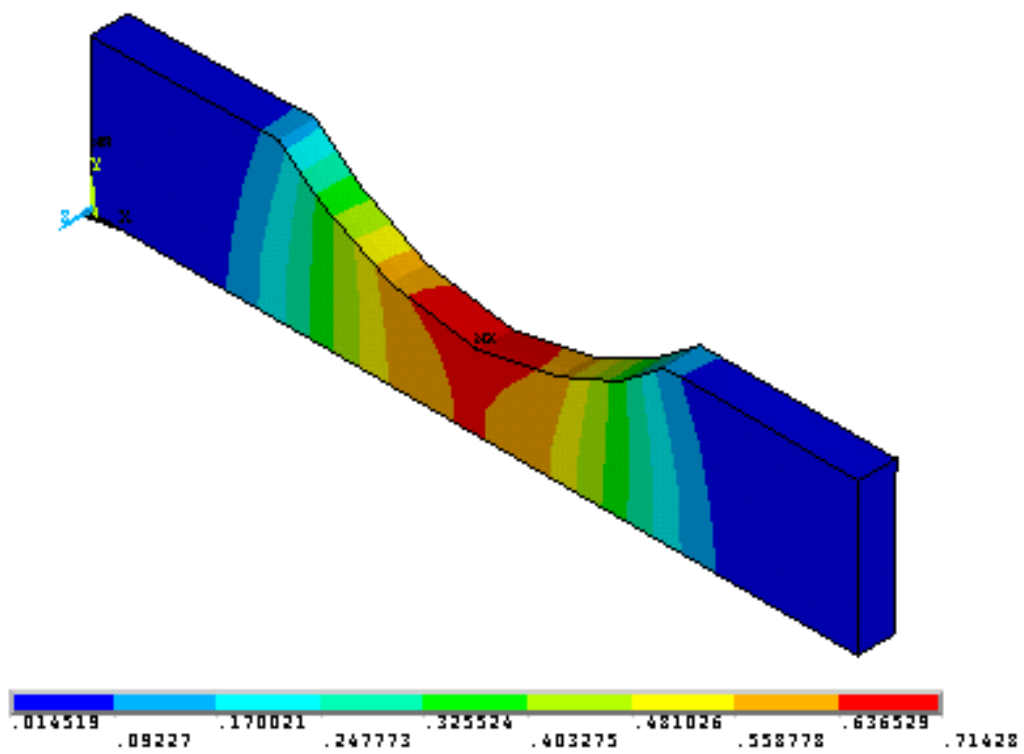
Obr.2 Priebeh posunutí v osovom smere [m]



Obr.3 Priebeh teploty [°C]



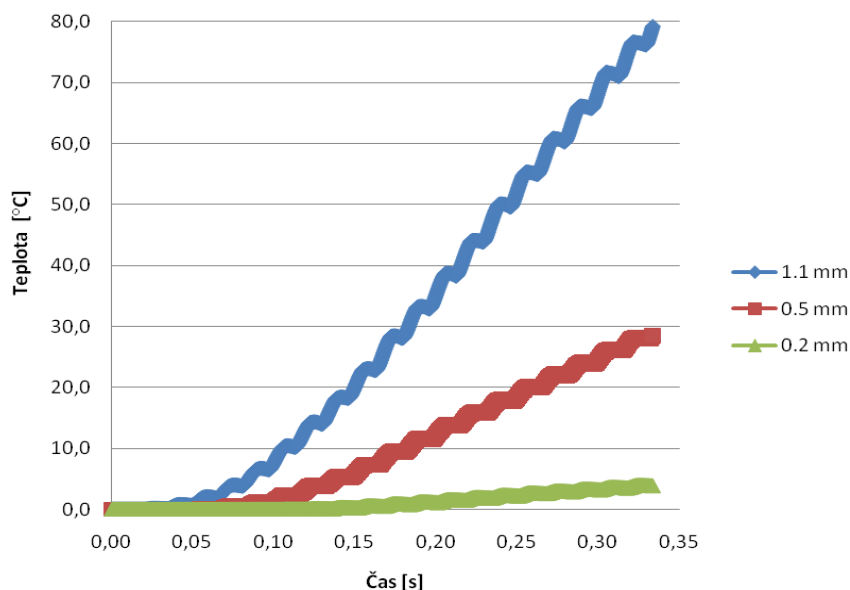
Obr.4 Priebeh Von Misesovho napätia [Pa]



Obr.5 Priebeh akumulovaného plastického pretvorenia $[-]$

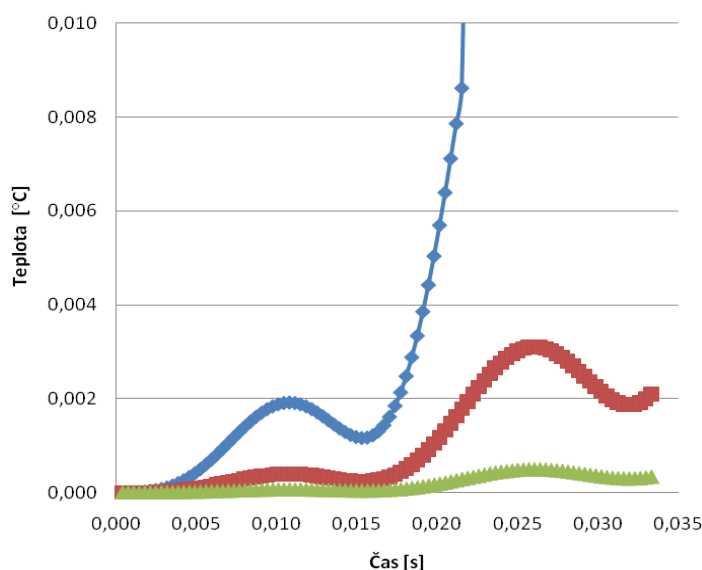
S cieľom hlbšie skúmať správanie sa modelovanej tyče na obrázkoch 6 až 10 boli vykreslené niektoré charakteristické krivky materiálu vo vybranom mieste v okolí uzla N20 v strede vonkajšieho povrchu zúženého prierezu (krčka) vzorky. Tieto krivky odpovedajú trom rôznym výpočtom, a to 1.1/0.5/0.2 mm-ou predpísanou amplitúdou (v štádiu ustálenej prevádzky) pohybujúceho sa konca telesa. Pozri obr. 1 pre určenie polohy uzla N20. Tieto charakteristiky znázorňujú časový priebeh teploty, časový priebeh teploty v prvom cykle, priebeh osového napätia na osovom posunutí, priebeh teploty na osovom posunutí a priebeh akumulovaného plastického pretvorenia na čase.

Zmena teploty na čase

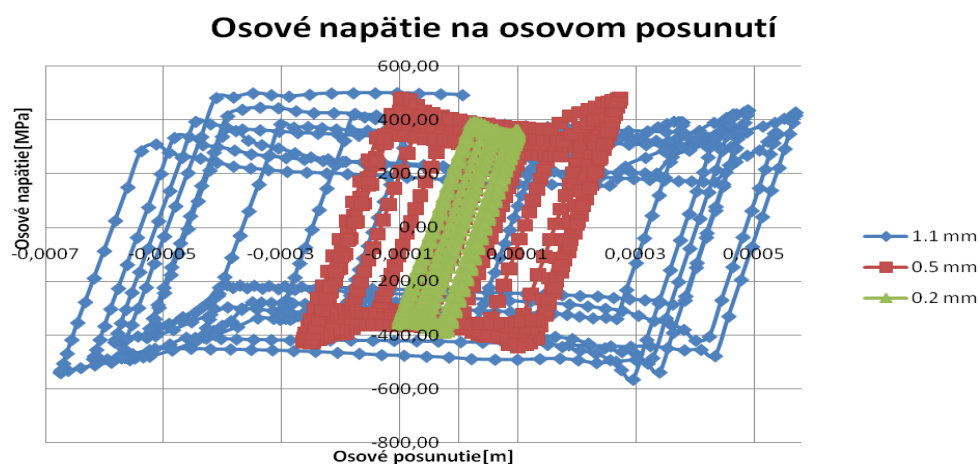


Obr.6 Časový priebeh teploty

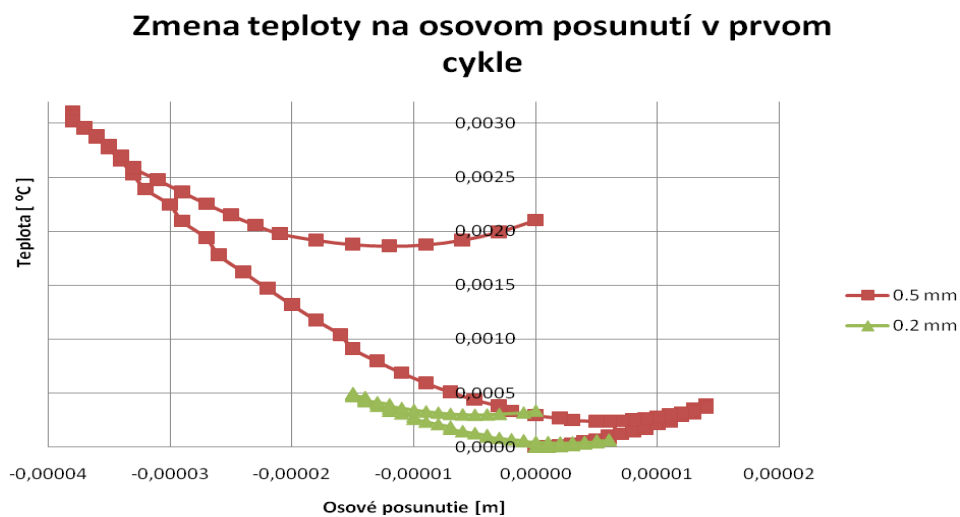
Zmena teploty na čase v prvom cykle



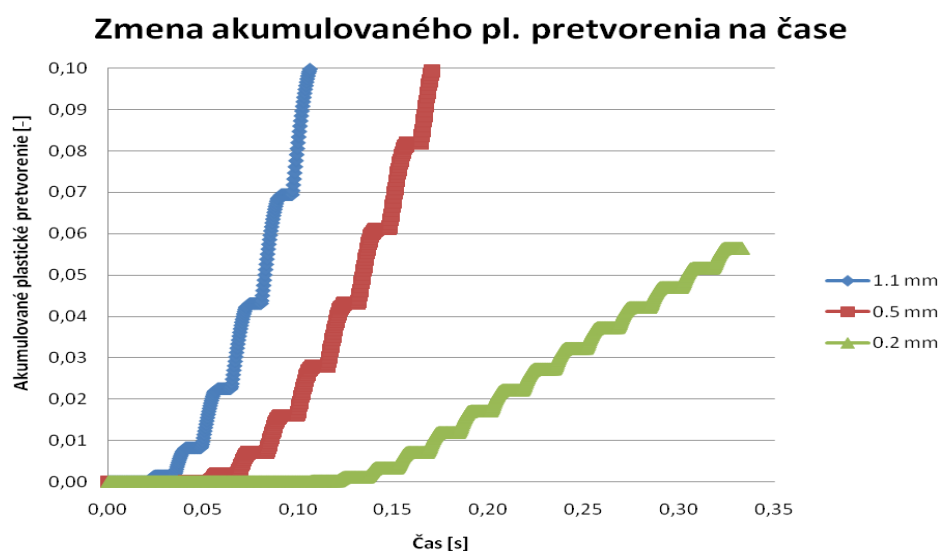
Obr.7 Časový priebeh teploty v prvom zaťažovacom cykle



Obr.8 Pribeh osového napätia na osovom posunutí



Obr.9 Pribeh teploty na osovom posunutí v prvom zaťažovacom cykle



Obr.10 Pribeh akumulovaného plastického pretvorenia na čase

Z vyššie uvedených obrázkov opäť môžeme konštatovať, že narastajúcou amplitúdou narastá tiež množstvo rozptýlenej energie ako i vnútorné tlmenie materiálu. Priebeh teploty na osovom posunutí, (obr. 9), naznačuje, že teplota telesa narastá pri zaťažení v oboch smeroch, a to v tlaku i v ťahu, pričom klesá pri odľahčení, avšak úvrat' na tejto krivke, t.j. nárast teploty po predošlom poklese nastáva skôr, ako vzorka nadobúda svoj počiatočný dĺžkový rozmer pri odľahčení, čo je zrejme zapríčinené vnútorným tlmením materiálu.

5. Záver

V predkladanej práci na numerickom príklade sme prezentovali naše najnovšie výsledky získané pri riešení plne viazaných termo-mechanických úloh metódou konečných prvkov využitím novej variačnej formulácie prvého zákona termodynamiky (Écsi & Élesztős, 2009) a rozšíreného NoIHKH materiálového modelu (Écsi & Élesztős, 2008) s vnútorným tlmením (Écsi & Élesztős, 2008) pre cyklickú plasticitu kovov. Úlohu sme formulovali pomocou upraveného Lagrangeovho opisu pre veľké deformácie a veľké pretvorenia. Pri výpočte Cauchyho napätia sme využili Jaumannovu objektívnu rýchlosť. Plastický a vnútorným tlmením zapríčinený ohrev sme modelovali cez zdroj tepla, kde sme predpokladali, že 80.0% rozptýlenej mechanickej energie sa premení na teplo. Dosiahnuté výsledky sú veľmi podobné dostupným, v odbornej literatúre publikovaným výsledkom, čo autori považujú za veľmi pozitívne, avšak ani jedna publikácia doteraz neobsahovala okrajové a počiatočné podmienky vhodné na detailnú verifikáciu navrhnutého modelu. Hlbšie štúdium je možné uskutočniť len realizáciou náročných experimentov.

6. PodĎakovanie

Autori ďakujú za finančnú podporu z VEGA grantov č. 1/0488/09 a 1/0051/10.

7. Použitá literatúra

- Écsi, L. & Élesztős, P. (2009) Constitutive equation with internal damping for materials under cyclic and dynamic loadings using a fully coupled thermal-structural finite element analysis, *International Journal of Multiphysics*, 3, 2, pp. 155-165.
- Écsi, L. & Élesztős, P. (2008) Constitutive equation with internal damping for materials under dynamic and cyclic loadings, in: *Proc. 46th Int.Conf. on Experimental Stress Analysis, EAN 2008*, Horní Bečva, pp. 51-54.
- Écsi, L. & Élesztős, P. (2008) Trying to model the thermo-mechanical behaviour of a solid body under cyclic loading using a material model with internal damping, *Acta Mechanica Slovaca*, 12, 3-B, pp. 143-150.
- Simo, J.C. & Hughes, T.J.R. (1998) *Computational inelasticity*, Springer, NY.
- Bonet, J. & Wood, R. D. (1997) *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Écsi, L. (2006) Extended NOIHKH model usage for cyclic plasticity of metals, *Engineering mechanics*, 13, 2, pp. 83-92.