ENGINEERING MECHANICS 2009
National Conference with International Participation
Svratka, Czech Republic, May 11 – 14, 2009

pp. 1233–1247
Paper **#106**

ON APPLICATION OF DISTRIBUTIONS TO COMPUTATIONS OF OPEN CROSS-SECTION THIN-WALLED BEAMS

J. Sobotka*

Summary: *The generalized mathematical model of thin-walled beams with warpable cross-section introduced in (Hýča, 2005) represents a consistent small-displacement theory for coupled bending and torsion of open cross-section thin-walled beams, which are subjected to general distributed loading. However, this model does not cover directly concentrated loading. This paper presents a new generalization of this model by means of distributions to involve concentrated loading. The derived system of ordinary differential equations (SODE) of the first order contains twelve unknown quantities and Dirac distribution at each point where discontinuity of an unknown quantity occurs. The general solution to the SODE is computed by means of the symbolic programming approach.*

1. Úvod

V článku (Hýča, 2005) byl publikován zobecněný matematický model tenkostěnného nosníku otevřeného profilu (TN) s deplanabilním průřezem. Tento model představuje konzistentní teorii malých deformací pro vázaný ohyb a kroucení TN s obecným měrným zatížením a může být vyjádřen pomocí soustavy tří lineárních vázaných obyčejných diferenciálních rovnic, z nichž každá je čtvrtého stupně. Tento matematický model přímo nezahrnuje osamělá zatížení.

Článek je věnován dalšímu zobecnění tohoto modelu vázaného ohybu a kroucení TN, aby umožňoval přímo zahrnout osamělá zatížení. Model obsahuje celkem 12 neznámých veličin. Jsou to průhyby ve směru os y, z, natočení příčného řezu kolem os y, z, úhel kroucení kolem podélné osy x, deplanační funkce, složky posouvající síly ve směru os y, z, složky ohybového momentu kolem os y, z, krouticí moment a bimoment. Nespojitá zatížení jsou vyjádřena pomocí distribucí. Obecné řešení systému obyčejných diferenciálních rovnice (SODR) zobecněného modelu TN je vypočteno pomocí symbolického programování.

Abychom vyjádřili osamělá zatížení a individuální vazbové reakce v podporách mezi konci nosníku v samotném matematickém modelu, použijeme definici distribuční derivace (Štěpánek, 2001), v níž vystupuje také klasická derivace prvního řádu neznámé veličiny. Z tohoto důvodu nejprve vyjádříme daný matematický model TN ve tvaru SODR prvního řádu. Při jeho odvození vyjdeme z variační formulace a z klasické definice hlavní sektoriální

* Ing. Jiří Sobotka, CEZ, a.s., 67550 Dukovany, tel. +420 561 10 5234, e-mail: jiri.sobotka@cez.cz

souřadnice (Vlasov, 1962). Vázaný ohyb a kroucení TN nejsou v modelu z (Hýča, 2005) ovlivněny měrným axiálním zatížením, a proto takové zatížení zde nebudeme uvažovat při odvození Eulerových-Lagrangeových rovnic modelu TN.

2. Kinematické vztahy pro body střednicové plochy tenkostěnného nosníku otevřeného profilu

Model (Hýča, 2005) má šest neznámých geometrických veličin

$$w_y(x),\ w_z(x),\ \phi_y(x),\ \phi_z(x),\ \phi(x),\ \phi_\omega(x)\ , \tag{1}$$

pomocí nichž se vyjádří složky posunutí bodů střednicové plochy TN takto

$$\mathrm{u}(x,s) = -\phi_y(x)\ \mathrm{z}(s) - \phi_z\ \mathrm{y}(s) - \phi_\omega\ \omega(s)\ , \tag{2}$$

$$v_t(x,s) = w_y(x)\left(\frac{d}{ds}\mathrm{y}(s)\right) + w_z(x)\left(\frac{d}{ds}\mathrm{z}(s)\right) + \phi(x)\ \mathrm{r}(s)\ , \tag{3}$$

kde

x	podélná osa TN,
Oyz	hlavní centrální souřadný systém v rovině příčného řezu TN,
$Oxyz$	levotočivý souřadný systém,
$w_y(x)$	průhyb ve směru osy y [m],
$w_z(x)$	průhyb ve směru osy z [m],
$\phi_y(x)$	natočení příčného řezu TN kolem příčné osy y podle pravotočivého šroubu [rad],
$\phi_z(x)$	natočení příčného řezu TN kolem příčné osy z podle levotočivého šroubu [rad],
$\phi(x)$	úhel kroucení TN kolem podélné osy x podle levotočivého šroubu [rad],
$\phi_\omega(x)$	deplanační funkce [rad m^{-1}],
$\mathrm{u}(x,s)$	složka posunutí bodu střednicové plochy ve směru osy x [m],
$v_t(x,s)$	složka posunutí bodu střednicové plochy TN ve směru tečny ke střednici profilu příčného řezu [m],
$\omega(s)$	hlavní sektoriální souřadnice (dle levotočivého šroubu) [m^2] (Vlasov, 1962),
s	orientovaná křivočará souřadnice podél střednice profilu příčného řezu [m],
$\mathrm{r}(s) = \frac{d}{ds}\omega(s)$	rameno tečny ke střednici profilu s pólem v klasickém středu smyku [m] (Vlasov, 1962),
$[w_y(x), w_z(x)]$	vektor posunutí příčného řezu v rovině Oyz,
$\left[\frac{d}{ds}\mathrm{y}(s), \frac{d}{ds}\mathrm{z}(s)\right]$	směrový vektor tečny ke střednici profilu příčného řezu v rovině Oyz.

Úhly natočení $\phi_y(x)$, $\phi_z(x)$ příčného řezu umožňují lineární aproximaci deplanace příčného řezu vlivem posouvající síly. Deplanační funkce $\phi_\omega(x)$ umožňuje výsečovou aproximaci deplanace příčného řezu při stísněném kroucení. První dva členy na pravé straně (3) představují skalární součin vektoru posunutí příčného řezu v rovině *Oyz* a směrového vektoru tečny ke střednici profilu příčného řezu.

3. Složky Cauchyho tenzoru přetvoření při rovinné napjatosti ve stěně tenkostěnného nosníku

Předpokládá se, že příčný řez TN je tuhý ve své rovině, a proto je

$$\varepsilon_s(x, s) = 0 \ . \tag{4}$$

Přetvoření střednicové plochy v podélném směru TN je

$$\varepsilon_x(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{u}(x, s) \ . \tag{5}$$

Zkos v rovině *xs* je určen výrazem

$$\gamma_{xs}(x, s, \zeta) = 2\,\zeta \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{u}(x, s) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_t(x, s) \right) \ , \tag{6}$$

kde

ζ	souřadnice ve směru kolmém ke střednicové ploše z intervalu < -n/2, n/2 > [m]
n = n(s)	tloušťka stěny [m].

Součet druhého a třetího členu na pravé straně (6) vyjadřuje zkos samotné střednicové plochy, který se však v práci (Vlasov, 1962) zanedbává.

4. Celková potenciální energie tenkostěnného nosníku otevřeného profilu

$$\mathrm{W} = \iiint_V \frac{1}{2} E\, \varepsilon_x^{\,2} + \frac{1}{2} G\, \gamma_{xs}^{\,2}\, ds\, d\zeta\, dx - \int_0^l p_y\, w_y + p_z\, w_z - m_y\, \phi_y + m_z\, \phi_z + m_k\, \phi - m_\omega\, \phi_\omega\, dx \tag{7}$$

a po dosazení z (2), (3), (5) a (6) dostaneme obecně

$$\mathrm{W} = \int_0^l \mathrm{F}\left(x, w_y, w_z, \phi_y, \phi_z, \phi, \phi_\omega, \frac{d}{dx} w_y(x), \frac{d}{dx} w_z(x), \frac{d}{dx} \phi_y(x), \frac{d}{dx} \phi_z(x), \frac{d}{dx} \phi(x), \frac{d}{dx} \phi_\omega(x) \right) dx \ , \tag{8}$$

kde

$p_y = p_y(x)$	složka měrného příčného zatížení ve směru osy *y* působící v klasickém středu smyku [Nm^{-1}],
$p_z = p_z(x)$	složka měrného příčného zatížení ve směru osy *z* působící v klasickém středu smyku [Nm^{-1}],
$m_y = m_y(x)$	složka měrného ohybového zatížení kolem osy *y* orientovaná proti natočení $\phi_y(x)$ [N],

$m_z = m_z(x)$	složka měrného ohybového zatížení kolem osy z orientovaná souhlasně s $\phi_z(x)$ [N],
$m_k = m_k(x)$	měrné krouticí zatížení kolem osy x orientované podle levotočivého šroubu [N],
$m_\omega = m_\omega(x)$	měrné bimomentové zatížení orientované souhlasně s $\omega(s)$ [Nm],
E	modul pružnosti v tahu materiálu nosníku [Pa],
G	modul pružnosti ve smyku materiálu nosníku [Pa],
μ	Poissonova konstanta materiálu TN; předpoklad: $1 \gg \mu^2$,
l	délka nosníku [m].

5. Podmínky minima celkové potenciální energie

Nulová hodnota první variace celkové potenciální energie (8) vede na rovnice tvaru (Rao, 1982)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial \psi_x} F\right)(x) = \frac{\partial}{\partial \psi} F \ , \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi_x} F\right)\delta(\psi)\bigg|_{x=l} - \left(\frac{\partial}{\partial \psi_x} F\right)\delta(\psi)\bigg|_{x=0} = 0 \ , \tag{10}$$

pro šest závisle proměnných geometrických veličin ψ z množiny závisle proměnných

$$\{\phi, \phi_y, \phi_z, \phi_\omega, w_y, w_z\} \ , \tag{11}$$

přičemž

$$\psi_x = \frac{d}{dx}\psi(x) \ . \tag{12}$$

Výrazy tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \psi_x} F \tag{13}$$

jsou tzv. zobecněné vnitřní síly z množiny

$$\{M_k(x), -M_y(x), M_z(x), -\mathrm{B}(x), T_y(x), T_z(x)\} \ , \tag{14}$$

přičemž ψ je z množiny (11) (ve shodném pořadí), kde

$M_k(x)$	krouticí moment orientovaný podle levotočivého šroubu vzhledem k podélné ose [Nm],
$M_y(x)$	složka ohybového momentu kolem osy y, orientovaná podle levotočivého šroubu a vyvolávající zápornou křivost v rovině Oxz [Nm],
$M_z(x)$	složka ohybového momentu kolem osy z orientovaná podle levotočivého šroubu a vyvolávající kladnou křivost v rovině Oxy [Nm],
$\mathrm{B}(x)$	bimoment orientovaný souhlasně s $\omega(s)$ [Nm^2],
$T_y(x)$	složka posouvající síly ve směru osy y působící v klasickém středu smyku [N],
$T_z(x)$	složka posouvající síly ve směru osy z působící v klasickém středu smyku [N].

Poznámka: Záporné znaménko u $M_y(x)$ v (14) je vlivem zvolené orientace opačné vůči $\phi_y(x)$. Záporné znaménko u B(x) v (14) je vlivem zvolené orientace ω(s) podle levotočivého šroubu vzhledem k ose x.

Výpočet derivací (13) integrandu F z (8) podle derivací jednotlivých geometrických veličin z množiny (11) dává výsledné vnitřní silové účinky ve tvaru

$$T_y(x) = A\,G\left(\left(\left(\frac{d}{dx}w_z(x)\right) - \phi_y(x)\right)\delta_{y,z} + \left(\left(\frac{d}{dx}w_y(x)\right) - \phi_z(x)\right)\delta_{y,y} + \left(\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right) - \phi_\omega(x)\right)\delta_{y,\omega}\right), \tag{15}$$

$$T_z(x) = A\,G\left(\left(\left(\frac{d}{dx}w_z(x)\right) - \phi_y(x)\right)\delta_{z,z} + \left(\left(\frac{d}{dx}w_y(x)\right) - \phi_z(x)\right)\delta_{y,z} + \left(\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right) - \phi_\omega(x)\right)\delta_{z,\omega}\right), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} M_k(x) = {} & A\,G\left(\left(\left(\frac{d}{dx}w_z(x)\right) - \phi_y(x)\right)\delta_{z,\omega} + \left(\left(\frac{d}{dx}w_y(x)\right) - \phi_z(x)\right)\delta_{y,\omega} + \left(\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right) - \phi_\omega(x)\right)\delta_{\omega,\omega}\right) \\ & + G\,J_k\left(\frac{d}{dx}\phi(x)\right) \end{aligned}, \tag{17}$$

$$M_y(x) = -E\,J_y\left(\frac{d}{dx}\phi_y(x)\right), \tag{18}$$

$$M_z(x) = E\,J_z\left(\frac{d}{dx}\phi_z(x)\right), \tag{19}$$

$$\mathrm{B}(x) = -E\,J_\omega\left(\frac{d}{dx}\phi_\omega(x)\right), \tag{20}$$

kde

$$\delta_{p,q} = \frac{1}{A}\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{d}{ds}\mathrm{p}(s)\right)\left(\frac{d}{ds}\mathrm{q}(s)\right)\mathrm{n}(s)\,ds\ ,\ (p,\ q = y,\ z,\ \omega)\ , \tag{21}$$

J_k	geometrický faktor tuhosti při čistém kroucení TN [m^4],
J_y	kvadratický moment plochy příčného řezu k ose y [m^4],
J_z	kvadratický moment plochy příčného řezu k ose z [m^4],
J_ω	odpor vůči deplanaci [m^6],
A	plocha příčného řezu [m^2],
s_1	hodnota křivočaré souřadnice počátku střednice profilu příčného řezu [m],
s_2	hodnota křivočaré souřadnice konce střednice profilu příčného řezu [m].

6. Model vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného profilu ve tvaru systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (9) a zobecněné vnitřní síly (15) až (20) vedou na hledaný SODR prvního řádu

$$\frac{d}{dx} T_z(x) = -p_z(x) \ , \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx} M_y(x) = T_z(x) - m_y(x) \ , \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_y(x) = -\frac{M_y(x)}{E\,J_y} \ , \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx} w_z(x) = a_1\,T_y(x) + a_2\,T_z(x) + a_3\,M_k(x) + a_4\,\phi_\omega(x) + \phi_y(x) \ , \tag{25}$$

$$\frac{d}{dx} T_y(x) = -p_y(x) \ , \tag{26}$$

$$\frac{d}{dx} M_z(x) = -T_y(x) - m_z(x) \ , \tag{27}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_z(x) = \frac{M_z(x)}{E\,J_z} \ , \tag{28}$$

$$\frac{d}{dx} w_y(x) = b_1\,T_y(x) + b_2\,T_z(x) + b_3\,M_k(x) + b_4\,\phi_\omega(x) + \phi_z(x) \ , \tag{29}$$

$$\frac{d}{dx} M_k(x) = -m_k(x) \ , \tag{30}$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{B}(x) = M_k(x) - G\,J_k \left(\frac{d}{dx}\phi(x) \right) - m_\omega(x) \ , \tag{31}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_\omega(x) = -\frac{\mathrm{B}(x)}{E\,J_\omega} \ , \tag{32}$$

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = c_1\,T_y(x) + c_2\,T_z(x) + c_3\,M_k(x) + c_4\,\phi_\omega(x) \ . \tag{33}$$

Rovnice (25), (29) a (33) vznikly řešením soustavy (15) až (17), přičemž koeficienty jsou

$$a_1 = \frac{-\delta_{y,\omega}\,\delta_{z,\omega} + \delta_{y,z}\,\delta_{\omega,\omega} + \dfrac{\delta_{y,z}\,J_k}{A}}{\Delta_1\,G} \ , \tag{34}$$

$$a_2 = \frac{\delta_{y,\omega}{}^2 - \delta_{y,y}\,\delta_{\omega,\omega} - \dfrac{\delta_{y,y}\,J_k}{A}}{\Delta_1\,G} \ , \tag{35}$$

$$a_3 = \frac{\delta_{z,\omega}\,\delta_{y,y} - \delta_{y,z}\,\delta_{y,\omega}}{\Delta_1\,G} \ , \tag{36}$$

$$a_4 = \frac{(\delta_{y,z}\,\delta_{y,\omega} - \delta_{z,\omega}\,\delta_{y,y})\,J_k}{\Delta_1} \ , \tag{37}$$

$$b_1 = \frac{\delta_{z,\omega}{}^2 - \delta_{\omega,\omega}\,\delta_{z,z} - \dfrac{J_k\,\delta_{z,z}}{A}}{\Delta_1\,G} \ , \tag{38}$$

$$b_2 = a_1 \ , \tag{39}$$

$$b_3 = \frac{-\delta_{y,z}\,\delta_{z,\omega} + \delta_{y,\omega}\,\delta_{z,z}}{\Delta_1\,G} \ , \tag{40}$$

$$b_4 = \frac{(\delta_{y,z}\,\delta_{z,\omega} - \delta_{y,\omega}\,\delta_{z,z})\,J_k}{\Delta_1} \ , \qquad (41)$$

$$c_1 = b_3 \ , \qquad (42)$$

$$c_2 = a_3 \ , \qquad (43)$$

$$c_3 = \frac{\delta_{y,z}^{\ 2} - \delta_{z,z}\,\delta_{y,y}}{G\,\Delta_1} \ , \qquad (44)$$

$$c_4 = 1 - G\,J_k\,c_3 \ , \qquad (45)$$

kde

$$\Delta_1 = (\delta_{\omega,\omega}\,\delta_{y,z}^{\ 2} - \delta_{\omega,\omega}\,\delta_{z,z}\,\delta_{y,y} - 2\,\delta_{z,\omega}\,\delta_{y,\omega}\,\delta_{y,z} + \delta_{z,\omega}^{\ 2}\,\delta_{y,y} + \delta_{y,\omega}^{\ 2}\,\delta_{z,z})\,A + (\delta_{y,z}^{\ 2} - \delta_{z,z}\,\delta_{y,y})\,J_k \ . \qquad (46)$$

Matematický model, tvořený rovnicemi (22) až (33), obsahuje klasické derivace zobecněných vnitřních sil (22), (23), (26), (27), (30), (31), které jsou závislé na měrných zatíženích. Avšak osamělá zatížení přímo v těchto rovnicích zahrnuta nejsou. Při použití klasických derivací to ani není možné. Důvodem toho je to, že idealizovaná osamělá zatížení vyvolávají nespojitosti v průběhu zobecněných vnitřních sil.

Abychom výrazně zmenšili pracnost analytického výpočtu TN při působení osamělých zatížení mezi jeho konci, zobecníme výše uvedený model tak, aby přímo umožňoval implementovat působící osamělá zatížení. To je možné tehdy, když opustíme prostor klasických funkcí a pro neznámé veličiny zvolíme prostor zobecněných funkcí (distribuce). Klasické derivace zobecněných vnitřních sil nahradíme distribučními derivacemi (Štěpánek, 2001) s Diracovou singulární distribucí, která je umístěna vždy do místa nespojitosti zobecněné vnitřní síly a násobena velikostí její nespojitosti. Pokud velikost nespojitosti není známa, jako je tomu kupříkladu u soustředěné vazbové reakce mezi konci nosníku, musíme k jejímu určení doplnit deformační podmínku.

7. Distribuční derivace zobecněných vnitřních sil

Distribuční derivace složky posouvající síly s jedním bodem nespojitosti v $x = d_{z1}$ je

$$\frac{d}{dx}\,T_z(x) = -p_z(x) + [\,T_z\,]_{d_{z1}}\ \mathrm{Dirac}(x - d_{z1}) \ , \qquad (47)$$

kde

$$[\,T_z\,]_{d_{z1}} = \left(\lim_{x \to d_{z1}^{+}} T_z(x)\right) - \left(\lim_{x \to d_{z1}^{-}} T_z(x)\right) \ . \qquad (48)$$

Velikost nespojitosti (48) se určí z podmínky silové rovnováhy elementu nosníku, odříznutého spolu s osamělým břemenem. V idealizovaném případě je délka takového elementu nosníku dx = 0 a podmínka rovnováhy je

$$F_{z1} + \left(\lim_{x \to d_{z1}^{+}} T_z(x)\right) - \left(\lim_{x \to d_{z1}^{-}} T_z(x)\right) = 0 \ , \qquad (49)$$

kde

F_{z1}	velikost osamělého břemene v místě $x = d_{z1}$ ($0 < d_{z1}$), působící v klasickém středu smyku ve směru hlavní centrální osy z [N].

Rozdíl jednostranných limit (48) vypočteme z (49) a dosadíme do (47). Tak dostaneme konečný tvar distribuční derivace pro jednu složku posouvající síly s jedním bodem skokové nespojitosti

$$\frac{d}{dx} T_z(x) = -p_z(x) - F_{z1} \operatorname{Dirac}(x - d_{z1}) \ . \tag{50}$$

Podobně postupujeme u druhé složky posouvající síly.

Distribuční derivace složky ohybového momentu s jedním bodem nespojitosti v $x = e_{y1}$ je

$$\frac{d}{dx} M_y(x) = T_z(x) - m_y(x) + [M_y]_{e_{y1}} \operatorname{Dirac}(x - e_{y1}) \ , \tag{51}$$

kde

$$[M_y]_{e_{y1}} = \left(\lim_{x \to e_{y1}+} M_y(x) \right) - \left(\lim_{x \to e_{y1}-} M_y(x) \right) \ . \tag{52}$$

Velikost nespojitosti (52) se určí z podmínky momentové rovnováhy elementu nosníku, odříznutého spolu s osamělou silovou dvojicí. V idealizovaném případě je délka takového elementu nosníku dx = 0 a podmínka momentové rovnováhy je

$$C_{y1} + \left(\lim_{x \to e_{y1}+} M_y(x) \right) - \left(\lim_{x \to e_{y1}-} M_y(x) \right) = 0 \ , \tag{53}$$

kde

C_{y1}	velikost osamělé silové dvojice v místě $x = e_{y1}$ ($0 < e_{y1}$), orientované podle pravidla levotočivého šroubu vzhledem k hlavní centrální ose y [Nm].

Rozdíl jednostranných limit (52) vypočteme z (53) a dosadíme do (51). Tak dostaneme konečný tvar distribuční derivace pro jednu složku ohybového momentu s jedním bod skokové nespojitosti

$$\frac{d}{dx} M_y(x) = T_z(x) - m_y(x) - C_{y1} \operatorname{Dirac}(x - e_{y1}) \ . \tag{54}$$

Podobně postupujeme u druhé složky ohybového momentu.

Distribuční derivace krouticího momentu s jedním bodem nespojitosti v $x = g_1$ je

$$\frac{d}{dx} M_k(x) = -m_k(x) + [M_k]_{g_1} \operatorname{Dirac}(x - g_1) \ , \tag{55}$$

kde

$$[M_k]_{g_1} = \left(\lim_{x \to g_1+} M_k(x) \right) - \left(\lim_{x \to g_1-} M_k(x) \right) \ . \tag{56}$$

Velikost nespojitosti (56) se určí z podmínky momentové rovnováhy elementu nosníku, odříznutého spolu s osamělou krouticí silovou dvojicí. V idealizovaném případě je délka takového elementu nosníku dx = 0, pro který je podmínka momentové rovnováhy

$$C_{k1} + \left(\lim_{x \to g_1+} M_k(x) \right) - \left(\lim_{x \to g_1-} M_k(x) \right) = 0 \ , \tag{57}$$

kde

C_{k1}	velikost osamělé krouticí silové dvojice v místě $x = g_1$ ($0 < g_1$), která je orientována dle pravidla levotočivého šroubu vzhledem k podélné ose tenkostěnného nosníku [Nm].

Rozdíl jednostranných limit (56) vypočteme z (57) a dosadíme do (55). Tak dostaneme konečný tvar distribuční derivace pro vnitřní krouticí moment s jedním bodem nespojitosti

$$\frac{d}{dx} M_k(x) = -m_k(x) - C_{k1}\, \mathrm{Dirac}(x - g_1) \;. \tag{58}$$

Distribuční derivace vnitřního bimomentu s jedním bodem nespojitosti v $x = h_1$ je

$$\frac{d}{dx} \mathrm{B}(x) = M_k(x) - G\, J_k \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right) - m_\omega(x) + [B]_{h_1} \mathrm{Dirac}(x - h_1) \;, \tag{59}$$

kde

$$[B]_{h_1} = \left(\lim_{x \to h_1+} \mathrm{B}(x) \right) - \left(\lim_{x \to h_1-} \mathrm{B}(x) \right) \;. \tag{60}$$

Velikost nespojitosti (60) se určí z podmínky silové rovnováhy elementu střednicové plochy tenkostěnného nosníku, odříznutého spolu se zatížením $p_1(s)$, které působí podél střednice profilu příčného řezu ve směru osy x

$$\left(\lim_{x \to h_1+} \sigma_x(x, s) \right) dA + p_1(s)\, ds - \left(\lim_{x \to h_1-} \sigma_x(x, s) \right) dA = 0 \;. \tag{61}$$

Do rovnice (61) nyní dosadíme za normálové napětí

$$\sigma_x(x, s) = \frac{M_y(x)\, \mathrm{z}(s)}{J_y} - \frac{M_z(x)\, \mathrm{y}(s)}{J_z} + \frac{\mathrm{B}(x)\, \omega(s)}{J_\omega} \;, \tag{62}$$

vynásobíme hlavní sektoriální souřadnicí a integrujeme po celé ploše příčného řezu. Dostáváme tak rovnici

$$\left(\lim_{x \to h_1+} \mathrm{B}(x) \right) + B_1 - \left(\lim_{x \to h_1-} \mathrm{B}(x) \right) = 0 \;, \tag{63}$$

z níž vypočteme velikost nespojitosti (60) a dosadíme do (59). Tak dostaneme konečný tvar distribuční derivace pro vnitřní bimoment s jedním bodem skokové nespojitosti

$$\frac{d}{dx} \mathrm{B}(x) = M_k(x) - G\, J_k \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right) - m_\omega(x) - B_1\, \mathrm{Dirac}(x - h_1) \;, \tag{64}$$

kde velikost osamělého bimoment je

$$B_1 = \int_{s_1}^{s_2} p_1(s)\, \omega(s)\, ds \;. \tag{65}$$

8. Zobecněný matematický model vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného profilu s distribucemi

Předpokládejme, že zobecněné vnitřní síly mají následující nespojitosti vlivem vnějšího osamělého zatížení nebo uložení mezi konci tenkostěnného nosníku:

i) $T_y(x)$ má skokové nespojitosti F_{yi} v místech $x = d_{yi}$, kde $0 < d_{yi}$ a $i = 1 .. n_1$.

ii) $T_z(x)$ má skokové nespojitosti F_{zi} v místech $x = d_{zi}$, kde $0 < d_{zi}$ a $i = 1 .. n_2$.

iii) $M_y(x)$ má skokové nespojitosti C_{yi} v místech $x = e_{yi}$, kde $0 < e_{yi}$ a $i = 1 .. n_3$.

iv) $M_z(x)$ má skokové nespojitosti C_{zi} v místech $x = e_{zi}$, kde $0 < e_{zi}$ a $i = 1 .. n_4$.

v) $M_k(x)$ má skokové nespojitosti C_{ki} v místech $x = g_i$, kde $0 < g_i$ a $i = 1 .. n_5$.

vi) $\mathrm{B}(x)$ má skokové nespojitosti B_i v místech $x = h_i$, kde $0 < h_i$ a $i = 1 .. n_6$.

Distribuční derivace (50), (54), (58), (64) můžeme zobecnit pro výše uvedené počty nespojitostí, a tak obdržíme hledané zobecnění SODR vázaného ohybu a kroucení TN pro konečný počet skokových nespojitostí v průběhu zobecněných vnitřních sil

$$\frac{d}{dx} T_z(x) = -p_z(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_2} F_{zi} \operatorname{Dirac}(x - d_{zi}) \right) , \tag{66}$$

$$\frac{d}{dx} M_y(x) = T_z(x) - m_y(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_3} C_{yi} \operatorname{Dirac}(x - e_{yi}) \right) , \tag{67}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_y(x) = -\frac{M_y(x)}{E J_y} , \tag{68}$$

$$\frac{d}{dx} w_z(x) = a_1 T_y(x) + a_2 T_z(x) + a_3 M_k(x) + a_4 \phi_\omega(x) + \phi_y(x) , \tag{69}$$

$$\frac{d}{dx} T_y(x) = -p_y(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_{yi} \operatorname{Dirac}(x - d_{yi}) \right) , \tag{70}$$

$$\frac{d}{dx} M_z(x) = -T_y(x) - m_z(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_4} C_{zi} \operatorname{Dirac}(x - e_{zi}) \right) , \tag{71}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_z(x) = \frac{M_z(x)}{E J_z} , \tag{72}$$

$$\frac{d}{dx} w_y(x) = b_1 T_y(x) + a_1 T_z(x) + b_3 M_k(x) + b_4 \phi_\omega(x) + \phi_z(x) , \tag{73}$$

$$\frac{d}{dx} M_k(x) = -m_k(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_5} C_{ki} \operatorname{Dirac}(x - g_i) \right) , \tag{74}$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{B}(x) = M_k(x) - G J_k \left(\frac{d}{dx} \phi(x) \right) - m_\omega(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_6} B_i \operatorname{Dirac}(x - h_i) \right) , \tag{75}$$

$$\frac{d}{dx} \phi_\omega(x) = -\frac{\mathrm{B}(x)}{E J_\omega} , \tag{76}$$

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = b_3 T_y(x) + a_3 T_z(x) + c_3 M_k(x) + (1 - G J_k c_3) \phi_\omega(x) . \tag{77}$$

9. Výpočet obecného řešení zobecněného modelu vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného profilu

Při výpočtu řešení SODR (66) až (77) použijeme Laplaceovu metodu, v níž se postupuje ve třech krocích:

i) zobrazení SODR v Laplaceově transformaci,
ii) výpočet obrazů neznámých veličin jako řešení soustavy lineárních algebraických rovnic,

iii) výpočet vzorů k obrazům neznámých veličin pomocí inverzní Laplaceovy transformace.

Pro stručnější zápis řešení zavedeme pomocnou veličinu vztahem

$$\Omega^2 = \frac{G\,J_k\,(1 - G\,J_k\,c_3)}{E\,J_\omega} \;. \tag{78}$$

Zobrazení SODR (66) až (77) v Laplaceově transformaci vede na soustavu lineárních algebraických rovnic

$$p\ \mathrm{laplace}(T_z(x), x, p) - T_z(0) = -\mathrm{laplace}(p_z(x), x, p) - \left(\sum_{i=1}^{n_2} F_{zi}\,\mathrm{e}^{(-p\,d_{zi})}\right), \tag{79}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(M_y(x), x, p) - M_y(0) = \mathrm{laplace}(T_z(x), x, p) - \mathrm{laplace}(m_y(x), x, p) - \left(\sum_{i=1}^{n_3} C_{yi}\,\mathrm{e}^{(-p\,e_{yi})}\right), \tag{80}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(\phi_y(x), x, p) - \phi_y(0) = -\frac{\mathrm{laplace}(M_y(x), x, p)}{E\,J_y}, \tag{81}$$

$$\begin{aligned} p\ \mathrm{laplace}(w_z(x), x, p) - w_z(0) &= a_1\,\mathrm{laplace}(T_y(x), x, p) + a_2\,\mathrm{laplace}(T_z(x), x, p) \\ &+ a_3\,\mathrm{laplace}(M_k(x), x, p) + a_4\,\mathrm{laplace}(\phi_\omega(x), x, p) + \mathrm{laplace}(\phi_y(x), x, p) \end{aligned}, \tag{82}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(T_y(x), x, p) - T_y(0) = -\mathrm{laplace}(p_y(x), x, p) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_{yi}\,\mathrm{e}^{(-p\,d_{yi})}\right), \tag{83}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(M_z(x), x, p) - M_z(0) = -\mathrm{laplace}(T_y(x), x, p) - \mathrm{laplace}(m_z(x), x, p) - \left(\sum_{i=1}^{n_4} C_{zi}\,\mathrm{e}^{(-p\,e_{zi})}\right), \tag{84}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(\phi_z(x), x, p) - \phi_z(0) = \frac{\mathrm{laplace}(M_z(x), x, p)}{E\,J_z}, \tag{85}$$

$$\begin{aligned} p\ \mathrm{laplace}(w_y(x), x, p) - w_y(0) &= b_1\,\mathrm{laplace}(T_y(x), x, p) + a_1\,\mathrm{laplace}(T_z(x), x, p) \\ &+ b_3\,\mathrm{laplace}(M_k(x), x, p) + b_4\,\mathrm{laplace}(\phi_\omega(x), x, p) + \mathrm{laplace}(\phi_z(x), x, p) \end{aligned}, \tag{86}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(M_k(x), x, p) - M_k(0) = -\mathrm{laplace}(m_k(x), x, p) - \left(\sum_{i=1}^{n_5} C_{ki}\,\mathrm{e}^{(-p\,g_i)}\right), \tag{87}$$

$$\begin{aligned} p\ \mathrm{laplace}(\mathrm{B}(x), x, p) - \mathrm{B}(0) &= \mathrm{laplace}(M_k(x), x, p) - G\,J_k\,p\ \mathrm{laplace}(\phi(x), x, p) + G\,J_k\,\phi(0) \\ &- \mathrm{laplace}(m_\omega(x), x, p) - \left(\sum_{i=1}^{n_6} B_i\,\mathrm{e}^{(-p\,h_i)}\right) \end{aligned}, \tag{88}$$

$$p\ \mathrm{laplace}(\phi_\omega(x), x, p) - \phi_\omega(0) = -\frac{\mathrm{laplace}(\mathrm{B}(x), x, p)}{E\,J_\omega}, \tag{89}$$

$$\begin{aligned} p\ \mathrm{laplace}(\phi(x), x, p) - \phi(0) &= b_3\,\mathrm{laplace}(T_y(x), x, p) + a_3\,\mathrm{laplace}(T_z(x), x, p) \\ &- \frac{\mathrm{laplace}(M_k(x), x, p)\,\Omega^2\,J_\omega\,E}{G^2\,J_k^{\,2}} + \frac{\mathrm{laplace}(M_k(x), x, p)}{G\,J_k} + \frac{\Omega^2\,J_\omega\,E\,\mathrm{laplace}(\phi_\omega(x), x, p)}{G\,J_k} \end{aligned}, \tag{90}$$

kde

$\text{laplace}(\,\text{f}(x), x, p\,)$	obraz veličiny $\text{f}(x)$ v Laplaceově transformaci,
p	komplexní proměnná v Laplaceově obrazu,
f(0)	hodnota veličiny $\text{f}(x)$ v levém koncovém bodě nosníku (počátek).

Z důvodu omezeného rozsahu tohoto článku uvedeme dále pouze obecné řešení pro úhel kroucení a deplanační funkci. Jejich obrazy dostaneme z řešení soustavy (79) až (90) ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\text{laplace}(\,\phi(x), x, p\,) &= \frac{\phi(0)}{p} + \frac{b_3\, T_y(0)}{p^2-\Omega^2} + \frac{a_3\, T_z(0)}{p^2-\Omega^2} + \left(\frac{1}{p^2 J_k G} - \frac{\Omega^2 E J_\omega}{J_k^{\,2}\,(p^2-\Omega^2)\,G^2}\right) M_k(0) \\
&+ \frac{E J_\omega\, \Omega^2\, \phi_\omega(0)}{(p^2-\Omega^2)\, G J_k} - \frac{\Omega^2\, \text{B}(0)}{(p^2-\Omega^2)\, G J_k\, p} - \left(\sum_{i=1}^{n_2} \frac{a_3\, F_{zi}\, \text{e}^{(-p\, d_{zi})}}{p^2-\Omega^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{b_3\, F_{yi}\, \text{e}^{(-p\, d_{yi})}}{p^2-\Omega^2}\right) \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n_5} \left(\frac{-p^2+\Omega^2}{(p^2-\Omega^2)\, p^2 J_k G} + \frac{\Omega^2 E J_\omega}{J_k^{\,2}\,(p^2-\Omega^2)\, G^2}\right) C_{ki}\, \text{e}^{(-p\, g_i)}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_6} \frac{B_i\, \Omega^2\, \text{e}^{(-p\, h_i)}}{p\,(p^2-\Omega^2)\, G J_k}\right) \\
&- \frac{a_3\, \text{laplace}(p_z(x), x, p)}{p^2-\Omega^2} - \frac{b_3\, \text{laplace}(p_y(x), x, p)}{p^2-\Omega^2} + \frac{\Omega^2\, \text{laplace}(\,m_\omega(x), x, p\,)}{(p^2-\Omega^2)\, G J_k\, p} \\
&+ \left(\frac{-p^2+\Omega^2}{(p^2-\Omega^2)\, p^2 J_k G} + \frac{\Omega^2 E J_\omega}{J_k^{\,2}\,(p^2-\Omega^2)\, G^2}\right) \text{laplace}(\,m_k(x), x, p\,)
\end{aligned} \quad , \qquad (91)$$

$$\begin{aligned}
\text{laplace}(\,\phi_\omega(x), x, p\,) &= \frac{p\, \phi_\omega(0)}{p^2-\Omega^2} + \frac{G J_k\, b_3\, T_y(0)}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)\, p} + \frac{G J_k\, a_3\, T_z(0)}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)\, p} - \frac{\Omega^2\, M_k(0)}{G J_k\,(p^2-\Omega^2)\, p} \\
&- \frac{\text{B}(0)}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)} - \left(\sum_{i=1}^{n_2} \frac{G J_k\, a_3\, F_{zi}\, \text{e}^{(-p\, d_{zi})}}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)\, p}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{G J_k\, b_3\, F_{yi}\, \text{e}^{(-p\, d_{yi})}}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)\, p}\right) \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n_5} \frac{\Omega^2\, C_{ki}\, \text{e}^{(-p\, g_i)}}{G J_k\,(p^2-\Omega^2)\, p}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_6} \frac{B_i\, \text{e}^{(-p\, h_i)}}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)}\right) + \frac{\Omega^2\, \text{laplace}(\,m_k(x), x, p\,)}{G J_k\,(p^2-\Omega^2)\, p} \\
&- \frac{G J_k\, a_3\, \text{laplace}(p_z(x), x, p)}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)\, p} - \frac{G J_k\, b_3\, \text{laplace}(p_y(x), x, p)}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)\, p} + \frac{\text{laplace}(\,m_\omega(x), x, p\,)}{E J_\omega\,(p^2-\Omega^2)}
\end{aligned} \quad . \qquad (92)$$

Rovnice (91) až (92) musely být vzhledem ke své značné délce zapsány na několika řádcích, přičemž symbol početní operace na počátku pokračujícího řádku není obsažen na konci řádku předchozího. Důvodem je to, že uvedené rovnice byly sestaveny v počítačovém programu jakožto výkonné příkazy. Opakování symbolů základních početních operací by v počítačovém příkazu způsobilo chybu.

Inverzní transformací pravých stran (91), (92) dostaneme pro úhel kroucení $\phi(x)$ a deplanační funkci $\phi_\omega(x)$

$$\phi(x)=\phi(0)+\frac{b_3\sinh(\Omega\,x)\,T_y(0)}{\Omega}+\frac{a_3\sinh(\Omega\,x)\,T_z(0)}{\Omega}+\left(\frac{x}{J_k\,G}-\frac{\Omega\,E\,J_\omega\sinh(\Omega\,x)}{J_k^2\,G^2}\right)M_k(0)$$
$$+\frac{(1-\cosh(\Omega\,x))\,\mathrm{B}(0)}{J_k\,G}+\frac{\Omega\,E\,J_\omega\sinh(\Omega\,x)\,\phi_\omega(0)}{J_k\,G}$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\mathrm{Heaviside}(x-d_{yi})\sinh(\Omega\,(x-d_{yi}))\,b_3\,F_{yi}}{\Omega}\right)$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{a_3\,\mathrm{Heaviside}(x-d_{zi})\sinh(\Omega\,(x-d_{zi}))\,F_{zi}}{\Omega}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n_5}\left(-\frac{x-g_i}{J_k\,G}+\frac{\sinh(\Omega\,(x-g_i))\,J_\omega\,\Omega\,E}{J_k^2\,G^2}\right)\mathrm{Heaviside}(x-g_i)\,C_{ki}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n_6}\frac{2\,\mathrm{Heaviside}(x-h_i)\left[\sinh\left(\frac{\Omega\,(x-h_i)}{2}\right)\right]^2 B_i}{J_k\,G}\right)-\left(\frac{a_3}{\Omega}\int_0^x p_z(\xi)\sinh(\Omega\,(x-\xi))\,d\xi\right)$$
$$-\left(\frac{b_3}{\Omega}\int_0^x p_y(\xi)\sinh(\Omega\,(x-\xi))\,d\xi\right)+\frac{1}{G\,J_k}\int_0^x m_\omega(\xi)\,(\cosh(\Omega\,(x-\xi))-1)\,d\xi$$
$$+\int_0^x m_k(\xi)\left(\frac{\Omega\,E\,J_\omega\sinh(\Omega\,(x-\xi))}{J_k^2\,G^2}-\frac{x-\xi}{J_k\,G}\right)d\xi\quad,\qquad(93)$$

$$\phi_\omega(x)=\phi_\omega(0)\cosh(\Omega\,x)+\frac{G\,J_k\,b_3\,(-1+\cosh(\Omega\,x))\,T_y(0)}{E\,J_\omega\,\Omega^2}$$
$$+\frac{G\,J_k\,(-1+\cosh(\Omega\,x))\,a_3\,T_z(0)}{E\,J_\omega\,\Omega^2}+\frac{(1-\cosh(\Omega\,x))\,M_k(0)}{G\,J_k}-\frac{\mathrm{B}(0)\sinh(\Omega\,x)}{E\,J_\omega\,\Omega}$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2\,J_k\,G\,b_3\,\mathrm{Heaviside}(x-d_{yi})\left[\sinh\left(\frac{\Omega\,(x-d_{yi})}{2}\right)\right]^2 F_{yi}}{E\,J_\omega\,\Omega^2}\right)$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{2\,J_k\,G\left[\sinh\left(\frac{\Omega\,(x-d_{zi})}{2}\right)\right]^2\mathrm{Heaviside}(x-d_{zi})\,a_3\,F_{zi}}{E\,J_\omega\,\Omega^2}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n_5}\frac{2\,\mathrm{Heaviside}(x-g_i)\left[\sinh\left(\frac{\Omega\,(x-g_i)}{2}\right)\right]^2 C_{ki}}{G\,J_k}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n_6}\frac{B_i\,\mathrm{Heaviside}(x-h_i)\sinh(\Omega\,(x-h_i))}{E\,J_\omega\,\Omega}\right)$$

$$-\frac{G\,b_3\,J_k\int_0^x p_y(\xi)\,(\cosh(\Omega\,(x-\xi))-1)\,d\xi}{E\,J_\omega\,\Omega^2}-\frac{G\,J_k\,a_3\int_0^x p_z(\xi)\,(\cosh(\Omega\,(x-\xi))-1)\,d\xi}{E\,J_\omega\,\Omega^2}+\frac{1}{G\,J_k}\int_0^x m_k(\xi)\,(\cosh(\Omega\,(x-\xi))-1)\,d\xi+\frac{1}{E\,J_\omega\,\Omega}\int_0^x m_\omega(\xi)\,\sinh(\Omega\,(x-\xi))\,d\xi \quad .\ (94)$$

10. Závěry

Příspěvek tohoto článku je v tom, že byl odvozen SODR (66) až (77) modelu vázaného ohybu a kroucení tenkostěnného nosníku otevřeného profilu, který platí pro nespojité průběhy posouvající síly, ohybového momentu, krouticího momentu a bimomentu. Nespojitosti těchto veličin jsou vyvolány působením idealizovaných osamělých zatížení nebo idealizovaných osamělých vazbových reakcí mezi konci nosníku a v rovnicích (66), (67), (70), (71), (74), (75) jsou vyjádřeny pomocí Diracovy distribuce.

Nespojitosti v průběhu měrných zatížení nemění platnost klasických derivací zobecněných vnitřních sil (22), (23), (26), (27), (30), (31), a proto tyto rovnice platí i pro nespojitá měrná zatížení, která se vyjádří pomocí Heavisideovy skokové funkce.

Obecné řešení SODR (66) až (77) bylo vypočteno Laplaceovou metodou pomocí symbolického programování v systému Maple. Z důvodu omezení rozsahu tohoto článku je zde uvedeno řešení pouze pro úhel kroucení (93) a deplanační funkci (94). Integrační konstanty jsou ve tvaru počátečních parametrů jakožto přímý důsledek aplikace Laplaceovy transformace.

11. Poděkování

Autor tohoto článku děkuje svému Ph.D. školiteli, prof. Ing. M. Hýčovi, DrSc. z TU Liberec, za jeho cenné připomínky.

12. Literatura

Angot, A. (1972) *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. SNTL, Praha.

Bruhns , O. (2003) *Advanced Mechanics of Solids*. Springer, Berlin.

Hýča, M. (1972) Anwendung der Dirac-Deltafunktion zur Berechnung der Biegung gerader Balken mit Schubverformung. *Wiss. Z. Techn.* Univers. Dresden 21 H.1

Hýča, M. (1987) TORSION-BENDING ANALYSIS OF SHEAR-DEFORMABLE OPEN CROSS-SECTION BEAMS SUBJECT TO TORSIONAL LOADING, *1st Conference on Mechanics,* Czechoslovak Academy of Science, Prague.

Hýča, M. (1994) COUPLED BENDING AND TORSION OF OPEN CROSS-SECTION THIN-WALLED BEAMS, *17th Czech and Slovak International Conference on Steel Structures and Bridges*, Bratislava.

Hýča, M. (2005) GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF THINWALLED BEAMS WITH WARPABLE CROSS-SECTION, *Sborník semináře k životnímu jubileu prof. Ing. Cyrila Höschla, DrSc.*, Liberec.

Hýča, M. (2005) Analysis of Geometrically Imperfect Beam-Columns Subjected to Discontinuous Lateral and Bending Moment Loads by Using Distributions, in: Proc. *1st Int. Conf. on Innovation and Integration in Aerospace Sciences*, Queen's University, Belfast.

Janatka, J. (1961) *Přímé tenkostěnné nosníky*. SNTL, Praha.

Kanwal , R. P. (2004) *Generalized Functions*. Birkhäuser, Boston.

Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. (1975) *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. SNTL, Praha.

Librescu, L. & Song, O. (2006) *Thin-walled composite beams: theory and application*. Springer, Dordrecht, The Netherlands.

Míka, S. & Kufner, A. (1983) *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*. SNTL, Praha.

Němec J., Dvořák J. & Höschl C. (1989) *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. SNTL, Praha.

Panc, Vl. (1959) *Statika tenkostěnných prutů a konstrukcí*, NČSAV, Praha.

Ponomarev, S. D. a kol. (1956) *Rasčety na pročnosť v mašinostrojenii*. Mašgiz, Moskva.

Rao, S. S. (1982) *The finite element method in engineering*. Pergamon Press, Oxford.

Schwartz, L. (1972*) Matematické metody ve fyzice*. SNTL, Praha.

Sobotka, J. (2006) On Applications of Generalized Functions to Calculations of Beam Design Elements. *Engineering Mechanics*, paper no. 232

Sobotka, J. (2007) On Applications of Generalized Functions to Calculations of Beam-Column Design Elements. *Engineering Mechanics*, paper no. 125

Sobotka, J. (2008) ON APPLICATIONS OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATION OF THIN-WALLED BEAM DESIGN ELEMENTS SUBJECT TO NON-UNIFORM TORSION. *ENGINEERING MECHANICS*

Štěpánek, J. (2001) *Matematika pro přírodovědce. Distribuce a diferenciální rovnice*. Karolinum, Praha.

Veit, J. (1983) *Integrální transformace*. SNTL, Praha.

Vlasov, V. Z. (1962) *Tenkostěnné pružné pruty*. SNTL, Praha.

Yavari, A., Sarkani, S.& Moyer, E. T. Jr (2000) On applications of generalized functions to beam bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp.5675-5705.

Yavari, A.& Sarkani, S. (2001) On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, pp. 1543-1562.