

**TRANSIENT VIBRATION OF THIN RECTANGULAR ELASTIC AND
VISCOELASTIC ISOTROPIC AND ORTHOTROPIC PLATE I****J. Soukup¹, J. Trnka², F. Vales³, J. Volek¹**

Summary: *The article is a part of the systematic analysis of assumption effects on the transient vibration of an isotropic or orthotropic elastic and viscoelastic thin 2D plate. Several deformation models – according to Kirchhoff, Rayleigh, Flügge, Mindlin – were applied. The linear models of material rheologic properties were applied according to Hook, Voigt-Kelvin, Maxwell, Zener models. The results obtained by FEM methods and experiments are mutually compared.*

1. Úvod

V rámci systematického vyšetřování přechodového kmitání a šíření vln v tenké 2D obdélníkové desce jsou analyzovány vlivy a důsledky výchozích předpokladů týkající se především geometrie desky a charakteru jejího přetvoření, tj. model Kirchhoffa, Rayleigha, Flüggeho a Mindlina, dále fyzikálních vlastností kontinua definovaných konstitutivními rovnicemi jak pro izotropní tak i ortotropní materiál, tj. model Hooka, Voigt-Kelvina, Maxwella, Zenera standardního tělesa a model zobecněného standardního tělesa.

Dalším předmětem analýzy je vliv časového průběhu vstupního budícího zatížení v souvislosti s přijatými předpoklady, tj. jednotlivými modely a jejich vzájemnými kombinacemi. Kritériem posouzení těchto vlivů je porovnání časového průběhu složek napětí a posuvů, pootočení a dalších mechanických veličin z přibližného analytického řešení s výsledky získanými aplikací MKP a experimentem. Vzhledem k tomu, že experimentální metody a metody MKP reálně umožňují vyšetřování jen některých případů, např. časového průběhu vybraných veličin v krátkém časovém úseku od vstupního pulsu a v menších vzdálenostech od místa jeho působení a s přihlédnutím k obtížím při zjišťování hodnot reologických vlastností viskoelastických materiálů, je výhodné provádět analýzu vstupních předpokladů a okrajových podmínek především numerickým vyhodnocením analytických vztahů.

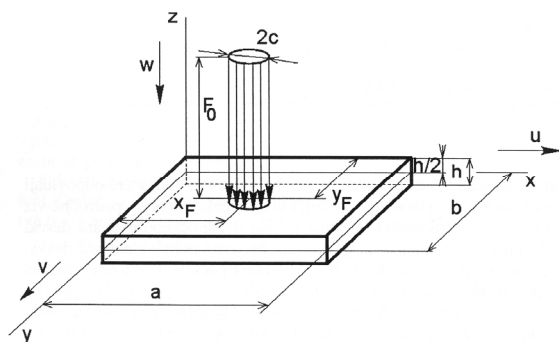
2. Analytické řešení

Nejprve je nutné formulovat problémy vyšetřování časoprostorového průběhu složek napětí a posuvů tenké obdélníkové desky, elastické a viskoelastické, izotropní a ortotropní prostě uložené. Model řešené desky a geometrie jejího přetvoření jsou zřejmé z obr. 1 a 2.

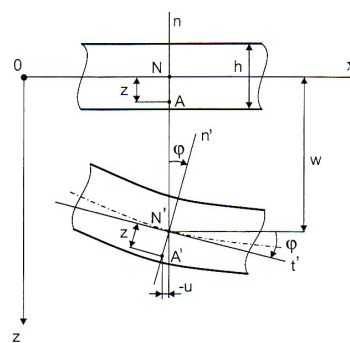
¹ Doc. ing. Josef Soukup, CSc., PhDr. Ing. Jan Volek, Fakulta výrobních technologií a managementu, UJEP v Ústí n. L., Na Okraji 1001, 400 96 Ústí n. L., tel. +420 475 285 533, e-mail: soukupj@fvtn.ujep.cz

² Ing. Jan Trnka, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR Praha, Dolejškova 1402/5, 182 00 Praha 8, tel.: +420 266 053 022, e-mail: trnka@it.cas.cz

³ ing. František Vales, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR Praha, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, tel.: +420 377 236 415, e-mail: vales@cdm.it.cas.cz



Obr. 1



Obr. 2

Složky posuvů ve směru os (obr. 1)

$$u = u(x; y; t), \quad v = v(x; y; t), \quad w = w(x; y; t) \quad (1)$$

a v závislosti na úhlu natočení řezu $\varphi_x = \varphi_x(x; y; t)$, $\varphi_y = \varphi_y(x; y; t)$

$$u = -z\varphi_x, \quad v = -z\varphi_y. \quad (2)$$

Kirchhoff, Rayleigh

$$\gamma_{xz} = 0 \Rightarrow \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Flügge, Timoshenko-Mindlin

$$\gamma_{xz} \neq 0 \Rightarrow \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz}$$

$$\gamma_{yz} \neq 0 \Rightarrow \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz}$$

$$u = -z \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \right), \quad v = -z \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \right)$$

Složky deformace jako funkce posuvu a pootočení

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Kirchhoff, Rayleigh

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0$$

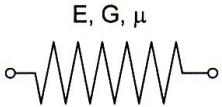
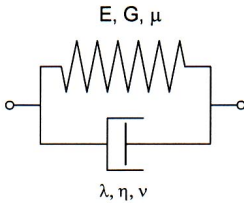
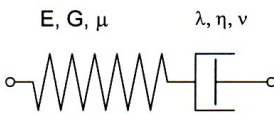
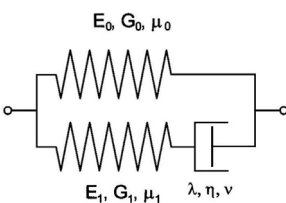
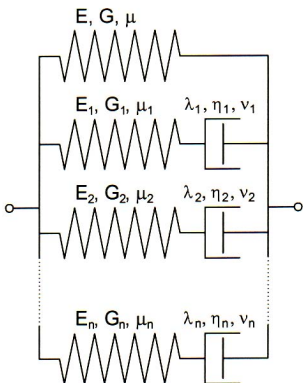
Flügge, Timoshenko-Mindlin

$$\varepsilon_x = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_y = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right)$$

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi_x \neq 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_y \neq 0$$

Konstitutivní rovnice pro různé modely reologických vlastností kontinua - materiálu desky

Hookův model		$\sigma_i = b_{ij} \varepsilon_j$	
Voigt-Kelvinův model		$\sigma_i = b_{ij} \varepsilon_j + d_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t}$	
Maxwellův model		$\sigma_i + c_{ij} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = d_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t}$	
Zenerův model standardního tělesa		$\sigma_i + c_{ij} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = b_{ij} \varepsilon_j + d_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t}$	(4)
Model zobecněného standardního viskoelastického tělesa (zobecněný Zenerův model standardního tělesa)		$\sigma_i + c_{ij} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = b_{ij} \varepsilon_j + d_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial t}$	

Materiál	Viskoelastický (max. jeden prvek viskózní sériově)	Elastický
anizotropní	$a_{ijkl} \sigma_{ij} + c_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} = b_{ijkl} \varepsilon_{kl} + d_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$ Obecně pro $n \geq 1; m \geq 1$ $\sum_{r=0}^n (a_{ijkl})_r \frac{\partial^r \sigma_{ij}}{\partial t^r} = \sum_{r=0}^m (b_{ijkl})_r \frac{\partial^r \varepsilon_{kl}}{\partial t^r}$ Integrální operátor Volterrův $\sigma_{ij} = \int_0^t Y_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} d\tau$	$a_{ijkl} \sigma_{ij} = b_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

	Boltzmanův	
	$\sigma_{ij} = b_{ijkl} \varepsilon_{kl} + d_{ijkl} \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) \varepsilon_{kl} d\tau$	
ortotropní	$\sigma_i = b_{ij} \varepsilon_j + d_{ij} L_i(\varepsilon_j)$	$\sigma_i = b_{ij} \varepsilon_j$

kde $L_i(\varepsilon_j(t)) = \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \varepsilon_j(\tau) d\tau$; $K_{ij}(t)$ - funkce (modul) relaxace.

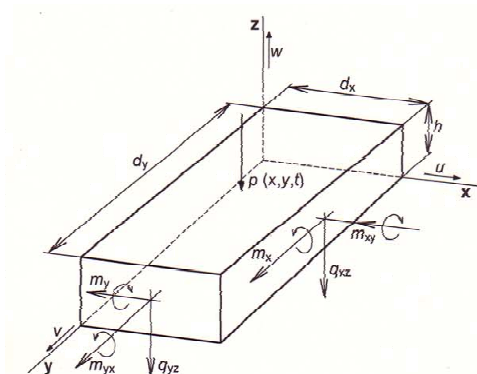
$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} d_{11}L_1 & d_{12}L_1 & d_{13}L_1 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21}L_2 & d_{22}L_2 & d_{23}L_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_{31}L_3 & d_{32}L_3 & d_{33}L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44}L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55}L_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66}L_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}$$

$$\varepsilon_j^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$$

V případě přijetí modelu charakteru přetvoření desky podle Flüggeho nebo Mindlina je řešení rozsáhlejší, mimo možnosti tohoto příspěvku. Podstatu metody řešení rovnic příčného kmitání tenké desky je možno prezentovat na jednodušším případě přijetím modelu Kirchhoffa nebo Rayleigha.



Obr. 3

Pohybové rovnice pro element desky podle obr. 3:

do osy z

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + p(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5a)$$

pro momenty k osám x a y

$$q_{xz} - \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = \Phi_x$$

$$q_{yz} - \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = \Phi_y \quad (5b)$$

pro Kirchhoffův model $\Phi_{xK} = 0, \quad \Phi_{yK} = 0$ (6)

pro Rayleighův model $\Phi_{xR} = J_\rho \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \Phi_{yR} = J_\rho \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \quad \text{kde } J_\rho = \rho \frac{h^3}{12}.$

Vyloučením posouvajících sil q_{xz} a q_{yz} z rovnic (5a), (5b) dostaneme (Soukup, Valeš Volek, (2008))

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(x; y; t) \quad (7)$$

kde pro Kirchhoffa $\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = 0$ a Rayleigha $\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = J_\rho \frac{\partial^2 (\Delta w)}{\partial t^2}$

Dosazením vztahů pro momenty m_i z rovnic (3) a (4) do (7) dostaneme rovnice pro jednotlivé modely reologických vlastností kontinua: Kirchhoff $J_\rho \rightarrow 0$, Rayleigh $J_\rho \neq 0$

Model Hookeův

Izotropní

$$\Delta \Delta w + \frac{1}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = \frac{p(x; y; t)}{D} \quad (8)$$

Ortotropní

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{\xi\eta} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\rho h w - J_\rho \Delta w] = p(x; y; t)$$

Model Voigt-Kelvina

Izotropní

$$(D + D_\lambda \frac{\partial}{\partial t}) \Delta \Delta w + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = p(x; y; t)$$

Ortotropní

$$\begin{aligned} & \left(D_x + D_{\lambda x} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(D_y + D_{\lambda y} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \left[2D_{xy} + D_\mu + (2D_\mu + D_\nu) \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = p(x; y; t) \end{aligned}$$

Model Maxwellův

Izotropní

$$\begin{aligned} & \Delta \Delta w - \delta \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) e^{-\delta(t-\tau)} d\tau - 2(1-\mu) \delta_{xy} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} e^{-\delta_{xy}(t-\tau)} d\tau + \\ & + \frac{1}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = \frac{p(x; y; t)}{D} \end{aligned}$$

Ortotropní

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_\mu + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_x \delta_x \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) e^{-\delta_x(t-\tau)} d\tau -$$

$$D_y \delta_y \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) e^{-\delta_y(t-\tau)} d\tau - 4D_{xy} \delta_{xy} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} e^{-\delta_{xy}(t-\tau)} d\tau -$$

$$- D_\mu \left(\delta_x \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} e^{-\delta_x(t-\tau)} d\tau + \delta_y \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} e^{-\delta_y(t-\tau)} d\tau \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = p(x, y, t)$$

Model Zenera standardního tělesa

Izotropní

$$\Delta \Delta w + \frac{E_2}{E_1} \left((\Delta \Delta w - \delta \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) e^{-\delta(t-\tau)} d\tau - 2(1-\mu) \delta_{xy} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} e^{-\delta_{xy}(t-\tau)} d\tau \right) +$$

$$+ \frac{1}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = \frac{p(x, y, t)}{D}$$

Ortotropní

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + (D_{x\mu} + D_{y\mu} + D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D_x \delta_x \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) e^{-\delta_x(t-\tau)} d\tau -$$

$$- D_y \delta_y \int_0^t \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu_{yx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) e^{-\delta_y(t-\tau)} d\tau - 4D_{xy} \delta_{xy} \int_0^t \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} e^{-\delta_{xy}(t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho h w - J_\rho \Delta w) = p(x, y, t)$$

Všechny uvedené moduly D_{ij} jsou funkcemi třetí mocniny tloušťky desky a parametrů materiálu (E , G , μ , λ , η). Řešení všech uvedených rovnic příčného kmitání desky je provedeno aplikací Fourierovy metody a Laplaceovy integrální transformace. Řešení je hledáno ve tvaru dvojné řady

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) X_{mn}(x) Y_{mn}(y) \quad (9)$$

kde funkce $X_{mn}(x)$ a $Y_{mn}(y)$ vyhovují okrajovým podmínkám uložení desky. Jsou-li tyto funkce prvky Hilbertova prostoru H a tvoří ortonormální systém, je možno po dosazení funkce $w(x, y, t)$ do rovnic příčného kmitání desky provedením skalárního součinu získat pro funkci $W_{mn}(t)$ obyčejnou diferenciální rovnici (pro Flüggeho nebo Mindlinův model přetvoření desky tři rovnice)

$$L(W_{mn}(t)) = A T_F(t) \quad (10)$$

kde $T_F(t)$ je funkce časového průběhu budícího zatížení, $A = \text{konst.}$

Po Laplaceově transformaci rovnice (10) dostaneme algebraickou rovnici

$$W_{mn}(s) = A \frac{T_F(s)}{Q(s)} \quad (11)$$

Zpětnou transformací (11) se získá vztah pro výpočet $W_{mn}(t)$ ve tvaru konvolutorního integrálu

$$W_{mn}(t) = A \int_0^t T_F(\tau) K(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

kde jádro konvolutorního integrálu $K(t)$ závisí na přijatém modelu reologických vlastností materiálu. Např. pro Zenerův model standardního tělesa má tvar

$$K(t-\tau) = e^{-\beta(t-\tau)} \left(C \cos \omega(t-\tau) + \frac{D-\beta C}{\omega} \sin \omega(t-\tau) \right)$$

kde frekvence ω a koeficient β jsou póly polynomu jmenovatele $Q(s)$ v rovnici (11) závislé na vlastnostech materiálu desky a konstanty C a D vyplynou ze zpětné transformace vztahu (11). Dosazením vztahu (12) do rovnice (9) dostaneme vztah pro výpočet příčného posuvu w a dosazením do konstitutivních rovnic (3) a (4) se získají vztahy pro výpočet hledaných veličin, tj. složek napětí a posuvů. Tímto je prezentováno přibližné analytické řešení příčného kmitání obdélníkové elastické nebo viskoelastické, izotropní nebo ortotropní desky buzené zatížením obecného průběhu v čase i prostoru.

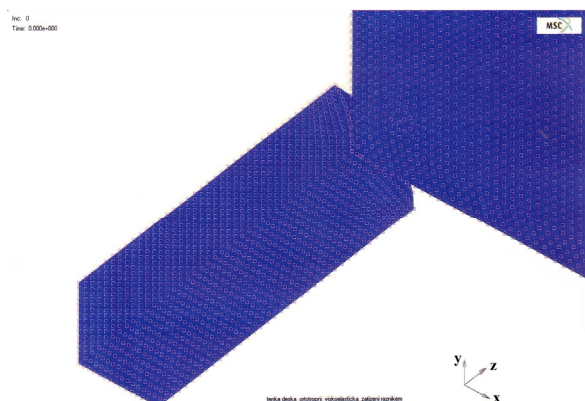
3. Numerické řešení nestacionárně zatížené tenké ortotropní viskoelastické desky

Deska o rozměrech 250×250 a tloušťce 0,89 mm byla buzena dvěma způsoby. V prvním případě byla deska zatížena ve svém středu příčně působícím napětím rovnoměrně rozloženým na kruhové ploše o průměru 2 mm, jehož časová závislost byla dána skokovou funkcí. Řešena je její nestacionární napjatost. V druhém případě byla deska buzena dopadem ocelového razníku o průměru 5 mm a délce 10 mm ve směru kolmém na její horní rovinu. Řešena byla rázová napjatost desky. V obou případech byla deska na obvodu prostě podepřena.

Volíme-li buzení desky v jejím středu, potom můžeme při numerickém řešení užitím MKP (v našem případě systém Marc-Mentat), využít symetrie a řešit pouze čtvrtinu desky (obr. 4). Deska byla z jednosměrný kompozitu typu epoxy – uhlík (SE84LV/HSC/450/400/35) firmy LA composite Letňany, který se chová jako ortotropní a viskoelastické kontinuum. Pro řešení byly k dispozici všechny materiálové konstanty nutné k výpočtu ortotropní, příčně izotropní a viskoelastické desky.

Na obr. 4 je uvedeno schéma rázové úlohy. Je zde nakreslen detail středu desky, kam dopadá razník. Z obrázku je vidět způsob rozdělení razníku a desky na konečné prvky s využitím symetrie, tedy je modelována jenom čtvrtina razníku a desky. Osa razníku je ve směru osy z užitého souřadnicového systému. Osy x a y tohoto systému leží ve směru hran horní roviny desky, prochází místem dopadu razníku a tvoří tak pravouhlý souřadnicový systém. Výztužná uhlíková vlákna mají směr osy x .

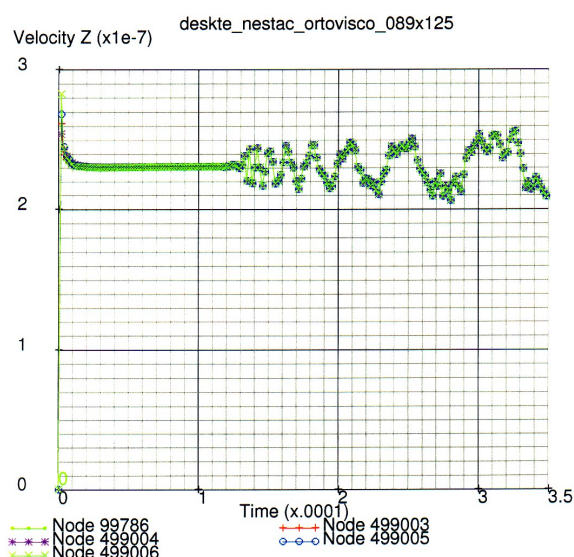
Pro nestacionární úlohu byl z MKP modelu vypuštěn razník a budící zatížení bylo aplikováno na čtvrtině kruhové plošky, ležící v rohu desky.



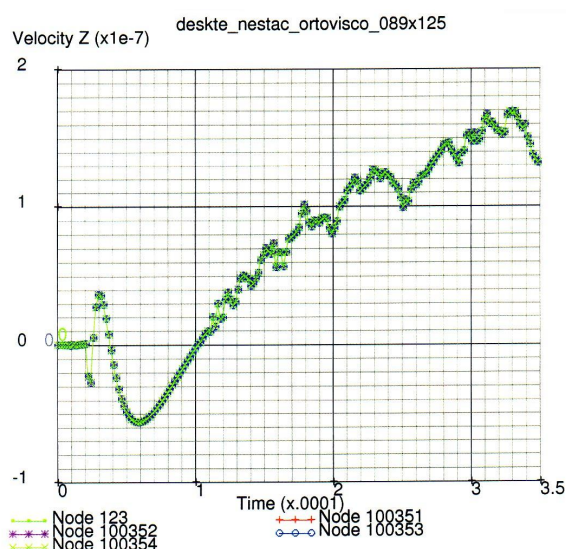
Obr. 4

Z obrázku je vidět způsob dělení desky a razníku. Po tloušťce byla deska rozdělena na čtyři vrstvy a ve středu je vytvořena válcová část o průměru 2 mm, na kterou působí buď budící napětí – nestacionární úloha, nebo dopadá razník – rázová úloha. Celkový počet elementů je $4 \cdot 10^5$ a jejich průměrná velikost je 0,3 mm. Pro časovou integraci byla použita metoda centrálních diferencí, jejíž stabilitní krok byl $1,89 \cdot 10^{-8}$ sec.

Výsledky numerického řešení první úlohy, tj. zatížená deska ve středu příčně působícím napětím rovnoměrně rozloženým na kruhové ploše na obr. 5 a obr. 6. Na obr. 5 jsou zobrazeny časové průběhy příčné rychlosti pro místo ve středu zatížení, na obr. 6 pak pro místo vzdálené od osy budícího napětí o 40 mm (obr. 6) ve směru výztužných vláken, tedy ve směru osy x. Velikost budícího napětí byla volena 1 Pa.



Obr. 5

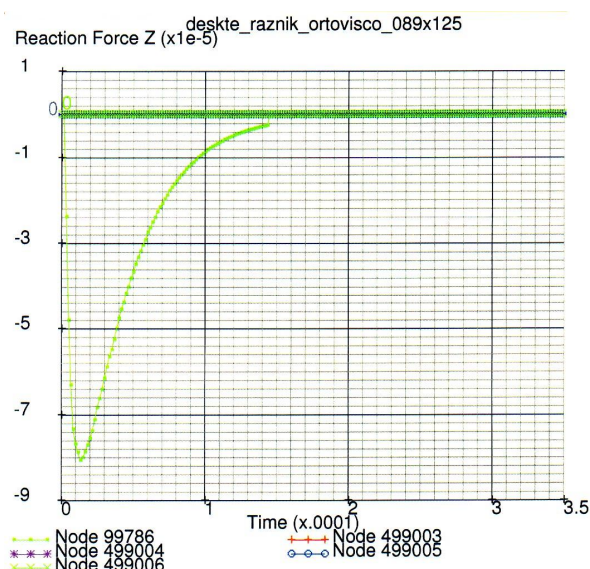


Obr. 6

Obrázky jsou ponechány ve tvaru, v jakém je zobrazí postprocesor MKP systému a jsou v nich zakresleny průběhy platící pro všechny uzly existující v daném místě přes celou tloušťku desky. Číslo uzlu jsou označena "Node...". Nerozlišitelnost jednotlivých průběhů znamená, že všechny uzly mají stejnou rychlost přes příčný rozměr desky, tedy že užitý model je skutečně modelem "tenké" desky. Průběhy byly počítány do času 350 mikrosekund. V obrázcích je časová osa označena Time(x.0001). Vynásobením údaje na ose koeficientem uvedeným v závorce dostaneme čas v sec. Na svislé ose je vynesena hodnota příčné rychlosti v ms^{-1} , kterou dostaneme opět vynásobením údaje na ose koeficientem v závorce. Velmi malé hodnoty rychlosti odpovídají zvolenému budícímu napětí 1 Pa. Protože řešíme lineární systém, bude hodnota rychlosti lineárně záviset na hodnotě použitého budícího napětí. Z obrázků vidíme zásadní rozdíl mezi těmito průběhy. Obr. 5 odpovídá místu ve středu zatížení, kde rychlost zůstává z části konstantní (až do času asi 120 mikrosek.) a potom kolísá kolem střední hodnoty. Čas 120 mikrosek. odpovídá příchodu odražených vln napětí od okrajů

desky. Uvažujeme-li místo mimo oblast zatížení - viz obr. 6 - vidíme zásadní rozdíl v průběhu. Zatímco v prvním příkladu má rychlost stále kladnou hodnotu, odpovídající směru působícího zatížení, má ve druhém příkladu na začátku pro krátké časy hodnotu proměnnou, což vyjadřuje rozvíjející se vlnový proces. I zde je jasně zřetelné ovlivnění průběhu příchodem odražených vln od okrajů desky.

Výsledky numerického řešení rázu razníku na tenkou ortotropní viskoelastickou desku jsou na obr. 7 a 8. Pro numerické řešení této úlohy bylo opět schématu podle obr. 4.

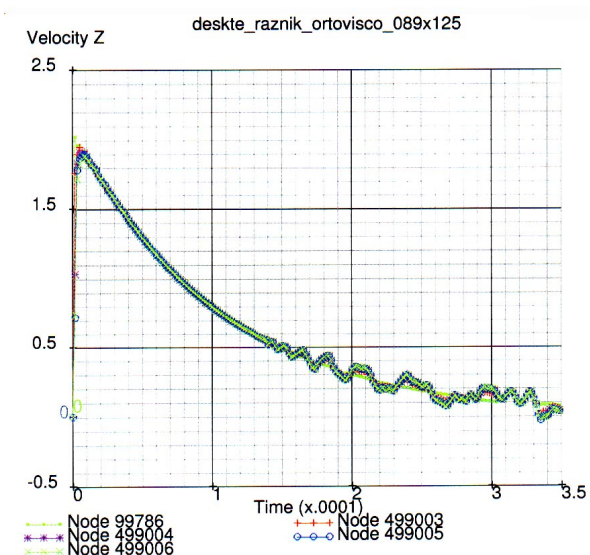


Obr. 7

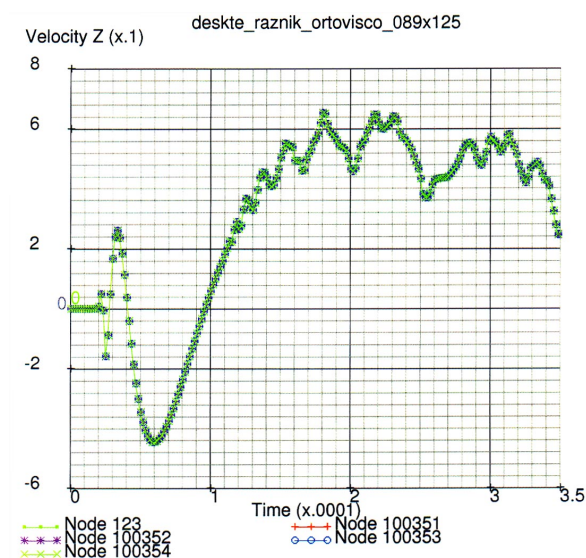
Razník dopadá do středu desky rychlostí 2 ms^{-1} . V místě dopadu je nutno řešit kontaktní problém. Aby toto řešení bylo korektní, musí být dělení razníku jemnější než dělení desky.

Kontaktní poměry můžeme sledovat na průběhu kontaktní síly v místě rázu. Na obr. 7 je zakreslen časový průběh rázové síly v uzlu na čele razníku, ležícího na ose razníku. Z tohoto průběhu lze určit především dobu rázu, která je v tomto případě asi 145 mikrosek. V tomto čase se razník odrazí od desky. Tím končí jeho vliv na pohyb a od tohoto okamžiku deska volně kmitá. Odrazení razníku nastane v okamžiku, kdy do místa rázu přijdou vlny odražené od okrajů desky.

Na všech ostatních průbězích má tento čas dominantní vliv na jejich chování. Do tohoto času jsou průběhy hladké, protože do tohoto času je pohyb desky vynucen razníkem, ale po odlehnutí razníku deska začne volně ohybově kmitat.



Obr. 8



Obr. 9

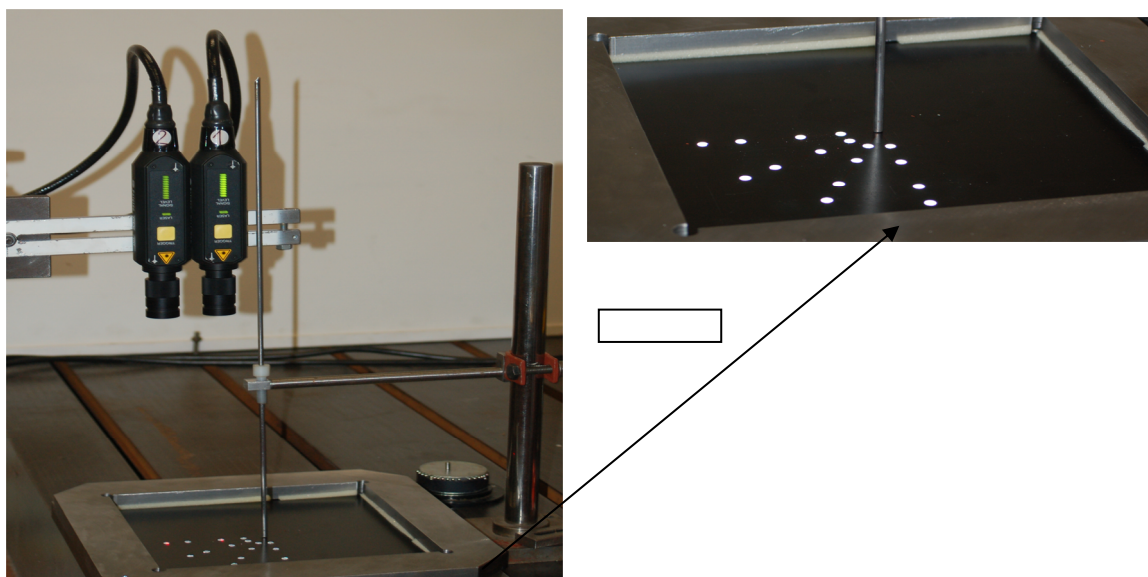
Na obr. 8 a obr. 9 jsou zakresleny časové průběhy příčné rychlosti jednak pro místo rázu (obr. 8) – a pro místo vzdálené od místa rázu o 40 mm ve směru osy x (obr. 9), tj. ve směru

výztužných vláken. Na průběžích je jasně patrný vliv vzdálenosti od místa rázu, projevující se snižováním maximálních amplitud a výraznou změnou. Zatímco u průběhu v místě rázu dojde v okamžiku rázu k téměř skokovému nárůstu rychlosti, která s rostoucím časem rychle klesá, u průběhu druhého odpovídají jeho změny opět rozvíjejícímu se vlnovému procesu

Průběhy jsou kresleny opět pro všechny uzly, které jsou v daném místě přes tloušťku desky. Stejně jako v předchozím případě je zde opět vidět, že deska, ačkoliv v MKP reprezentaci je brána jako 3D kontinuum, se pro zvolené parametry chová jako "tenká", protože jednotlivé křivky jsou téměř nerozlišitelné.

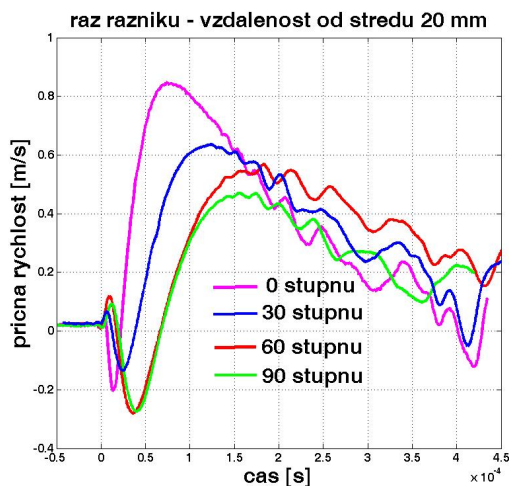
4. Experimentální řešení rázu razníku na tenkou ortotropní viskoelastickou desku

Věnujme nyní pozornost experimentálnímu řešení rázu razníku na tenkou desku. Cílem tohoto řešení bylo porovnat výsledky experimentu s výsledky získanými numericky užitím metody MKP a tím určit přesnost a možnosti obou metod. Při experimentu byla deska buzena dopadem stejného razníku a se stejnou rychlostí, jako v předchozí úloze. Rovněž tak rozměry desky a její vlastnosti byly stejné. Na obr. 10 vidíme celou sestavu. Deska je uložena v ocelovém rámečku. Nad deskou jsou umístěny dva snímače laserového interferometru, které jsou ocejchovány pro měření příčné rychlosti. Svislou tyčkou je znázorněn směr dopadu razníku. Šipkou je označen detail, na kterém je vidět umístění kruhových terčů vyrobených ze speciální odrazové hmoty. Středů těchto terčů odpovídají měřicím místům. Na ně je zaměřen paprsek interferometrů. Toto uspořádání umožňuje získat při každém pokusu průběhy pro dvě místa současně. Tím se ušetří počet pokusů. Zařízení zaručovalo dobrou reprodukovatelnost měření, která byla pro několik bodů prověřena provedením několika opakovaných měření.

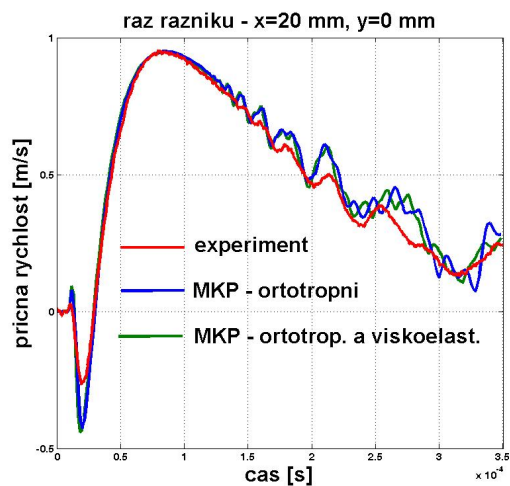


Obr. 10

Při experimentálních pracích byla provedena řada měření pro různé vzdálenosti od místa rázu, které byly 20, 40, 70 a 90 mm. Pro tyto vzdálenosti byl dále určen vliv směru měřicích linií vůči směru paprsků. To bylo provedeno pro směry 0, 30, 60 a 90 stupňů. Na obr. 10 jsou vidět řady kruhových terčů, vedených ke směrům výztužných vláken právě pod těmito úhly. Nulový úhel odpovídá směru vláken, 90 stupňů a značí směr kolmý na vlákna.



Obr. 11



Obr. 12

Na obr. 11 je ukázán právě tento vliv. Průběhy byly získány vyhodnocením experimentu a odpovídají směrem daným úhly 0° , 30° , 60° a 90° , a vzdálenosti 20 mm od místa rázu. Z obrázku je jasné patrné, že pro zvětšující se úhly klesá jak maximální amplituda, tak i strmost průběhů na začátku.

Na obr. 12 jsou nakresleny časové průběhy příčné rychlosti pro vzdálenost 20 mm od středu desky pro směr totožný se směrem vláken, tedy pro úhel 0° .

5. Závěr

Z provedeného srovnání experimentu a výpočtu MKP je provedeno na obr. 12. pro ortotropní desku (experiment – červená čára, výpočet modrá čára) a pro ortotropní viskoelastickou desku – zelená čára. Z tohoto porovnání vyplývá, že do času asi 120 mikrosek. jsou průběhy téměř shodné, po tomto čase se liší. Důvodem je skutečnost, že v uvedeném čase přijdou do místa vyšetřování odražené vlny od okrajů desky. Velmi malý rozdíl mezi ortotropní elastickou a ortotropní viskoelastickou deskou je zřejmě dán malou zatěžovací rychlostí. Tento výsledek ukazuje, že obě metody, jak experiment, tak i řešení MKP, dávají velmi dobrou shodu a jsou tedy vzájemně zastupitelné.

Jak je vidět z posledních dvou obrázků, je na obr. 11 amplituda průběhu odpovídající 0° poněkud menší, než je odpovídající amplituda získaná výpočtem. Tento rozdíl je zřejmě dán poněkud menší skutečnou citlivostí, než jaká je uváděná výrobcem.

Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantů GA ČR č. 101/06/0946 a č. 101/07/0588.

Literatura

Volek, J., Soukup, J.: (2003): *Transversale impact of elastic rod on thin elastic isotropic and orthotropic rectangular Plate*. In.: National Conference with International Participation Engineering Mechanics 2003, extended abstract proc. pp. 384 – 385, CD ROM 6 pages. UTAM AV ČR, Praha, 2003.

Soukup, J., Valeš, F., Volek, J.: (2008): *Vibration of thin rectangular viscoelastic orthotropic plates under transverse non-stationary loading*. In.: CD-ROM Proc. of the National

- Conference with International Participation Engineering Mechanics 2008, Svratka, 2008; extended abstract proc. pp. 212-213, full text 14 p. on CD ROM, FS VUT Brno, 2008.
- Soukup, J., Volek, J.: *Přechodové kmitání obdélníkové viskoelastické ortotropní desky III.* In.: VI. mezinárodní konference Dynamika tuhých a neformovatelných těles 2008, Ústí n. L., 17. – 19. 09. 2008, str. 217-226, FVTM Ústí n. L., 2008, ISBN 978-80-7414-030-3.
- Soukup, J., Volek, J.: *Non-stationary vibration of thin rectangular viscoelastic orthotropic plate IV.* In.: CD-ROM Proc. of the 24nd conference with international participation Computational Mechanics 2008, Hrad Nečtiny, 3 – 5. 11. 2008, ZČU FAV Plzeň, 2008.
- Soukup, J., Volek, J., Skočilas, J.: *Transient vibration of thin viscoelastic orthotropic plate under transverse impuls loading.* In.: Abstracts in 9th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, 17 – 20. 12. 2007, Lodž, Polsko, pp. 423-432.
- Soukup, J., Volek, J.: *Přechodové kmitání obdélníkové viskoelastické ortotropní desky I.* Acta Mechanica Slovaca, číslo 3-C/2008, roč. 12, str. 387-394, Košice, 2008.
- Soukup, J., Valeš, F., Volek, J.: *Přechodové kmitání obdélníkové viskoelastické ortotropní desky II.* Acta Mechanica Slovaca, číslo 3-B/2008 na CD ROM, roč. 12, str. 741-754, Košice, 2008.