

RESIDUAL SPECTRA OF DISPLACEMENTS OF CONVENTIONAL AND ELECTRONIC CAMS

P. Jirásko*, M. Václavík*

Summary: *A criterion of the positional accuracy of the working links of mechanisms with flexible links is the residual spectrum of the second-order derivative of the response to the kinematic excitation of the system due to displacement. The discrete models of mechanisms with conventional and electronic cam have been described using Lagrange's equations. For the characteristic displacements the residual spectra have been determined according to which it is possible to determine revolutions, rise angle or loading moment of inertia so that the residual vibrations are reduced to a minimum*

1. Problematika aplikací klasických a elektronických vaček

V úvodu krátce popíšeme problematiku aplikací obou vačkových systémů a jejich charakteristické vlastnosti. U obou systémů jde prakticky o totéž, a tím je pohon pracovního členu mechanismu výrobního stroje.

Klasickými vačkami máme na mysli složené vačkové mechanismy s libovolnými základními vačkovými mechanismy tak, jak je popisuje literatura (Koloc, Václavík, 1988). Tyto mechanismy jsou všeobecně známé i se svými klady a zápory. Kladnými vlastnostmi jsou např. jejich vysoká dynamika, relativně nízká cena a variabilita konstrukce, zápory jsou jejich jednoúčelovost, vliv vůlí, poddajnosti ve vstupním a výstupním kinematickém řetězci, opotřebitelnost (jsou nutné jako náhradní díly).

Elektronické vačky jsou nové mechanismy, které se skládají z řízení (řídící kontroler) a pohonu (měnič, servomotor). Mluvíme často o systému elektronické vačky, neboť aplikace elektronické vačky v sobě sjednocuje donedávna samostatné obory (mechanika, software, elektronika, řízení atd.) a je klasickým případem prudce se rozvíjejícího oboru s názvem mechatronika. Klady elektronických vaček jsou jejich programovatelnost a použitelnost ve výrobních systémech jako prvků pružné automatizace, nízké nároky na údržbu, spolehlivost. Zápory jsou např. jejich nižší dynamika, vyšší pořizovací náklady, vysoké kvalifikační nároky na přípravu a provedení aplikace.

V příspěvku se zabýváme použitím klasických a elektronických vaček v oblasti pevné a pružné automatizace, což je v tomto případě realizace neperiodických (krokových) pohybů konstrukčními prvky jako jsou různé krokové mechanismy a otočné stoly. Předmětem zájmu je studium reziduálního kmitání v oblastech klidu pohybových funkcí a hledání možností jeho

* Ing. Petr Jirásko, Prof. Ing. Miroslav Václavík, CSc.: VÚTS, a.s., U Jezu 525/4, P.O. Box 92, 461 19 Liberec;
tel.: +420.485 301 111, fax: +420.485 302 402; e-mail: miroslav.vaclavik@vuts.cz

minimalizace bez zpětnovazebního zásahu, tzn. stanovit reziduální spektra vybraných zdvihových závislostí a na jejich základě určit pracovní otáčky, úhel zdvihu nebo moment setrvačnosti pracovní zátěže tak, aby toto kmitání bylo minimální.

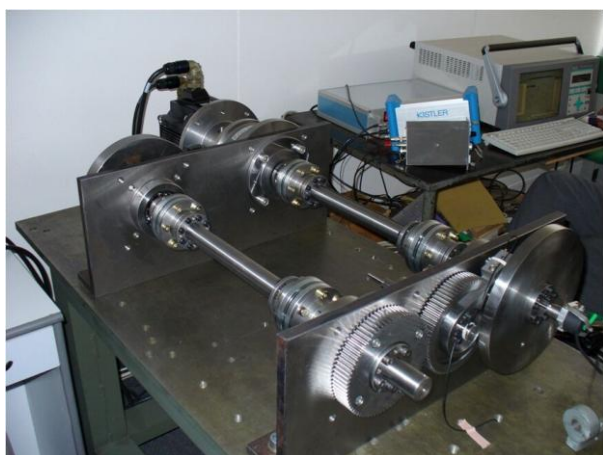
2. Aplikační výzkum klasických a elektronických vaček

Výzkumný ústav textilních strojů v Liberci se desítky let zabývá klasickými vačkovými mechanismy, jejich výpočty a výrobou. V posledních několika letech se zabýváme možnostmi aplikací elektronických vaček. Abychom v obecné problematice pohonů pracovních členů mechanismů uměli zvolit optimální variantu na základě rozličných hledisek, je nutné oba systémy podrobit matematickým analýzám (virtuální simulaci) v součinnosti s měřením na experimentálním modelu (dynamickém standu).

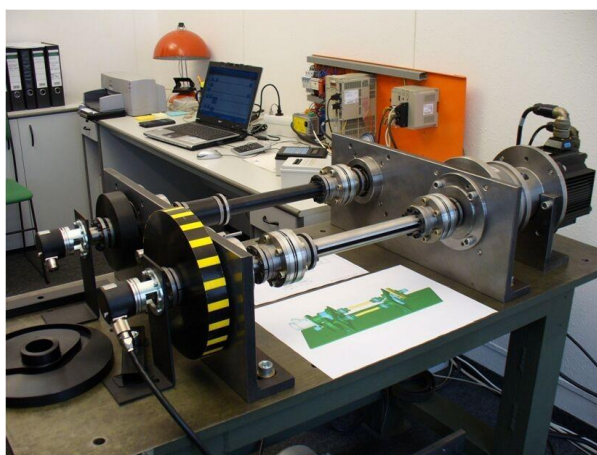
Pro potřeby experimentů byl postaven dynamický stand pro klasické vačkové mechanismy a elektronické vačky. Na obr.1 je varianta klasické drážkové radiální vačky s vahadlem a poddajnou hnací a hnanou částí s pracovní zátěží. Na obr.2 je 3kW systém elektronické vačky Yaskawa (kontroler, měnič, servomotor) s poddajnou hnanou částí s pracovní setrvačnou hmotou.

3. Simulační modely klasických a elektronických vaček

Jedním ze způsobů virtuálního modelování mechanických systémů je využití komerčně dostupných programových systémů na které má VÚTS a.s. zakoupeny licenční podmínky k instalaci (NX I-DEAS, MSC.ADAMS a MSC.EASY5). Tyto expertní systémy jsou vhodné pro složité výpočetní analýzy nelineárních systémů. Práce s těmito programovými systémy vyžaduje vysokou výpočtářskou kvalifikaci. Finanční náklady na provoz těchto systémů jsou značné. V příspěvku jsou pouze uvedeny výsledky řešení a jsou konfrontovány s další metodou simulace, která je předmětem příspěvku a kterou je popis diskretního dynamického systému Lagrangeovými rovnicemi druhého druhu. Provozní náklady tohoto způsobu řešení jsou naopak zanedbatelné. Za povšimnutí však stojí pozoruhodná shoda výsledků, a tím i oprávněnost diskuse nad uvážlivým nasazením těchto expertních systémů pouze na odpovídající úlohy.

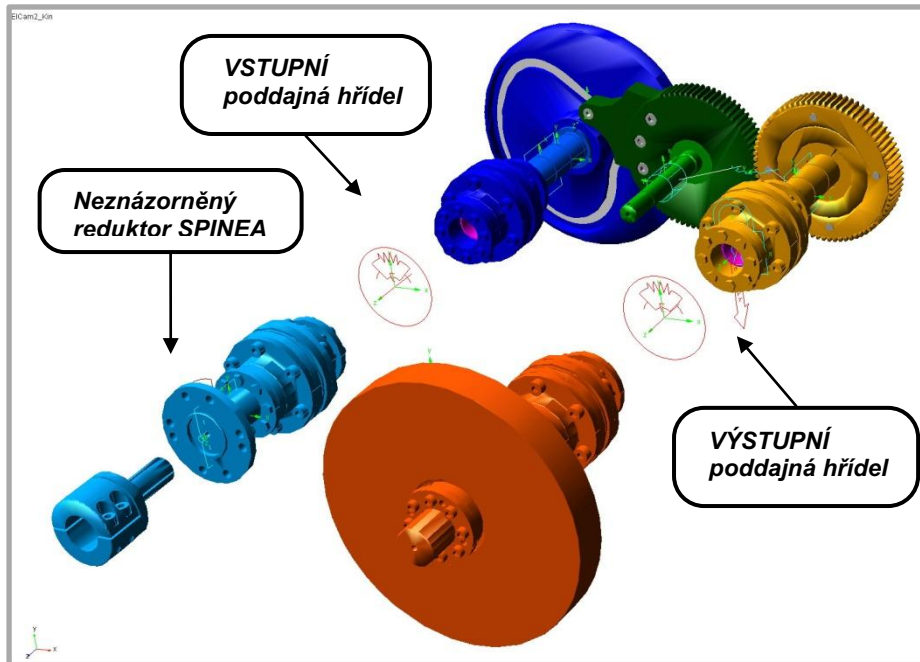


Obr. 1 Stand klasického vačkového mech.



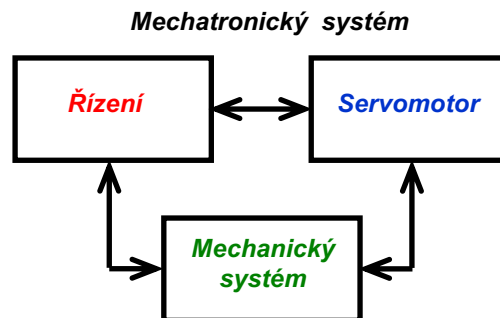
Obr. 2 Stand elektronické vačky

Na příkladu modelování klasického vačkového mechanismu podle obr.1 stručně popíšeme charakteristické znaky obou přístupů. Podle obr.3 vycházejí obě simulace ze stejných hmotových parametrů. Neznázorněné poddajné hřídele hnací a hnané části včetně membránových spojek jsou expertními systémy nahrazeny tzv. superelementy, které jsou charakterizovány svojí spektrální a modální maticí. V popisu Lagrangeovými rovnicemi jsou pružné hřídele uvažovány jako nehmotné s definovanou tuhostí a tlumením.



Obr. 3 Rozložení hmot a poddajností klasického vačkového mechanismu.

V případě elektronické vačky podle obr.2 (*servomotor > reduktor SPINEA > membránová spojka > poddajná hnaná hřídel > membránová spojka > pracovní zátěž*) jde v hnané části s ohledem na poddajnost o totéž. Elektronická vačka, jako mechatronický systém podle obr.4, se musí pomocí expertních systémů řešit komplexně a nelze model zcela jednoduše rozložit na příslušné modely jednotlivých subsystémů (mechanický, elektrický, řízení), protože se v konečné realizaci vzájemně ovlivňují. Jde tedy o komunikaci a tok dat mezi systémy NX I-DEAS, MSC.ADAMS a MSC.EASY5.



Obr. 4 Mechatronický systém elektronické vačky

Při popisu elektronické vačky Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu postupujeme stejně jako při modelování klasického vačkového mechanismu. Do řetězce od vstupu po pracovní zátěž je vložena poddajnost s tlumením, která charakterizuje elektromagnetickou vazbu na základě analogie s mechanickým poddajným prvkem a poddajnost výstupní hřídele. Proporcionálně integrační vlastnosti regulace jsou zahrnuty do algoritmu numerického řešení pohybových rovnic. V dalším textu bude tato metoda popsána. V obou metodách je modelován vliv odporového momentu reduktoru SPINEA ($p=1/33$) v závislosti na rychlosti, který redukuje otáčky servomotoru a je tedy vložen mezi servomotor a poddajnou hnanou hřídel.

4. Diskrétní dynamické modely vačkových mechanismů s pružnými vazbami

Klasické vačkové mechanismy s pružnými vazbami v hnané a hnací části mechanismu jsou tedy charakterizovány tím, že spojení dvou diskrétních hmotných částí soustavy s rotačním nebo posuvným pohybem, které jsou součástí téhož členu mechanismu (ve smyslu kinematického značení členů mechanismu) je realizováno pružnou vazbou. Mechanismy této skupiny mají při tuhých vazbách vždy 1° volnosti. Zavedením pružných vazeb se zvyšuje počet stupňů volnosti soustavy mechanismu, který je závislý na počtu a uspořádání vazeb.

Struktura soustavy vačkového mechanismu může nabývat rozličného uspořádání. V praxi se setkáváme s celou řadou uspořádání převodových mechanismů s 1° volnosti (s konstantním nebo nekonstantním převodem) v hnané a hnací části vačkového mechanismu. Na základě struktury celé soustavy vačkového mechanismu a stupni idealizace reálné soustavy (z hlediska elastických vlastností vazeb a hmot členů) můžeme uvažovat základní typy a modifikace mechanismů s pružnými vazbami v hnané a hnací části podle následujícího označení

$$i_1 - \Pi - i_2$$

kde: i_1 ... počet stupňů volnosti soustavy vlivem pružných vazeb v hnací části,
 i_2 ... počet stupňů volnosti soustavy vlivem pružných vazeb v hnané části,
 Π ... zdvihová závislost (dále z.z.) základního vačkového mechanismu -
 - (obecně proměnný převod).

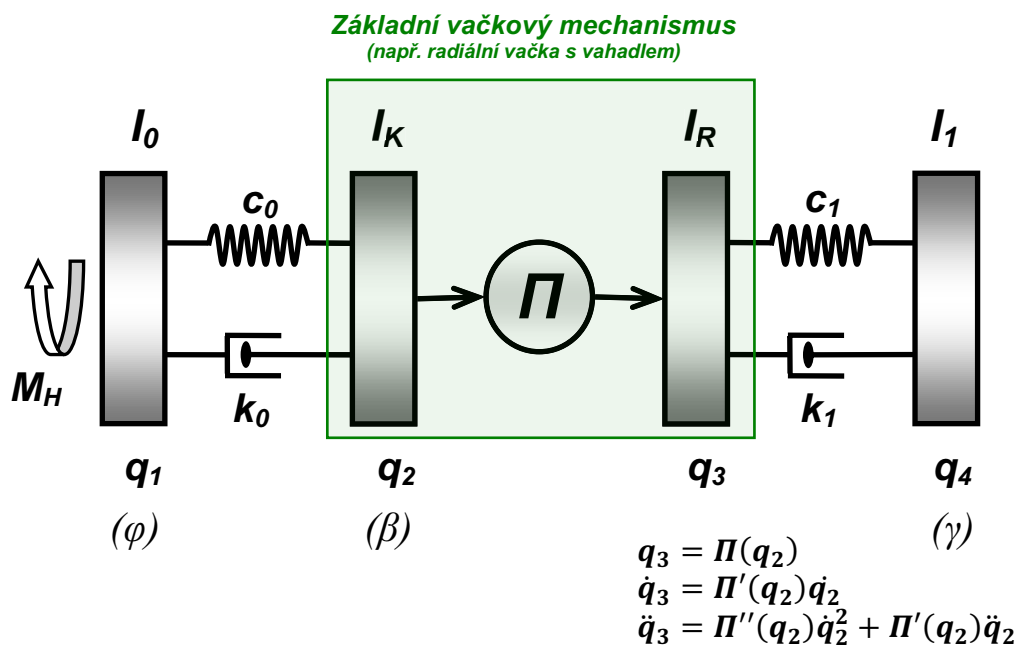
Reálné mechanismy, používané při stavbě strojů a strojních zařízení, představují poměrně složité mechanické systémy. Výchozím bodem pro konkrétní dynamické řešení je stanovení vhodného výpočtového modelu. Do třídy výpočtových modelů mechanismů s pružnými vazbami zahrneme modely mechanismů, u nichž příslušné pružné členy jsou uvažovány jako nehmotné. Vačkový mechanismus je charakterizován diskrétním rozložením hmot jednotlivých členů soustavy, které jsou uvažovány jako dokonale tuhé. Uvedené soustavy přísluší konečný počet stupňů volnosti, závislý na počtu a uspořádání pružných vazeb (viz obr.3).

5. Pohybové rovnice modelu 1 - Π - 1 (klasický vačkový mechanismus)

Velká a významná skupina vačkových mechanismů je podle výše uvedené klasifikace typu 1 - Π - 1, tedy s jednou pružnou vazbou v hnané a hnací části. Na tento typ modelu lze převést velkou část klasických vačkových mechanismů. Příkladným a velmi častým případem je poddajný vstup (hnací část) a výstup (hnaná část) základního vačkového mechanismu radiální vačky s vahadlem v provedení standu na obr.1. Vstupní pohon je veden od servomotoru (v praxi obvykle klasický elektromotor) s konstantní dodávkou otáček na vačku hnací vačkovou

hřídelí. Výstupní pracovní pohyb je pak pohybová funkce, resp. zdvihová závislost vahadla vačky a pracovní setrvačné hmoty. Poddajné jsou tedy vačková hřídel a hřídel mezi vahadlem vačky a setrvačnou pracovní hmotou (zátěží). Snahou konstruktérů je v co největší míře tyto poddajnosti eliminovat, ale z mnoha důvodů, jak technologických, tak konstrukčních, to často není možné.

Pro sestavení pohybových rovnic u sledovaného modelu lze použít klasických Lagrangeových rovnic druhého druhu pro nezávislé obecné souřadnice, kterými jsou výchylky členů vačkového mechanismu vlivem pružných vazeb, resp. také souřadnice hnacího členu. Při odvození pohybových rovnic použijeme označení poloh členů v absolutních souřadnicích a neuvažujeme vliv gravitace. Jsou-li mezi pracovními silami vedle sil potenciálních a disipativních ještě síly jiného typu, lze pomocí disipativní funkce napsat tyto rovnice ve známém tvaru (Juliš, Brepta, 1987). Dynamický model je schematicky nakreslen na obr.5.



Obr.5 Diskrétní model klasického vačkového mechanismu 1 - Π - 1

Lagrangeovy rovnice 2. druhu jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j - \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1)$$

kde: K ... kinetická energie soustavy,
 V ... potenciální energie pružných vazeb,
 Q_j ... nekonzervativní obecné síly,
 R_d ... Rayleighova disipativní funkce,
 q_j ... obecné souřadnice.

Kinetická energie soustavy je

$$K = \frac{1}{2} I_0 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_K \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_R \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_4^2,$$

$$K = \frac{1}{2}(I_0\dot{q}_1^2 + I_K\dot{q}_2^2 + I_R\Pi'^2(q_2)\dot{q}_2^2 + I_1\dot{q}_4^2).$$

Potenciální energie pružných vazeb je

$$V = \frac{1}{2}c_0(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}c_1(q_3 - q_4)^2,$$

$$V = \frac{1}{2}\{c_0(q_1 - q_2)^2 + c_1[\Pi(q_2) - q_4]^2\}.$$

Rayleighova disipativní funkce je

$$R_d = \frac{1}{2}k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}k_1(\dot{q}_3 - \dot{q}_4)^2,$$

$$R_d = \frac{1}{2}\{k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + k_1[\Pi'(q_2)\dot{q}_2 - \dot{q}_4]^2\}.$$

Příslušné derivace a nekonzervativní obecná síla vztahující se k obecné souřadnici q_1 jsou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}\right) = I_0\ddot{q}_1, \quad \frac{\partial K}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = c_0(q_1 - q_2), \quad \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_1} = k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2), \quad Q_1 = M_H.$$

Pohybová rovnice vztahující se k obecné souřadnici q_1 je po dosazení do (1)

$$I_0\ddot{q}_1 = M_H - c_0(q_1 - q_2) - k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2),$$

pro $\ddot{q}_1 = 0$, resp. $\dot{q}_1 = \text{konst}$ nabývá pohybová rovnice tvar

$$M_H = c_0(q_1 - q_2) + k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2). \quad (2)$$

Příslušné derivace a nekonzervativní obecná síla vztahující se k obecné souřadnici q_2 jsou

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} = I_K\dot{q}_2 + I_R\Pi'^2(q_2)\dot{q}_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}\right) &= I_K\ddot{q}_2 + I_R\Pi'^2(q_2)\ddot{q}_2 + 2I_R\Pi'(q_2)\Pi''(q_2)\dot{q}_2^2 = \\ &= [I_K + I_R\Pi'^2(q_2)]\ddot{q}_2 + 2I_R\Pi'(q_2)\Pi''(q_2)\dot{q}_2^2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_2} = I_R\Pi'(q_2)\Pi''(q_2)\dot{q}_2^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = -c_0(q_1 - q_2) + c_1\Pi'(q_2)[\Pi(q_2) - q_4],$$

$$\frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_2} = -k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_1\Pi'(q_2)[\Pi'(q_2)\dot{q}_2 - \dot{q}_4],$$

$$Q_2 = 0.$$

Pohybová rovnice vztahující se k obecné souřadnici q_2 je po dosazení do (1)

$$\begin{aligned} [I_K + I_R\Pi'^2(q_2)]\ddot{q}_2 + I_R\Pi'(q_2)\Pi''(q_2)\dot{q}_2^2 = \\ = c_0(q_1 - q_2) - c_1\Pi'(q_2)[\Pi(q_2) - q_4] + \\ k_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_1\Pi'(q_2)[\Pi'(q_2)\dot{q}_2 - \dot{q}_4]. \end{aligned} \quad (3)$$

Příslušné derivace a nekonzervativní obecná síla vztahující se k obecné souřadnici q_4 jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_4} \right) = I_1 \ddot{q}_4, \quad \frac{\partial K}{\partial q_4} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_4} = -c_1 [\Pi(q_2) - q_4], \quad \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_4} = -k_1 [\Pi'(q_2) \dot{q}_2 - \dot{q}_4], \quad Q_4 = 0.$$

Pohybová rovnice vztahující se k obecné souřadnici q_4 je po dosazení do (1)

$$I_1 \ddot{q}_4 = c_1 [\Pi(q_2) - q_4] + k_1 [\Pi'(q_2) \dot{q}_2 - \dot{q}_4]. \quad (4)$$

Dosazením za $q_1 = \varphi (= \omega t)$, $\dot{q}_1 = \omega (= konst)$, $q_2 = \beta$, $q_4 = \gamma$ do rovnic (2),(3),(4) dostáváme pohybové rovnice modelu $I - \Pi - I$ ve tvaru

$$M_H = c_0(\omega t - \beta) + k_0(\omega - \dot{\beta}), \quad (5)$$

$$[I_k + I_R \Pi'^2(\beta)] \ddot{\beta} + I_R \Pi'(\beta) \Pi''(\beta) \dot{\beta}^2 = c_0(\omega t - \beta) - c_1 \Pi'(\beta) [\Pi(\beta) - \gamma] +$$

$$k_0(\omega - \dot{\beta}) - k_1 \Pi'(\beta) [\Pi'(\beta) \dot{\beta} - \dot{\gamma}], \quad (6)$$

$$I_1 \ddot{\gamma} = c_1 [\Pi(\beta) - \gamma] + k_1 [\Pi'(\beta) \dot{\beta} - \dot{\gamma}]. \quad (7)$$

Dále se z rovnic (7) a (6) explicitně vyjádří úhlová zrychlení (pořadí rovnic odpovídá logice programového kódu, viz dále)

$$\ddot{\gamma} = (c_1/I_1) [\Pi(\beta) - \gamma] + (k_1/I_1) [\Pi'(\beta) \dot{\beta} - \dot{\gamma}],$$

$$\ddot{\beta} = \{1/[I_k + I_R \Pi'^2(\beta)]\} \{-I_R \Pi'(\beta) \Pi''(\beta) \dot{\beta}^2 +$$

$$c_0(\omega t - \beta) - c_1 \Pi'(\beta) [\Pi(\beta) - \gamma] + k_0(\omega - \dot{\beta}) - k_1 \Pi'(\beta) [\Pi'(\beta) \dot{\beta} - \dot{\gamma}]\}.$$

Soustavu dvou výše uvedených diferenciálních rovnic 2. řádu převedeme na soustavu čtyř diferenciálních rovnic 1. řádu (Nekvinda,1976), tedy snížením řádu dostáváme soustavu (8) s počátečními podmínkami pro numerické řešení $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_2(0) = 0$, $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = \omega$.

(Pozn.: index 1 se týká polohy, index 2 se týká rychlosti)

$$\dot{\gamma}_1 = f_1(\dots): \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2, \quad (v)$$

$$\dot{\gamma}_2 = f_2(\dots): \quad \dot{\gamma}_2 = (1/I_1) \{c_1 [\Pi(\beta_1) - \gamma_1] + k_1 [\Pi'(\beta_1) \beta_2 - \gamma_2]\}, \quad (u)$$

$$\dot{\beta}_1 = g_1(\dots): \quad \dot{\beta}_1 = \beta_2, \quad (l)$$

$$\dot{\beta}_2 = g_2(\dots): \quad \dot{\beta}_2 = \{1/[I_k + I_R \Pi'^2(\beta_1)]\} \{-I_R \Pi'(\beta_1) \Pi''(\beta_1) \beta_2^2 +$$

$$c_0(\omega t - \beta_1) - c_1 \Pi'(\beta_1) [\Pi(\beta_1) - \gamma_1] +$$

$$k_0(\omega - \beta_2) - k_1 \Pi'(\beta_1) [\Pi'(\beta_1) \beta_2 - \gamma_2]\}. \quad (k)$$

... (8)

Numerické řešení soustava (8) provedeme metodou Runge-Kutta čtvrtého řádu podle známého vzorce (Nekvinda,1976) pro rovnici typu $y' = f(x, y)$

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_0, z_0),$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, z_0 + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, z_0 + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, z_0 + hk_3\right).$$

Tento vzorec se rozvede pro soustavu (8) v předpis, který bude sloužit k přímému přepsání do kódu libovolného programovacího jazyka

$$\gamma_{11} = \gamma_{10} + \frac{1}{6}h(v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4),$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{20} + \frac{1}{6}h(u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4),$$

$$\beta_{11} = \beta_{10} + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),$$

$$\beta_{21} = \beta_{20} + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$v_1 = f_1(t, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \beta_{10}, \beta_{20}),$$

$$u_1 = f_2(t, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \beta_{10}, \beta_{20}),$$

$$l_1 = g_1(t, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \beta_{10}, \beta_{20}),$$

$$k_1 = g_2(t, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \beta_{10}, \beta_{20}),$$

$$v_2 = f_1\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_1, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_1, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_1, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$u_2 = f_2\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_1, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_1, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_1, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$l_2 = g_1\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_1, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_1, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_1, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_2 = g_2\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_1, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_1, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_1, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$v_3 = f_1\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_2, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_2, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_2, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$u_3 = f_2\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_2, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_2, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_2, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$l_3 = g_1\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_2, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_2, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_2, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$k_3 = g_2\left(t + \frac{1}{2}h, \gamma_{10} + \frac{1}{2}hv_2, \gamma_{20} + \frac{1}{2}hu_2, \beta_{10} + \frac{1}{2}hl_2, \beta_{20} + \frac{1}{2}hk_2\right),$$

$$v_4 = f_1(t + h, \gamma_{10} + hv_3, \gamma_{20} + hu_3, \beta_{10} + hl_3, \beta_{20} + hk_3),$$

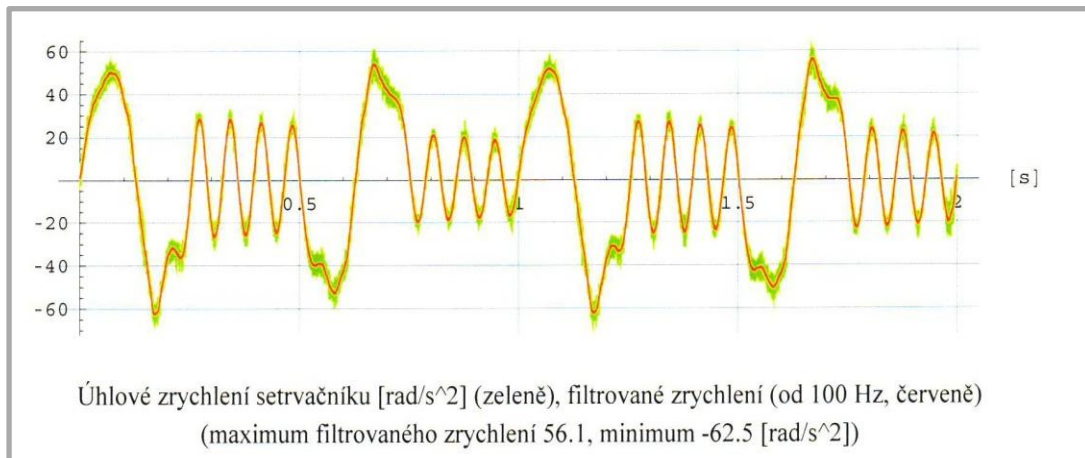
$$u_4 = f_2(t + h, \gamma_{10} + hv_3, \gamma_{20} + hu_3, \beta_{10} + hl_3, \beta_{20} + hk_3),$$

$$l_4 = g_1(t + h, \gamma_{10} + hv_3, \gamma_{20} + hu_3, \beta_{10} + hl_3, \beta_{20} + hk_3),$$

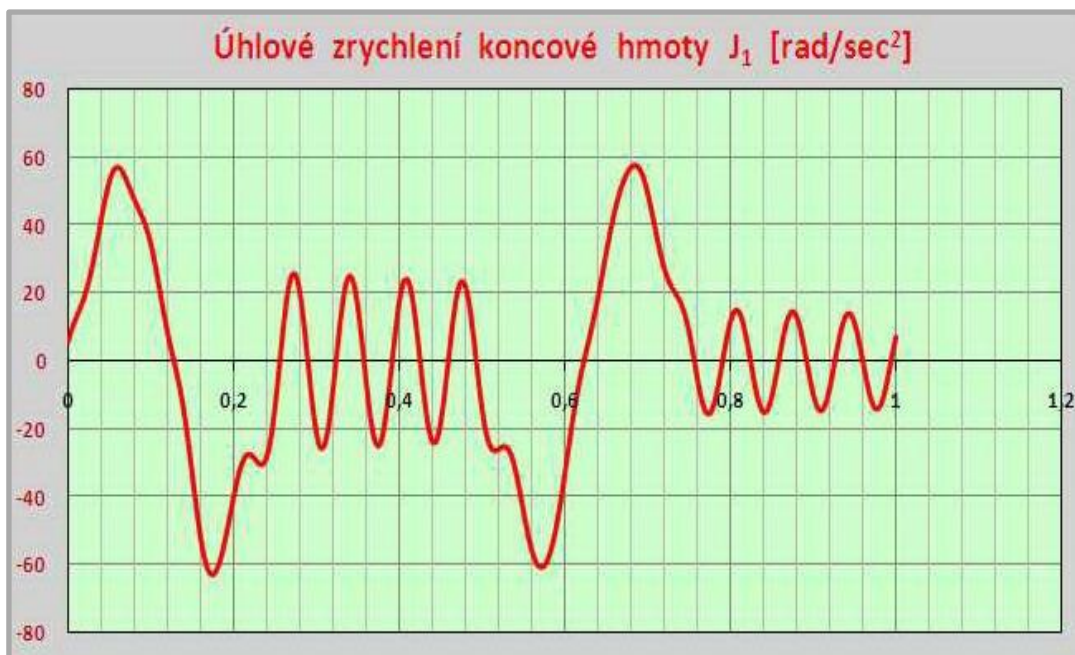
$$k_4 = g_2(t + h, \gamma_{10} + hv_3, \gamma_{20} + hu_3, \beta_{10} + hl_3, \beta_{20} + hk_3),$$

... (9)

Na obr.6 a 7 jsou uvedeny pro ilustraci výsledky výpočtu a měření pro 60 [min⁻¹] radiální vačky na standu podle obr.1. Z důvodu rozsahu nejsou uvedeny hmotové parametry a z.z.



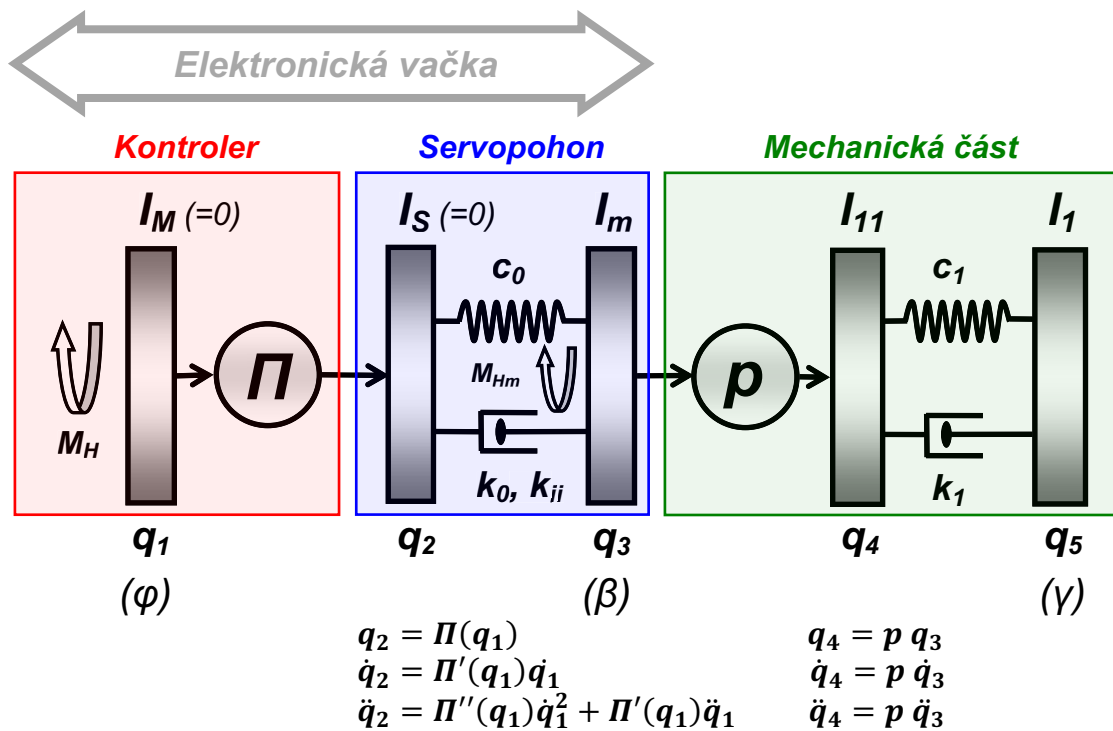
Obr. 6 Úhlové zrychlení hmoty I₁ (scan měřicího protokolu)



Obr. 7 Úhlové zrychlení hmoty I₁ (řešení modelu 1 - II - 1)

6. Pohybové rovnice modelu 0 - II - 2 (elektronická vačka)

Pohybové rovnice odvodíme stejným způsobem jako v případě klasického vačkového mechanismu 1 - II - 1. Přiřazení hodnot proměnným v realitě elektronické vačky bude popsáno v dalším textu. Z důvodů analogie s klasickým mechanismem jsou zakresleny i členy s nulovými momenty setrvačnosti, které ovšem mají svůj mechanický ekvivalent v podobě klasického mechanismu se dvěma výstupními poddajnostmi.


 Obr. 8 Diskrétní model elektronické vačky 0 - Π - 2

Kinetická energie soustavy je

$$K = \frac{1}{2} I_m \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} I_{11} \dot{q}_4^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_5^2,$$

$$K = \frac{1}{2} (I_m \dot{q}_3^2 + I_{11} p^2 \dot{q}_3^2 + I_1 \dot{q}_5^2).$$

Potenciální energie pružných vazeb je

$$V = \frac{1}{2} c_0 (q_2 - q_3)^2 + \frac{1}{2} c_1 (q_4 - q_5)^2,$$

$$V = \frac{1}{2} \{c_0 [\Pi(q_1) - q_3]^2 + c_1 (p q_3 - q_5)^2\}.$$

Rayleighova disipativní funkce je

$$R_d = \frac{1}{2} k_0 (\dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{2} k_1 (\dot{q}_4 - \dot{q}_5)^2,$$

$$R_d = \frac{1}{2} \{k_0 [\Pi'(q_1)\dot{q}_1 - \dot{q}_3]^2 + k_1 (p\dot{q}_3 - \dot{q}_5)^2\}.$$

Příslušné derivace a nekonzervativní obecná síla vztahující se k obecné souřadnici q_1 jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = c_0 [\Pi(q_1) - q_3] \Pi'(q_1),$$

$$\frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_1} = k_0 [\Pi'(q_1)\dot{q}_1 - \dot{q}_3] \Pi'(q_1), \quad Q_1 = M_H.$$

Pohybová rovnice vztahující se k obecné souřadnici q_1 po dosazení do rovnic (1)

$$\mathbf{M}_H = \{c_0[\Pi(q_1) - q_3] + k_0[\Pi'(q_1)\dot{q}_1 - \dot{q}_3]\} \Pi'(q_1). \quad (10)$$

Príslušné derivace a nekonzervativní obecná síla vztahující se k obecné souřadnici q_3 jsou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_3} \right) &= I_m \ddot{q}_3 + I_{11} p^2 \ddot{q}_3; \quad \frac{\partial K}{\partial q_3} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial q_3} &= -c_0[\Pi(q_1) - q_3] + c_1(pq_3 - q_5)p, \\ \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_3} &= -k_0[\Pi'(q_1)\dot{q}_1 - \dot{q}_3] + k_1(p\dot{q}_3 - \dot{q}_5)p, \quad Q_3 = 0. \end{aligned}$$

Pohybová rovnice vztahující se k obecné souřadnici q_3 po dosazení do rovnic (1)

$$\begin{aligned} (I_m + I_{11}p^2)\ddot{q}_3 &= c_0[\Pi(q_1) - q_3] - c_1p(pq_3 - q_5) + \\ & k_0[\Pi'(q_1)\dot{q}_1 - \dot{q}_3] + k_1p(p\dot{q}_3 - \dot{q}_5). \end{aligned} \quad (11)$$

Príslušné derivace a nekonzervativní obecná síla vztahující se k obecné souřadnici q_5 jsou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_5} \right) &= I_1 \ddot{q}_5, \quad \frac{\partial K}{\partial q_5} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_5} = -c_1(pq_3 - q_5), \\ \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_5} &= -k_1(p\dot{q}_3 - \dot{q}_5), \quad Q_5 = 0. \end{aligned}$$

Pohybová rovnice vztahující se k obecné souřadnici q_5 po dosazení do rovnic (1)

$$I_1 \ddot{q}_5 = c_1(pq_3 - q_5) + k_1(p\dot{q}_3 - \dot{q}_5). \quad (12)$$

Dosazením $q_1 = \varphi$, $q_3 = \beta$, $q_5 = \gamma$ do rovnic (10), (11) a (12) dostáváme pohybové rovnice modelu $\theta - \Pi - 2$ ve tvaru

$$\mathbf{M}_H = \{c_0[\Pi(\varphi) - \beta] + k_0[\Pi'(\varphi)\dot{\varphi} - \dot{\beta}]\} \Pi'(\varphi), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (I_m + I_{11}p^2)\ddot{\beta} &= c_0[\Pi(\varphi) - \beta] - c_1p(p\beta - \gamma) + \\ & k_0[\Pi'(\varphi)\dot{\varphi} - \dot{\beta}] - k_1p(p\dot{\beta} - \dot{\gamma}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$I_1 \ddot{\gamma} = c_1(p\beta - \gamma) + k_1(p\dot{\beta} - \dot{\gamma}). \quad (15)$$

kde obecně $\dot{\varphi} \neq konst.$ Rovnice (14) a (15) popisují chování elektronické vačky v případě, kdy souřadnice φ je závisle proměnnou (slave) virtuálního hřídele (master). Rovnice pak popisují např. chování při náběhu otáček po předem definované rampě, jak je u elektronických vaček běžné. Dále však budeme uvažovat ustálený chod.

Z rovnic (15) a (14) se explicitně vyjádří úhlová zrychlení s předpokladem konstantních otáček virtuálního hřídele $\dot{\varphi} = \omega = konst.$

$$\ddot{\gamma} = (c_1/I_1)(p\beta - \gamma) + (k_1/I_1)(p\dot{\beta} - \dot{\gamma}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} &= [1/(I_m + I_{11}p^2)]\{c_0[\Pi(\omega t) - \beta] - c_1p(p\beta - \gamma) + \\ & k_0[\Pi'(\omega t)\omega - \dot{\beta}] - k_1p(p\dot{\beta} - \dot{\gamma})\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Soustavu dvou výše uvedených diferenciálních rovnic 2. řádu převedeme na soustavu čtyř diferenciálních rovnic 1. řádu [2], tedy snížením řádu dostáváme soustavu (14) s počátečními podmínkami pro numerické řešení $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_2(0) = 0$, $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = 0$... jde o z.z. s takto definovaným pohybem, např. dále uvedená z.z. podle VDI. (Pozn.: index 1 se týká polohy, index 2 se týká rychlosti)

$$\dot{\gamma}_1 = f_1(\dots): \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2, \quad (v)$$

$$\dot{\gamma}_2 = f_2(\dots): \quad \dot{\gamma}_2 = (1/I_1)[c_1(p\beta_1 - \gamma_1) + k_1(p\beta_2 - \gamma_2)], \quad (u)$$

$$\dot{\beta}_1 = g_1(\dots): \quad \dot{\beta}_1 = \beta_2, \quad (l)$$

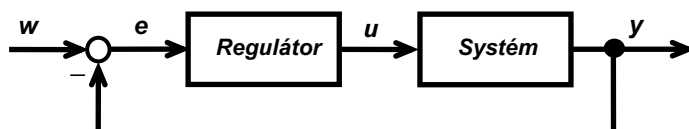
$$\dot{\beta}_2 = g_2(\dots): \quad \dot{\beta}_2 = [1/(I_m + I_{11}p^2)]\{c_0[\Pi(\omega t) - \beta_1] - c_1p(p\beta_1 - \gamma_1) + k_0[\Pi'(\omega t)\omega - \beta_2] - k_1p(p\beta_2 - \gamma_2)\}. \quad (k)$$

... (18)

Numerické řešení soustavy (18) provedeme podle předpisu (9) jako u modelu $I - \Pi - I$.

Na tomto místě popíšeme odlišnost numerického řešení od modelu klasického vačkového mechanismu. Nebudeme zde popisovat principy regulace servopohonů, pouze konstatujeme, že většina servopohonů má kaskádní regulační strukturu s momentovou, rychlostní a polohovou zpětnou vazbou. Regulační prvky jsou zpravidla proporcionalní (P) a proporcionalně integrační (PI). Námí používaný systém elektronické vačky Yaskawa má možnost přepínání P/PI regulačního prvku v rychlostní smyčce výstupním bitem OBxx013. Jde nám tedy o takový zásah do numerického řešení pohybových rovnic, aby charakteristická veličina PERR jako polohová odchylka servopohonu (rozdíl skutečné polohy na hřídeli serva od teoretické) odpovídala co nejvíce skutečnosti režimů P/PI. PERR je kritériem přesnosti daného modelu a její průběh bude porovnán se dvěma nezávislými zdroji. Jedním je měření a druhým je virtuální model řízeného mechanického systému vytvořeného v programových systémech MSC.ADAMS a MSC.EASY5. Polohová přesnost PERR elektronických vaček je podrobněji popsána v (Jirásko, Bušek, 2008).

Podle (Valášek, 1996) je zpětnovazební řízení systému regulací znázorněno na obr.9,



Obr. 9 Řízení systému regulací

kde jednotlivé veličiny jsou:

w ... referenční požadovaná veličina,

y ... skutečná výstupní veličina,

$e = w - y$... regulační odchylka (vstupní veličina regulátoru),

u ... řídicí akční veličina systému (výstupní veličina regulátoru).

Regulátor PID má vztah mezi výstupní veličinou (akční veličinou $u(t)$ systému) a vstupní veličinou (regulační odchylkou $e(t)$) popsaný diferenciální rovnicí

$$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt}] = u_p(t) + u_I(t) + u_D(t). \quad (19)$$

Zavedená poddajnost a tlumení do systému (v části servopohonu) jsou v terminologii regulovaného systému akčními členy $u_p(t)$, pak numerické řešení pohybových rovnic (16) a (17), resp. soustavy (18) odpovídá režimu regulace P.

Jestliže kvalitativním kritériem elektronické vačky pro pohon pracovních členů mechanismů je polohová odchylka PERR, kterou systém řízení nejlépe minimalizuje správnou činností svých regulátorů v kaskádním uspořádání v režimu PI, kde konečným výsledkem činnosti regulátorů je elektromagnetický moment působící na rotor serva, pak analogicky zavedeme podle obr.6 na člen se souřadnicí q_3 , resp. β , moment $Q3(t)$ (působící na jednotkový moment setrvačnosti), který zavedeme v upravené rovnici (17)

$$(I_m + I_{11}p^2)\ddot{\beta} = c_0[\Pi(\omega t) - \beta] - c_1p(p\beta - \gamma) + k_0[\Pi'(\omega t)\omega - \dot{\beta}] - k_1p(p\dot{\beta} - \dot{\gamma}) + \overline{Q3},$$

$$\ddot{\beta} = [1/(I_m + I_{11}p^2)]\{c_0[\Pi(\omega t) - \beta] - c_1p(p\beta - \gamma) + k_0[\Pi'(\omega t)\omega - \dot{\beta}] - k_1p(p\dot{\beta} - \dot{\gamma})\} + Q3(t).$$

Tento moment $Q3(t)$ bude představovat druhý člen (19) jako akční řídicí veličinu $u_I(t)$ modelu dynamického systému elektronické vačky. Referenční veličinou $w(t)$ je moment M_{Hm} působící na jednotkový moment setrvačnosti (hmota s I_m) za předpokladu dokonale tuhé vazby stator/rotor a je tedy řešením jiného modelu a jiné soustavy diferenciálních rovnic, zde neuvedené. Regulační momentová odchylka $e(t)$ je pak

$$e(t) = M_{Hm} - M_m, \text{ kde } M_m \text{ je výraz (17).}$$

Výraz $e(t)$ není dále v řešení použit. Zavedeme-li však do numerického řešení soustavy rovnic (18) proměnnou $Q3(t)$ ve formálním tvaru zápisu kódu (algoritmu) programu

$$Q3 = Q3 + k_{ii} * \Delta t * \dot{\beta}_2, \quad (20)$$

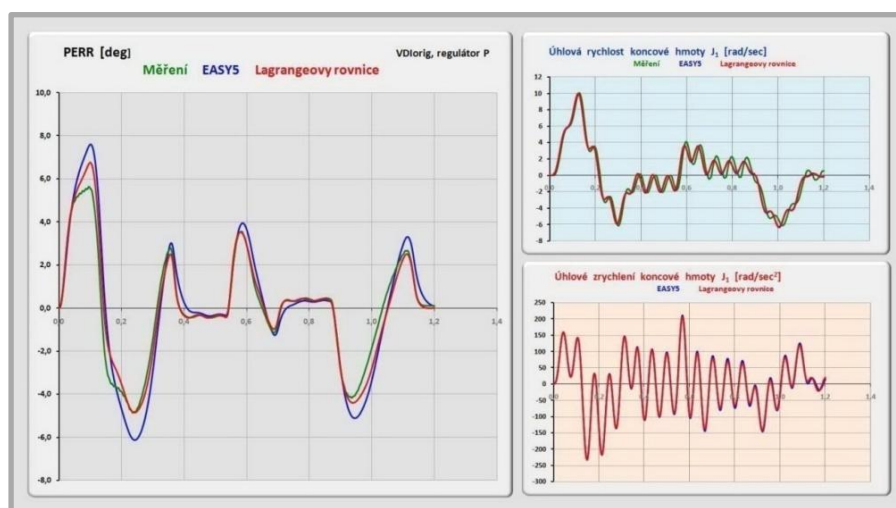
kde $\dot{\beta}_2$ je (18k) a Δt je časový krok numerického řešení, dostáváme analogickou veličinu k integračnímu členu $u_I(t)$ v rovnici (19), kterou nazveme součtovým (integračním) momentem numerického řešení soustavy rovnic (18) a model pak odpovídá režimu regulace PI v rychlostní vazbě kaskádního uspořádání regulace servopohonu Yaskawa. Při trvalé konstantní polohové odchylce PERR integrační člen obecně zvyšuje moment, který tuto odchylku snižuje. Moment $Q3(t)$ se zavede do cyklu výpočtu (for...next) v daném výpočetním časovém kroku Δt soustavy (18) a do předpisu (9) členů k_1, k_2, k_3 a k_4 . Konstanta k_{ii} představuje pouze analogii k integrační časové konstantě (19). Konkrétní hodnoty konstant (k_{ii} a ostatní proporcionální konstanty) momentového regulátoru PI (20) se stanoví na základě měření. Model je tak verifikován a připraven na testy s jinými parametry jako jsou velikosti hmot, otáčky, jiné zdvihové závislosti apod. Pro $k_{ii} = 0$ jde o regulaci typu P (proporcionální). Ta je charakteristická tím, že při trvalé konstantní výchylce PERR je regulační moment konstantní na rozdíl od regulace PI, kdy při konstantní výchylce PERR regulační moment v čase vzrůstá. Tuto vlastnost P/PI regulátoru lze jednoduše otestovat na libovolném servomotoru při nízkém regulačním stupni (podle Yaskawa) vychýlením hřídele serva rukou nebo měřením PERR při pracovním pohybu podle parabolické zdvihové závislosti.

Moment $Q3$ nemusí být pouze tento součtový člen, ale může v sobě slučovat i jiné namodelované momenty působící na jednotkový moment setrvačnosti, jako je např. dopředná momentová vazba (momentový Feed Forward), odporový moment reduktoru otáček serva,

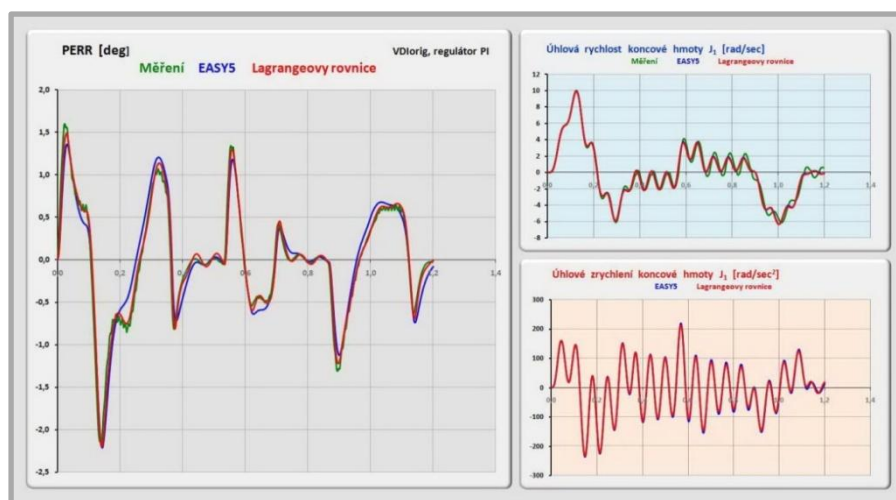
zavedení a modely jiných algoritmů regulátoru. Momentová dopředná vazba je pak zavedena do algoritmu numerického řešení stejným způsobem a představuje proporcionálně zesílené teoretické zrychlení.

Hodnoty ekvivalentních parametrů skutečné regulace servopohonu samozřejmě neodpovídají našemu modelu. Skutečná regulace pracuje v jiných časových režimech (frekvence proudové, rychlostní a polohové vazby) a na základě jiných algoritmů. Fyzikální podstata je však stejná a tou je regulace (řízení) momentu působícího na rotor servomotoru. Nelze tedy na modelu popsaného Lagrangeovými rovnicemi predikovat a modelovat velikosti skutečných parametrů regulátorů pohonu (to je naopak účelem expertních systémů MSC.ADAMS/EASY5), ale je možné sledovat vliv hmot, poddajností, tuhostí, otáček, zdvihových závislostí a dalších parametrů na konkrétních aplikacích velice levně a efektivně. To bude ukázáno na problematice reziduálního kmitání pracovních členů mechanismů.

Po verifikaci parametrů jsou na obr.10 a 11 výsledky měření a obou metod virtuální simulace pro regulaci P a PI. Verifikace byla provedena se z.z. podle (VDI 2143,1980), jedná se o dynamicky náročnou z.z., z důvodu rozsahu není dále specifikována.



Obr. 10 Simulace a měření PERR v režimu regulace P (z.z. podle VDI 2143)



Obr. 11 Simulace a měření PERR v režimu regulace PI (z.z. podle VDI 2143)

7. Reziiduální spektra zdvihových závislostí klasických a elektronických vaček

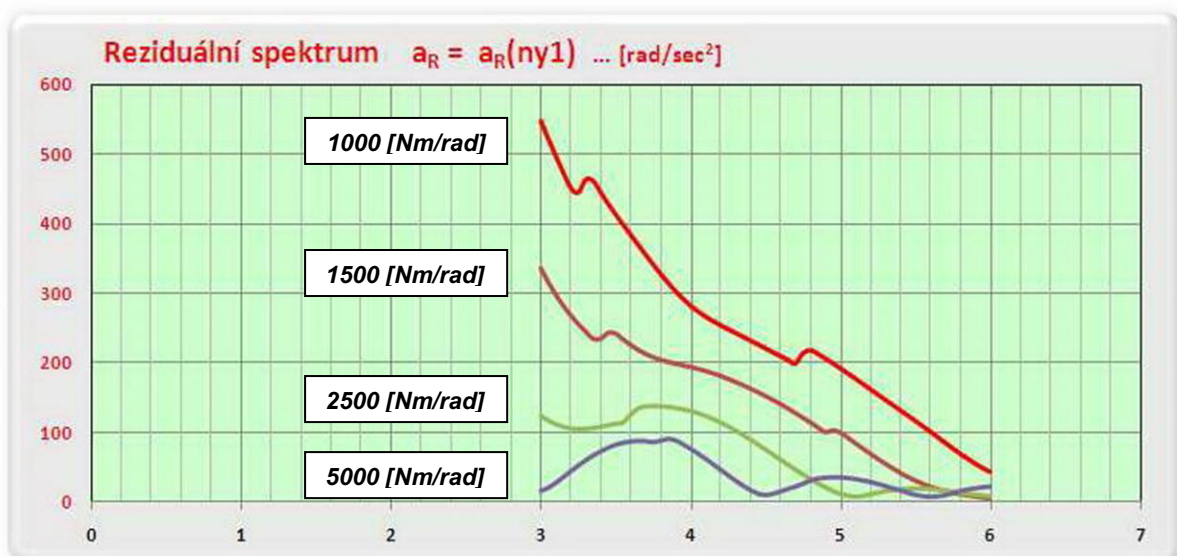
Přesnost konečné polohy v klidovém intervalu pohybové funkce je posouzena podle extrémní hodnoty zrychlení pracovního členu, neboť členy vačkového mechanismu jsou v dynamických modelech uvažovány poddajné. Kritériem polohové přesnosti je pak tzv. reziiduální spektrum druhé derivace odezvy na kinematické buzení poddajného systému zdvihovou závislostí (Koloc, Václavík, 1988). Diskrétní modely obou mechanismů jsou popsány v předchozích kapitolách a budou řešeny pro charakteristické zdvihové závislosti.

Reziiduální spektrum, specifické pro danou z.z., bude využito pro stanovení parametrů (otáčky, úhel zdvihu nebo moment setrvačnosti), při kterých je kmitání minimalizováno. V knize „Vačkové mechanismy“ (Koloc, Václavík, 1988) jsou reziiduální spektra stanovena na základě analytického řešení kinematicky buzeného netlumeného lineárního oscilátoru. Prezentované výsledky v příspěvku jsou výsledkem čistě numerického řešení na základě datového souboru z.z. (její 0., 1. a 2. derivace) a parametrů modelů s poddajnými členy. Numerické řešení je jednoduché. V cyklu for/next relativní vlastní frekvence ν (na obr.12,13 jako „ny1“) probíhá numerické řešení, jehož každým průchodem cyklu je výsledné maximální zrychlení v oblasti klidu pohybové funkce. Grafické vyjádření těchto hodnot v závislosti na ν je hledané reziiduální spektrum. Relativní vlastní frekvence ν vyjadřuje počet kmitů vykonaných v čase jednoho zdvihu, resp. zrealizovaného úhlu zdvihu (*čas peridy minus doba klidu*). Souvislost $\nu[1]$ s otáčkami $n[\text{min}^{-1}]$, úhlem zdvihu $\phi[\text{deg}]$ a momentem setrvačnosti zátěže $I_1[\text{kgm}^2]$ pro elektronické vačky je

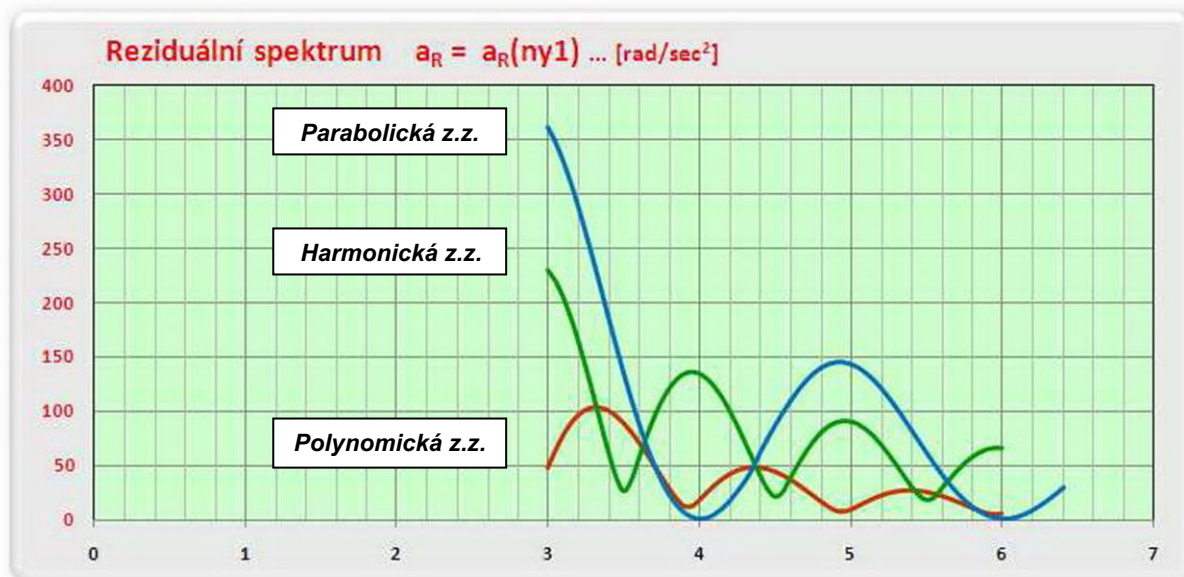
$$\nu = \phi f / 6n, \quad f = (1/2\pi) \sqrt{c_1/I_1}.$$

S ohledem na rozsah příspěvku jsou uvedeny pouze ilustrativní výsledky pro

- model 1 – II – 1 klasického vačkového mechanismu s různou tuhostí vstupu podle obr.13, tuhost výstupu 1000[Nm/rad], z.z. polynomická 5.stupně se zdvihem 30[deg] a úhlem zdvihu 90[deg], zátěž 0.1[kgm²],
- model 0 – II – 2 elektronické vačky pro z.z. polynomickou 5.stupně, harmonickou a parabolickou se zdvihem 68[deg] a úhlem zdvihu 90[deg], zátěž 0.1[kgm²].



Obr. 13 Reziiduální spektra modelu 1 – II – 1 (klasický vačkový mechanismus).



Obr. 14 Reziduální spektra modelu 0 – II – 2 (elektronická vačka).

8. Závěr

Na základě reziduálních spekter zdvihových závislostí (z.z.), které jsou výsledkem numerického řešení modelů ($i_1 - II - i_2$), je možné stanovit otáčky, úhel zdvihu nebo moment setrvačnosti tak, aby reziduální kmitání v oblasti klidu pohybových funkcí bylo minimální. Tyto závěry byly na dynamickém standu podle obr.2 ověřeny. Shoda polohové odchylky PERR servomotoru zjištěná měřeními a simulacemi je vynikající a na základě této shody lze studovat vliv regulace na dynamiku systému. Na standu podle obr. 2 je použita převodovka SPINEA s převodovým poměrem 33 do pomala. Do budoucna je třeba práce rozšířit s použitím jiných (menších) převodových poměrů, protože vliv regulace servopohonu se pak projeví na výsledném kmitání výrazněji. Vhodný převod je však z technického hlediska náročný, neboť pro účely aplikací elektronických vaček potřebujeme bezvůlový převod.

Závěrem lze konstatovat, že popis klasického vačkového mechanismu a elektronické vačky Lagrangeovými rovnicemi vyhovuje a výsledky splňují očekávání, neboť jsou prakticky využitelné. Návrh z.z. libovolnými metodami, její datový přenos do modelů a následné testování je snadné. Jedním ze zajímavých výsledků je, že s parabolickou z.z. se nejlépe kompenzují reziduální kmity, i když odezva systému na tuto z.z. je nejsilnější díky svému nespojitému průběhu 2. derivace.

9. Literatura

Jirásko, P., Bušek, M. (2008) *Polohová přesnost pohybových funkcí elektronických vaček*.

10. Mezinárodní konference IFToMM, TU Liberec

Juliš, K., Brepta, R. (1987) *TP 2.díl – Dynamika*. SNTL

Koloc, Z., Václavík, M. (1988) *Vačkové mechanismy*. SNTL

Nekvinda, M. a kol. (1976) *Úvod do numerické matematiky*. SNTL

Valášek, M. a kol. (1996) *Mechatronika*. ČVUT

VDI 2143 (1980) *Bewegungsgesetze für Kurvengetriebe*.