

ANALYTICAL SOLUTION OF INVERSE TASK FOR ROBOT WITH SIXTH ROTATIONAL JOINTS AND ITS CONCRETE UTILIZATION

V. Záda, A. Chatraie, D. Lindr^{*}

Summary: *This paper presents an analytical solution inverse problem of industrial robot manipulator with sixth degree of freedom. Analytical solution is much better than numerical one, because it enables to compute internal coordinates in a short time. This fact is used for more precise computation of the trajectory, firstly the motion on abscissas, circles or general curves. Then it is presented a control algorithm, which uses kinematical equation.*

1. Úvod

V případě potřeby vytvořit vlastní řídicí systém robota je bezpodmínečně nutné zvládnout dostatečně přesně kinematiku a dynamiku robota. Do této situace se dostali autoři příspěvku při úloze realizovat řídicí systém robotu KUKA, jehož původní systém se nenávratně poškodil (shořel). Jako jeden z prvních kroků je nutno realizovat tzv. přímou a z ní inverzní úlohu pro daný robot. U robotů se čtyřmi, resp. pěti stupni volnosti jde o úlohy poměrně snadno řešitelné. U robota se šesti stupni volnosti je však inverzní úloha obtížně řešitelná a vyžaduje značnou matematickou erudici. Podaří-li se inverzní úlohu zvládnout, lze pokračovat v řešení celé řady navazujících úloh, které souvisí s plánováním a programováním robota po předem stanovených trajektoriích a dále s možností regulace přesnosti pohybu po těchto trajektoriích. Regulaci přesnosti pohybu robotů nelze obejít. Roboty projevují výraznou tendenci k odchylkám od předepsaných drah dílčích členů, naopak aplikace vyžadují vysokou přesnost polohování ramen robotů.

2. Přímá úloha kinematiky

Existuje řada metod popisu kinematiky složitých mechanických systémů. Připomeňme např. metody využívající tenzorového počtu, kvaternionů, spinorů či exponenciálních matic. Každý přístup má své výhody i nedostatky. V tomto příspěvku použijeme klasických maticových metod, neboť jsou dostatečně účinné a přehledné. Nejznámější maticová metoda vychází z definice pravotočivých souřadných soustav každého kinematického členu robota dle Denavit-Hartenberg, která pochází již z padesátých let minulého století a našla velmi dobré uplatnění právě v robotice. Jiné přístupy jsou této metodě ekvivalentní a nepředstavují žádný zásadní přínos, neboť co umí jedna, umí i druhá, ale jinými prostředky.

^{*} Doc. Ing. Mgr. Václav Záda, CSc., Ing. Abbas Chatraie, Ing. David Lindr: Ústav mechatroniky a inženýrské informatiky, Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií, Technická univerzita v Liberci; Studentská 2; 461 17 Liberec 1; tel.: +420.485 353 289, e-mail: vaclav.zada@tul.cz

Přestože je uvedená metoda velmi dobře známá, provedeme velmi stručný úvod do této metody. Po zavedení příslušných souřadných soustav se získá transformační matice typu 4×4 , kde poslední řádek je tvořen třemi nulami a jednou jedničkou – tzv. homogenní matice. Vynásobením všech matic obdržíme matici transformace ze souřadného systému chapadla robota do souřadného systému pracoviště. V případě robota se šesti stupni volnosti tedy získáme zobrazení $F: Q \rightarrow X$, pro $Q \subset \mathbb{R}^6$, $X \subset \mathbb{R}^6$. Zde množina Q představuje prostor všech možných uspořádaných šestic vnitřních (zobecněných, kloubových) souřadnic, X značí množinu všech dosažitelných poloh a orientací chapadla, resp. koncového nástroje robota. Označíme-li elementy množiny X znakem $\mathbf{x}$ a elementy množiny Q znakem $\mathbf{q}$, lze přímou úlohu popsat kinematickou rovnicí $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}$. Tedy ke každému $\mathbf{q} \in Q$ nalezneme jedinou možnou polohu a orientaci $\mathbf{x} \in X$.

Nyní ukážeme konkrétní řešení robota KUKA. Příslušnou transformační matici ze souřadného systému chapadla do souřadného systému pracoviště označíme standardně

$$\mathbf{A}_6^0 = \mathbf{A}_6^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \dots \mathbf{A}_6^5(q_6) \quad (1)$$

kde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)$ je vektor vnitřních (strojových) souřadnic. Matici $\mathbf{A}_6^0$ budeme v dalším značit pro jednoduchost písmenem A bez indexů. Uvedená matice má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Pro jednotlivé prvky matice A bylo nalezeno

$$\begin{aligned} A_{11} &= c_1 c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) - c_1 s_{23} s_5 c_6 \\ A_{12} &= -c_1 c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) + c_1 s_{23} s_5 s_6 \\ A_{13} &= c_1 c_{23} c_4 s_5 + s_1 s_4 s_5 + c_1 s_{23} c_5 \\ A_{14} &= c_1 c_{23} c_4 s_5 d_6 + s_1 s_4 s_5 d_6 + c_1 s_{23} (c_5 d_6 + d_4) + c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2 + a_1) \\ A_{21} &= s_1 c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ A_{22} &= -s_1 c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ A_{23} &= s_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_4 s_5 + s_1 s_{23} c_5 \\ A_{24} &= s_1 c_{23} c_4 s_5 d_6 - c_1 s_4 s_5 d_6 + s_1 s_{23} (c_5 d_6 + d_4) + s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2 + a_1) \\ A_{31} &= s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_{23} s_5 c_6 \\ A_{32} &= -s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 s_6 \\ A_{33} &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\ A_{34} &= s_{23} c_4 s_5 d_6 - c_{23} (c_5 d_6 + d_4) + a_3 s_{23} + a_2 s_2 + d_1 \end{aligned} \quad (3)$$

kde bylo použito označení

$$s_i = \sin q_i, \quad c_i = \cos q_i, \quad \text{pro } i=1,2,\dots,6$$

$$s_{23} = \sin(q_2 + q_3), \quad c_{23} = \cos(q_2 + q_3),$$

a_i a d_i jsou nenulové konstrukční parametry robota (konstanty).

3. Inverzní úloha kinematiky

Zabývejme se inverzní úlohou. Ta spočívá v hledání vektoru $\mathbf{q}$ ze známé polohy a orientace chapadla, což dále značíme $\mathbf{x}$. V souvislosti s předešlým textem jde o řešení rovnice $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}$ pro zadané $\mathbf{x}$. Je-li úloha dobře postavena, je zobrazení $\mathbf{F}$ surjektivní, tj. $\mathbf{F}(Q)=X$, kde $\mathbf{F}(Q)=\{\mathbf{x} \in X; \exists \mathbf{q} \in Q: \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}\}$, takže pro každé $\mathbf{x} \in X$ lze nalézt alespoň jedno $\mathbf{q} \in Q$ splňující rovnici $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}$. Problém pak spočívá v nalezení množin, kde:

1. řešení existuje právě jedno (Jacobián zobrazení je nenulový),
2. existuje více než jedno řešení (Jacobián je roven nule).

Formálně lze v 1. případě psát $\mathbf{q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$, avšak skutečný výpočet je značně komplikovaný, neboť jde o řešení šesti výrazně nelineárních transcendentních rovnic o šesti neznámých $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)$. Rovnice obsahují součty mnoha součinů goniometrických funkcí a jejich analytické, či numerické, řešení je značně problematické. Protínají-li se alespoň dvě poslední osy robota v jednom bodě, lze ukázat, že analytické řešení vždy existuje. Analytické řešení velmi výrazně urychluje veškeré výpočty, neboť vlastní numerické hodnoty se získají řešením poměrně triviálních rovnic, jak brzy uvidíme. Naproti tomu čistě numerické řešení vede k zdoluhavým postupům, které často znemožňují dostatečně přesné řízení robota v reálném čase. Pro numerické řešení lze využít jednak metody řešení soustav nelineárních rovnic, jako lepší se obvykle ukazuje, transformovat rovnice do jediného nezáporného funkcionálu a dále aplikovat vhodné metody matematického programování (nejjednodušeji gradientní metody). V námi řešeném případě se poslední tři osy protínají v jednom bodě, proto analytické řešení lze určit.

Přistupme k analytickému řešení inverzní úlohy robotiky. První tři složky A_{11}, A_{21}, A_{31} prvního sloupce matice $\mathbf{A}$ představují složky jednotkového vektoru $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$ ve směru osy x_6 souřadného systému chapadla, přepočítané do systému pracoviště. Podobně prvé tři složky A_{12}, A_{22}, A_{32} druhého sloupce téže matice jsou složky jednotkového vektoru $\mathbf{e}_2=(0,1,0)$ osy y_6 souřadného systému chapadla a analogicky prvé tři složky A_{13}, A_{23}, A_{33} třetího sloupce reprezentují jednotkový vektor $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$ osy z_6 souřadného systému chapadla, přepočítané do souřadného systému pracoviště. Prvé tři složky A_{14}, A_{24}, A_{34} posledního sloupce matice $\mathbf{A}$ představují polohový vektor $\mathbf{P}$ počátku souřadného systému chapadla z hlediska souřadného systému pracoviště. Uvedené vektory tedy reprezentují nejen polohu, ale i orientaci chapadla. Libovolný vektor v souřadném systému chapadla je lineární kombinací jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ležících v osách tohoto systému. Maticové násobení je lineární operace, odtud lze ukázat, že i lineární kombinace vektorů chapadla ze touto operací zachovávají, takže výsledkem je stejná lineární kombinace prvních tří sloupců matice $\mathbf{A}$ afinně posunutá o polohový vektor daný posledním sloupcem (uvažujeme vždy prvé tři souřadnice dílčích sloupců matice

A). Z uvedeného vyplývá, že pro řešení inverzní úlohu plně postačuje vypočítat souřadnice $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)$ ze zadaných hodnot $A_{i,j}$ matice $\mathbf{A}$. Těchto prvků máme celkem 12, je tedy zřejmé, že některé z nich jsou nadbytečné, mělo by stačit šest z nich, ovšem vhodně vybraných. Např. třetí sloupec je dán vektorovým součinem prvních dvou sloupců apod., tedy ze dvou vektorů určíme snadno třetí, devět prvků v prvních třech sloupcích představuje dokonce orto-normální submatici. Zadáním numerických hodnot matice $\mathbf{A}$ zadáváme tedy nejen polohu, ale i orientaci chapadla, či jiného koncového nástroje. Dříve uvedené vlastnosti musí splňovat i předem stanovená matice $\mathbf{A}$ ve formě číselných hodnot, aby úloha měla smysl. Z důvodu usnadnění si následujících výpočtů použijeme téměř všechny prvky, čímž nedochází k žádné ztrátě či nedokonalosti. Celý postup spočívá v hledání vhodných goniometrických kombinací rovnic (3) tak, abychom se zbavili některých členů s neznámými q_i a mohli tak určit jiné neznámé q_k . Jednotný návod neexistuje a každá kinematická struktura se musí řešit individuálně. V průběhu řešení jsou zaváděny nové úhly, které umožní sloučení několika goniometrických vztahů dohromady. Podrobný popis v rámci tohoto článku je z důvodu rozsáhlosti vyloučen, proto uvedeme hlavní kroky.

Nejprve provedeme určení hodnot q_1, q_2, q_3 , které reprezentují natočení prvních tří os. Snadno se přesvědčíme, že platí rovnice $(A_{24} - A_{23}d_{36})c_1 - (A_{14} - A_{13}d_{6})s_1 = 0$. Hledejme hodnoty $\mathbf{A}$ a ψ_1 takové, aby byly splněny vztahy

$$A_{24} - A_{23}d_6 = A \cos \psi_1, \quad A_{14} - A_{13}d_6 = A \sin \psi_1$$

Definujme hodnotu

$$A = \sqrt{(A_{14} - A_{13}d_6)^2 + (A_{24} - A_{23}d_6)^2} \quad (4)$$

a uvažujme následující dva případy.

Případ 1. $A \neq 0$:

Z rovnic

$$\cos \psi_1 = (A_{24} - A_{23}d_6)/A, \quad \sin \psi_1 = (A_{14} - A_{13}d_6)/A$$

určíme jednoznačně úhel ψ_1 jako pomocnou proměnnou (v tomto kroku konstanta). Kombinací vztahů pro koeficienty ve výrazu (4) pro A dostaneme rovnici

$$\sin(\psi_1 + q_1) = 0 \quad (5)$$

odkud již snadno určíme všechna řešení q_1 , která leží v pracovním prostoru. Rovnice má nekonečně mnoho řešení, z nichž vyhovují nejvýše dvě. Obdobně postupujeme v dalších případech.

Lze určit rovnice

$$\begin{aligned} A \sin(q_1 + \psi_1) - a_1 &= s_{23}d_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2 \\ A_{34} - A_{33}d_6 - d_1 &= -c_{23}d_4 + s_{23}a_3 + s_2a_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Poněvadž q_1 je již určené, máme tak dvě rovnice pro dvě neznámé. Definujme konstantu

$$B = \sqrt{d_4^2 + a_3^2} \neq 0.$$

Z rovnic

$$\cos \psi_2 = d_4/B \text{ a } \sin \psi_2 = a_4/B$$

určíme opět jednoznačně úhel ψ_2 . Označme

$$B_1 = A \sin(q_1 + \psi_1) - a_1, \quad B_2 = A_{34} - A_{33}d_6 - d_1,$$

pak z (6) získáme rovnice

$$a_2 \cos q_2 + B \sin(q_2 + q_3 + \psi_2) = B_1 \quad (7)$$

$$a_2 \sin q_2 - B \cos(q_2 + q_3 + \psi_2) = B_2. \quad (8)$$

Pracovně zavedme úhly $\alpha = q_2$, $\beta = q_2 + q_3 + \psi_2$. Pak lze odvodit rovnici

$$B_2 \cos \beta - B_1 \sin \beta = (a_2^2 - B_1^2 - B_2^2 - B^2)/(2B).$$

Definujme novou konstantu $G = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ a určíme úhel γ daný vztahy

$$\sin \gamma = B_2/G \text{ a } \cos \gamma = B_1/G.$$

Takový úhel existuje jediný. Rozborem lze ukázat, že pro dané konstrukční parametry je $G \neq 0$. Nyní lze z rovnice

$$\sin(\gamma - \beta) = (a_2^2 - B_1^2 - B_2^2 - B^2)/(2BG)$$

nalezneme všechna možná řešení rozdílu $\gamma - \beta$ a určíme úhel β (obecně více možností), neboť γ je již vypočtený. Dle definice β a vztahů (7) a (8) určíme úhel q_2 :

$$\cos q_2 = (B_1 - B \sin \beta)/a_2, \quad \sin q_2 = (B_2 + B \cos \beta)/a_2. \quad (9)$$

Nyní lze snadno určit úhel q_3 , neboť musí platit

$$q_3 = \beta - \psi_2 - q_2. \quad (10)$$

Tím jsou určeny všechna natočení polohovacího systému robota v případě, že $A \neq 0$.

Případ 2. $A = 0$:

V tomto případě lze poměrně snadno určit hodnotu q_1 :

$$\cos q_1 = A_{14}/\sqrt{A_{14}^2 + A_{24}^2}, \quad \sin q_1 = A_{24}/\sqrt{A_{14}^2 + A_{24}^2},$$

za předpokladu, že hodnota pod odmocninou je nenulová. Ze vztahu (4), pro $A = 0$ a A_{14} , A_{13} , A_{24} , A_{23} snadno odvodíme

$$s_{23}d_4 + c_{23}a_3 + c_2a_2 + a_1 = 0. \quad (11)$$

Hledejme konstanty F a ψ_{23} , aby platilo:

$$d_4 = F \cos \psi_{23}, \quad a_3 = F \sin \psi_{23}. \quad (12)$$

Pro F bezprostředně plyne $F = \sqrt{a_3^2 + d_4^2} \neq 0$, úhel ψ_{23} určíme jednoznačně z rovnic (12). Z (11) obdržíme rovnici

$$c_2 a_2 + a_1 = -F \sin(q_2 + q_3 + \psi_{23}) \quad (13)$$

Ze vztahů A_{34} a A_{33} lze obdržet další rovnici

$$A_{34} - A_{33}d_6 - a_2 - d_1 = -F \cos(q_2 + q_3 + \psi_{23}). \quad (14)$$

Umocněním (13) a (14) a sečtením dostaneme po úpravách výraz

$$s_2(A_{34} - A_{33}d_6 - d_1) - c_2 a_2 = [(A_{34} - A_{33}d_6 - d_1)^2 + a_1^2 + a_2^2 - F^2] / (2a_2). \quad (15)$$

Hledejme konstanty M a ψ_M takové, aby platilo

$$A_{34} - A_{33}d_6 - d_1 = M \cos \psi_M, \quad a_1 = M \sin \psi_M. \quad (16)$$

Snadno určíme $M = \sqrt{a_1^2 + (A_{34} - A_{33}d_6 - d_1)^2} \neq 0$, úhel ψ_M pak jednoznačně určíme ze vztahů (16) a náš dlouhý výraz (15) můžeme upravit do tvaru

$$\sin(q_2 - \psi_M) = (M^2 + a_2^2 - F^2) / (2a_2 M). \quad (17)$$

Poslední vztah umožňuje určit úhel $q_2 - \psi_M$, existuje obecně více řešení, odtud již stanovíme hodnotu úhlu q_2 .

Nyní nás dělí již jen krok od určení q_3 . Z výrazů (13) a (14) obdržíme rovnice (neboť q_2 je již určeno)

$$\cos(q_2 + q_3 + \psi_{23}) = (-A_{34} + A_{33}d_6 + a_2 + d_1) / F$$

$$\sin(q_2 + q_3 + \psi_{23}) = -(c_2 a_2 + a_1) / F.$$

Odtud snadno určíme hodnotu úhlu $\varepsilon = q_2 + q_3 + \psi_{23}$, ze kterého vypočteme

$$q_3 = \varepsilon - q_2 - \psi_{23}. \quad (18)$$

Jak jsme viděli byly i v tomto případě určeny hodnoty vnitřních proměnných polohovacího systému.

Nyní zbývá určit zbylé tři osy q_4 , q_5 , q_6 , tzv. osy orientačního systému – reprezentuje natočení chapadla. Lze se přesvědčit, že platí následující rovnice

$$(A_{13} - A_{23}c_1)c_4 - [A_{33}s_{23} + (A_{13}c_1 + A_{23}s_1)c_{23}]s_4 = 0. \quad (19)$$

Z této rovnice určíme souřadnici q_4 , neboť souřadnice q_1 , q_2 , q_3 jsou již určeny a můžeme je tedy používat jako konstantní hodnoty v daném kroku řešení. Hledejme konstanty H a ψ_4 , aby platily vztahy

$$A_{13}s_1 - A_{23}c_1 = H \sin \psi_4, \quad A_{33}s_{23} + (A_{13}c_1 + A_{23}s_1)c_{23} = H \cos \psi_4. \quad (20)$$

Odtud snadno určíme

$$H = \sqrt{(A_{13} - A_{23}c_1)^2 + (A_{33}s_{23} + (A_{13}c_1 + A_{23}s_1)c_{23})^2} \quad (21)$$

a z (20) určíme jednoznačně ψ_4 . Rovnici (19) upravíme na

$$H \sin(\psi_4 - q_4) = 0,$$

ze které, za předpokladu $H \neq 0$ obdržíme řešení pro q_4 . Je zřejmé, že máme obecně více řešení. Příklad $H = 0$ si nechme na pozdější dobu.

Snadno se přesvědčíme, že platí rovnice

$$(A_{13}s_1 - A_{23}c_1)s_4 + [A_{33}s_{23} + (A_{13}c_1 + A_{23}s_1)]c_{23}c_4 = s_5$$

$$(A_{13}c_1 + A_{23}s_1)s_{23} - A_{33}c_{23} = c_5.$$

Z těchto rovnic bezprostředně určíme hodnotu q_5 . Určení poslední souřadnice dá trochu více práce. Poměrně snadno ověříme správnost vztahů

$$(s_4c_5)c_6 + (c_4)s_6 = A_{11}s_1 - A_{21}c_1$$

$$(c_4)c_6 - (s_4c_5)s_6 = A_{12}s_1 - A_{22}c_1.$$

Mohli bychom postupovat analogicky, jako v předešlých případech. Zkusme to poněkud jinak. Na obě rovnice můžeme nahlížet jako na lineární rovnice dvou proměnných s_6, c_6 . Determinant uvedené soustavy je

$$D = \det \begin{bmatrix} s_4c_5 & c_4 \\ c_4 & -s_4c_5 \end{bmatrix} = s_4^2s_5^2 - 1.$$

Je-li tento determinant nenulový, ihned určíme hodnoty s_6, c_6 a z nich i úhel q_6 . Pokud je uvedený determinant nulový, platí $|s_4s_5| = 1$, tj. $s_4^2 = 1$ a $s_5^2 = 1$. Odtud $c_4 = c_5 = 0$. Dosažením těchto hodnot do výrazů pro A_{11} a A_{21} a úpravou snadno ověříme

$$(c_1c_{23}s_4)s_6 + (c_1s_{23}s_5)c_6 = -A_{11} \quad (22)$$

$$(s_1c_{23}s_4)s_6 + (s_1s_{23}s_5)c_6 = -A_{21}. \quad (23)$$

Existuje právě jeden úhel ψ_6 , pro který platí rovnice $\cos \psi_6 = c_{23}s_4$ a $\sin \psi_6 = s_{23}s_5$.

Je-li $c_1 \neq 0$, lze (22) přepsat na tvar

$$\sin(q_6 + \psi_6) = -A_{11}/c_1,$$

ze které již snadno určíme hodnotu q_6 . Naopak, je-li $c_1 = 0$, použijeme rovnici (23), ze které analogicky odvodíme q_6 na základě vztahu

$$\sin(q_6 + \psi_6) = -A_{21}/c_1.$$

Tím máme určeny všechny hodnoty vnitřních souřadnic $q_1, \dots, q_6$, tak jak jsme požadovali.

Vlastně nám ještě zbyl singulární případ $H = 0$, viz (21). Obecně platí

$$A_{13}s_1 - A_{23}c_1 = s_4s_5, \quad A_{33}s_{23} + (A_{13}c_1 + A_{23}s_1)c_{23} = c_4s_5.$$

Poněvadž $H = 0$, z (21) dostáváme $s_4s_5 = 0$ a $c_4s_5 = 0$. Odtud $s_5 = 0$. Rozsah sklápění zápěstí robota umožňuje v tomto případě jen jedno řešení, proto dostáváme $q_5 = 0$. Nadále máme tedy $s_5 = 0$ a $c_5 = 1$. Kombinací vztahů pro $A_{11}, \dots, A_{22}$ dostáváme

$$A_{12}s_1 - A_{22}c_1 = c_4c_6 - s_4s_6 = \cos(q_4 + q_6)$$

$$A_{11}s_1 - A_{21}c_1 = s_4c_6 + c_4s_6 = \sin(q_4 + q_6).$$

Existuje tedy právě jeden úhel $\chi = q_4 + q_6$ splňující uvedené rovnice. Tento úhel reprezentuje celkové natočení zápěstí a to jednoznačně. Určení q_4 a q_6 za této situace je v principu nemožné, existuje nekonečně mnoho řešení. V tomto případě je nutno použít pevně definované překlenovací algoritmy.

4. Závěr

Vyřešení inverzní úlohy kinematiky představuje důležitý odrazový můstek pro přesné polohování ramene robota a pro realizaci základních algoritmů řízení robota k pevnému bodu, řízení po předem zvolené trajektorii a dále vývoj popisu dynamiky robota, který umožňuje výrazné zkvalitnění řízení robota včetně realizace adaptivních či iterativně učících se postupů. Ačkoli jsme na počátku hovořili o Jacobiho matici, zde jsme ji bezprostředně nevypisovali, neboť náš postup vycházel z úprav rovnic. Pokud vážený čtenář zjistil nějaké nedostatky tohoto textu, nechť laskavě omluví autory za nepozornost při jeho spěšném sepsování.

5. Poděkování

Tímto děkujeme vedení Fakulty mechatroniky, informatiky a mezioborových studií Technické univerzity v Liberci, že nám dovolili publikovat to, na čem skutečně pracujeme.

6. Literatura

- Angeles, J. (2003) Fundamentals of robotic mechanical systems. *Springer-Verlag, New York*.
- Fu, K. S., Gonzales, R. C., Lee, C. S. G. (1987) Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence. *McGraw-Hill, New York*
- Önal, H. (2008) A spinor method of solution of manipulators' inverse kinematics problem with rotational pairs. *Intern. Refereed Multi-disciplinary Scient. Journal*. 2, pp. 170-178.
- Schilling, R. J. (1990) Fundamentals of robotics. *Prentice Hall, New Jersey*.
- Samson, C., Le Borgne, M., Espiau, B. (1991) Robot control. *Clarendon Press, Oxford*.