ENGINEERING MECHANICS 2009
National Conference with International Participation
Svratka, Czech Republic, May 11 – 14, 2009
pp. 1217–1232
Paper **#105**

ON APPLICATION OF GENERALIZED FUNCTIONS TO CALCULATIONS OF THIN-WALLED BEAMS UNDER PLANE BENDING CONSIDERING CONSTRAINED WARPING

J. Sobotka*

Summary: *When a thin-walled beam is bent secondary membrane stresses may arise owing to the restraint of warping. These secondary stresses may have the same order as primary stresses which may be calculated according to the classical Bernoulli-Navier hypothesis. In order to simplify the practical computations of these secondary stresses we modify the mathematical model (Hýča, 1990) to be valid also at such points where discontinuities of unknown quantities occur. To solve this task we use generalized functions. The discontinuities may be expressed using the Heaviside unit step function or Dirac distribution. The general solution to the mathematical model with generalized functions of the thin-walled beam with constrained warping is computed by means of the Laplace transform method.*

1. Úvod

V článku (Hýča,1990) byl publikován matematický model výpočtu rovinného ohybu přímého tenkostěnného nosníku (TN), který zahrnuje vliv omezení deplanací příčného řezu na velikost ohybového napětí podél střednice profilu příčného řezu. Na základě první funkční aproximace zkosu střednicové plochy tenkostěnného nosníku byl odvozen model v (Hýča, 1974).

Sekundární napětí, která vznikají vlivem stísnění deplanací při ohybu nosníků s relativně malou štíhlostí, mohou být stejného řádu jako napětí primární, která se vypočtou podle klasické Bernoulli-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti příčného řezu. Abychom usnadnili výpočet sekundárních ohybových napětí v praxi, zobecníme matematický model z (Hýča, 1974) takovým způsobem, aby umožňoval přímo zahrnout vliv nespojitostí v zatížení tenkostěnného nosníku, v jeho uložení a od vložených rotačních kinematických dvojic, spojujících jednotlivé segmenty nosníku. Toho dosáhneme pomocí Diracovy distribuce, která vystupuje v definici distribuční derivace (Kanwal, 2004). Nespojitý průběh měrného příčného zatížení lze vyjádřit přímo pomocí Heavisideovy schodové funkce. Obecné řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic (SODR) s distribucemi vypočteme pomocí Laplaceovy transformace.

* Ing. Jiří Sobotka, ČEZ, a.s., 67550 Dukovany, tel. +420 561 10 5234, e-mail: jiri.sobotka@cez.cz

2. Matematický model ohybu tenkostěnného prizmatického nosníku se stísněnou deplanací příčného řezu

V článku (Hýča, 1974) byla uvedena soustava diferenciálních rovnic pro stísněný rovinný ohyb tenkostěnného prizmatického nosníku symetrického profilu s osou symetrie ležící v rovině *Oxz* příčného zatížení

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}\,\mathrm{w}(x)\right)+\beta\left(\frac{d^3}{dx^3}\,\rho(x)\right)=\frac{\mathrm{q}(x)}{E\,J_y}\ , \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}\,\mathrm{w}(x)\right)+\frac{\chi\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\rho(x)\right)}{\beta}=\frac{G\,A\,\rho(x)}{E\,J_y}\ , \tag{2}$$

kde

w(x)	průhyb nosníku [m],
$\rho(x)$	deplanační funkce [1],
q(x)	měrné příčné zatížení [Nm^{-1}],
E	modul pružnosti v tahu materiálu nosníku [Pa],
G	modul pružnosti ve smyku materiálu nosníku [Pa],
A	plocha příčného řezu nosníku [m^2],
J_y	kvadratický moment plochy příčného řezu TN k hlavní centrální ose *y* [m^4].

Tato soustava byla odvozena na základě první funkční aproximace zkosu střednicové plochy tenkostěnného nosníku

$$\gamma_{xs}=\rho(x)\,\Pi(s) \tag{3}$$

se známou průřezovou funkcí

$$\Pi(s)=\frac{A\,S_y(s)}{J_y\,\mathrm{t}(s)}\ , \tag{4}$$

kde statický moment části plochy příčného řezu TN se vypočte dle

$$S_y(s)=\int_0^s \mathrm{z}(\eta)\,\mathrm{t}(\eta)\,d\eta\ . \tag{5}$$

Koeficienty v (1) a (2) se vypočtou ze vzorců

$$\beta=\frac{A}{J_y^{\,2}}\int_0^{l_p}\frac{S_y(s)^2}{\mathrm{t}(s)}\,ds\ ,\qquad \chi=\frac{1}{J_y}\int_0^{l_p}\Lambda_y(s)^2\,\mathrm{t}(s)\,ds\ , \tag{6}$$

se známou průřezovou funkcí

$$\Lambda_y(s) = \frac{A\left(\displaystyle\int_0^s \frac{S_y(\eta)}{t(\eta)}\,d\eta - \int_0^{l_p} \frac{\left(1 - \frac{A(s)}{A}\right) S_y(s)}{t(s)}\,ds\right)}{J_y} \quad , \tag{7}$$

přičemž $\quad A(s) = \displaystyle\int_0^s t(\eta)\,d\eta \quad$ a zároveň $\quad \beta = -\left(\frac{1}{J_y}\int_0^{l_p} \Lambda_y(s)\,z(s)\,t(s)\,ds\right) \quad , \qquad (8)$

kde

l_p	celková délka střednice profilu příčného řezu TN [m],
$t(s)$	tloušťka stěny tenkostěnného nosníku [m],
s	délka oblouku střednice profilu příčného řezu [m].

Ze (4) a (7) je patrný vztah

$$\Pi(s) = \frac{d}{ds}\Lambda_y(s) \quad . \tag{9}$$

Abychom mohli vyjádřit v matematickém modelu stísněného ohybu TN nespojitosti neznámých výsledných vnitřních silových účinků nebo geometrických parametrů, potřebujeme mít tento model ve tvaru SODR prvního řádu. Vyjdeme proto z variační formulace modelu stísněného ohybu TN. Složka posunutí v podélném směru $u(x,s)$ bodů střednicové plochy TN má dvě komponenty

$$u(x,s) = u_1(x,s) + u_2(x,s) \quad , \tag{10}$$

kde

$$u_1(x,s) = -\left(\frac{d}{dx} w(x)\right) z(s) \tag{11}$$

vyjadřuje hypotézu Bernoulli-Navierovu a $u_2(x,s)$ deplanaci příčného řezu. Tuto složku určíme pomocí geometrického vztahu pro zkos střednicové plochy TN

$$\gamma_{xs}(x,s) = \left(\frac{\partial}{\partial s} u(x,s)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_t(x,s)\right) \quad , \tag{12}$$

kde složka posunutí bodu střednicové plochy TN ve směru tečny ke střednici profilu příčného řezu je

$$v_t(x,s) = w(x)\left(\frac{d}{ds} z(s)\right) \quad , \tag{13}$$

což je skalární součin vektoru posunutí příčného řezu a směrového vektoru tečny ke střednici profilu příčného řezu. Do (12) dosadíme z (3), (9), (10), (11), (13), tudíž pro deplanaci příčného řezu dostaneme rovnici

$$\frac{\partial}{\partial s} u_2(x) = \rho(x)\left(\frac{d}{ds}\Lambda_y(s)\right) \quad . \tag{14}$$

Z rovnice (14) dostaneme

$$u_2(x,s) = \rho(x)\,\Lambda_y(s) \quad . \tag{15}$$

Předpokládáme, že pole posunutí $u(x,s)$ je symetrické vůči hlavní centrální ose z a anti-metrické vůči hlavní centrální ose y. Splnění těchto předpokladů zajistí průřezové funkce (4) a

(7), pokud podpory nosníku budou na úrovni jeho těžišťové osy y souměrně k rovině ohybu TN.

Do (10) dosadíme z (11), (15), a tak dostaneme

$$\mathrm{u}(x,s) = -\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{w}(x)\right) \mathrm{z}(s) + \rho(x)\,\Lambda_y(s)\ . \tag{16}$$

Proto poměrné přetvoření TN v podélném směru je

$$\varepsilon_x(x,s) = -\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{w}(x)\right) \mathrm{z}(s) + \left(\frac{d}{dx}\,\rho(x)\right) \Lambda_y(s)\ . \tag{17}$$

Předpokládá se, že příčné řezy TN jsou vyztuženy diafragmaty, které jsou tuhé ve své rovině. Proto poměrné přetvoření střednice profilu příčného řezu je

$$\varepsilon_s = 0\ . \tag{18}$$

Na základě toho vyjde napětí v axiálním směru pro rovinný stav napjatosti v TN

$$\sigma_x = \frac{E\,\varepsilon_x}{1-\mu^2}\ , \tag{19}$$

kde μ je Poissonova konstanta materiálu TN. Zavedeme označení

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\ . \tag{20}$$

Do celkové potenciální energie elastického TN

$$\mathrm{W} = \iiint_V \frac{1}{2} E_1\,\varepsilon_x^{\ 2} + \frac{1}{2} G\,\gamma_{xs}^{\ 2}\ ds\,d\zeta\,dx - \int_0^l \mathrm{q}(x)\,\mathrm{w}(x)\,dx \tag{21}$$

dosadíme ze (17), (3) a dostaneme obecně

$$\mathrm{W} = \int_0^l \mathrm{F}\left(x, \mathrm{w}(x), \frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x), \rho(x), \frac{d}{dx}\rho(x)\right) dx\ . \tag{22}$$

Nulová hodnota první variace tohoto funkcionálu vede na následující podmínky

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}F\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2}(-\mathrm{M}(x))\right) = 0\ , \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho}F\right) - \left(\frac{d}{dx}M_d(x)\right) = 0\ , \tag{24}$$

$$\mathrm{T}(x)\,\delta(w)\big|_{x=l} - \mathrm{T}(x)\,\delta(w)\big|_{x=0} = 0\ , \tag{25}$$

$$\mathrm{M}(x)\,\delta\!\left(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)\right)\Big|_{x=l} - \mathrm{M}(x)\,\delta\!\left(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)\right)\Big|_{x=0} = 0\ , \tag{26}$$

$$M_d(x)\,\delta(\rho)\big|_{x=l} - M_d(x)\,\delta(\rho)\big|_{x=0} = 0\ , \tag{27}$$

přičemž zobecněné vnitřní síly jsou

$$\mathrm{T}(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{M}(x)\ , \tag{28}$$

$$M(x) = -E_1 J_y \left(\left(\frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \beta \left(\frac{d}{dx} \rho(x) \right) \right) , \tag{29}$$

$$M_d(x) = E_1 J_y \left(\beta \left(\frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \chi \left(\frac{d}{dx} \rho(x) \right) \right) , \tag{30}$$

Kde

$T(x)$	posouvající síla [N],
$M(x)$	ohybový moment [Nm],
$M_d(x)$	deplanační moment [Nm],
l	délka nosníku [m].

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (23), (24) mají po dosazení tvar

$$\frac{d}{dx} T(x) = -q(x) , \tag{31}$$

$$\frac{d}{dx} M_d(x) = G\, A\, \beta\, \rho(x) , \tag{32}$$

Hledané vyjádření matematického modelu stísněného ohybu tenkostěnného prizmatického nosníku ve formě SODR prvního řádu je

$$\frac{d}{dx} T(x) = -q(x) , \tag{33}$$

$$\frac{d}{dx} M(x) = T(x) , \tag{34}$$

$$\frac{d}{dx} M_d(x) = \Delta\, \rho(x) , \tag{35}$$

$$\frac{d}{dx} \rho(x) = \frac{\omega^2 \left(M_d(x) + \beta\, M(x) \right)}{\Delta} , \tag{36}$$

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = -\frac{\omega^2 \left(\beta\, M_d(x) + \chi\, M(x) \right)}{\Delta} , \tag{37}$$

$$\frac{d}{dx} w(x) = \phi(x) , \tag{38}$$

kde

$$\Delta = G\, A\, \beta , \tag{39}$$

$$\omega^2 = \frac{\Delta}{E\, J_y (\chi - \beta^2)} \quad \text{pro } 1 >> \mu^2. \tag{40}$$

3. Rozdělení nespojitostí v zatížení, uložení a geometrii tenkostěnného prizmatického nosníku při stísněném ohybu a jejich vyjádření pomocí Heavisideovy schodové funkce a Diracovy distribuce

Nespojitosti daných veličin (způsob zatížení, uložení a geometrie), které se mohou v tomto případě u TN vyskytnout, můžeme rozdělit do dvou skupin podle jejich vlivu na vznik nespojitostí neznámých veličin v SODR (33) až (38).

Do první skupiny daných nespojitostí zařadíme všechny po částech spojité průběhy měrného příčného zatížení q(x) a průřezových funkcí. Takovéto nespojitosti nevyvolávají skokovou změnu žádné z neznámých veličin v SODR (33) až (38). Měrné zatížení a průřezové funkce tenkostěnného profilu můžeme proto vyjádřit přímo pomocí Heavisideovy nespojité funkce, kterou budeme dále zapisovat jako Heaviside(x).

Do druhé skupiny daných nespojitostí zařadíme taková osamělá břemena, osamělé vazbové reakce, osamělé silové dvojice a vložené rotační kinematické dvojice, které jsou umístěny mezi konci nosníku. Tyto prvotní nespojitosti vyvolávají sekundární nespojitosti, které se objevují v průběhu výsledných vnitřních silových účinků nebo neznámých geometrických veličin, jako je natočení příčného řezu, deplanační moment nebo deplanační funkce.

Schwedlerovy věty (33), (34) neplatí v bodech nespojitostí z druhé skupiny vlivem idealizovaného průběhu zatížení osamělými silami, silovými dvojicemi nebo od osamělých reakcí v podporách mezi konci nosníku. Abychom obnovili platnost těchto podmínek rovnováhy elementu nosníku při výskytu nespojitostí z druhé skupiny, použijeme vyjádření pro distribuční derivaci (Štěpánek, 2001)

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x) = \{\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x)\} + [f]_{x_0}\ \mathrm{Dirac}(x - x_0)\ , \tag{41}$$

kde

$\{\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(x)\}$	klasická derivace,
$[f]_{x_0}$	velikost nespojitosti veličiny f(x) v bodě $x = x_0$; $[f]_{x_0} = \mathrm{f}(x_0 + 0) - \mathrm{f}(x_0 - 0)$
$\mathrm{f}(x_0 + 0)$	limita f(x) v bodě x_0 zprava,
$\mathrm{f}(x_0 - 0)$	limita f(x) v bodě x_0 zleva,
$\mathrm{Dirac}(x - x_0$	Diracova distribuce působící v bodě $x = x_0$.

4. Distribuční derivace posouvající síly, ohybového momentu, natočení, deplanačního momentu a deplanační funkce s jedním bodem skokové nespojitosti

Abychom určili velikost nespojitosti posouvající síly, uvolníme délkový element nosníku v místě působení osamělého břemene nebo v místě osamělé podpory, které se nacházejí v bodě mezi konci nosníku. Silová podmínka rovnováhy elementu nosníku s osamělým břemenem o velikosti F_1 ve vzdálenosti $x= a_1$ od levého konce nosníku je

$$F_1 + \mathrm{T}(a_1 + 0) - \mathrm{T}(a_1 - 0) = 0\ . \tag{42}$$

Velikost hledané nespojitosti posouvající síly je

$$[T]_{a_1} = -F_1\ . \tag{43}$$

Distribuční derivace posouvající síly s jedním bodem skokové nespojitosti od osamělého břemene je

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{T}(x) = -\mathrm{q}(x) - F_1\ \mathrm{Dirac}(x - a_1)\ , \tag{44}$$

přičemž $0 < a_1 < l$, kde l je délka nosníku. Kdyby veličina F_1 byla neznámá vazbová reakce v podpoře mezi konci nosníku, museli bychom pro její určení sestavit příslušnou deformační podmínku.

Abychom určili velikost nespojitosti ohybového momentu, uvolníme délkový element nosníku spolu s osamělou silovou dvojicí. Momentová podmínka rovnováhy v případě silové dvojice o velikosti M_1 působící ve vzdálenosti $x = b_1$ od levého konce nosníku je

$$M_1 + \mathrm{M}(b_1 - 0) - \mathrm{M}(b_1 + 0) = 0 \quad . \tag{45}$$

Velikost hledané nespojitosti ohybového momentu je

$$[M]_{b_1} = M_1 \quad . \tag{46}$$

Distribuční derivace ohybového momentu s jedním bodem nespojitosti od osamělé silové dvojice proto je

$$\frac{d}{dx}\mathrm{M}(x) = \mathrm{T}(x) + M_1 \,\mathrm{Dirac}(x - b_1) \,, \tag{47}$$

přičemž $0 < b_1 < l$.

Nechť TN je rozdělen na dva segmenty spojené rotační kinematickou dvojicí ve vzdálenosti $x = c_1$ od levého konce nosníku. V místě tohoto vloženého kloubu se může objevit nespojitost v natočení příčného řezu o velikosti Φ_1 . Distribuční derivace natočení příčného řezu nosníku pro jeden bod nespojitosti je

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = -\frac{\omega^2\,(\beta\, M_d(x) + \chi\, \mathrm{M}(x))}{\Delta} + \Phi_1 \,\mathrm{Dirac}(x - c_1) \quad . \tag{48}$$

K určení neznámé hodnoty Φ_1 musíme použít deformační podmínku kloubu. Pokud uvažovaný kloub mezi segmenty nosníku neobsahuje torzní pružinu, je přenášený ohybový moment roven nule. Dále musíme uvážit způsob napojení vloženého kloubu na čela jednotlivých segmentů nosníku. Existují čtyři základní možnosti takového konstrukčního provedení:

a. Vložený kloub je k čelům segmentů nosníku napojen pomocí ohybově dokonale tuhých desek.

b. Kinematická dvojice je provedena tak, že obě čela kloubově napojených segmentů mohou volně deplanovat.

c. Čelo levého segmentu je opatřeno ohybově tuhou deskou, zatímco protilehlé čelo sousedního segmentu v místě téhož kloubu může volně deplanovat.

d. Čelo pravého segmentu je opatřeno ohybově tuhou deskou, zatímco protilehlé čelo sousedního segmentu v místě téhož kloubu může volně deplanovat.

Ad a)
Je-li kloub napojen pomocí ohybově dokonale tuhých desek, nebudou konce segmentů v místě kloubu deplanovat, a proto dle (16) bude

$$\rho(x)\Big|_{x = c_1} = 0 \quad . \tag{49}$$

Vlivem ohybově tuhých desek na čelech segmentů nosníku se na těchto čelech zároveň objeví deplanační momenty, a tak se v místě $x = c_1$ může objevit skoková nespojitost deplanačního momentu s distribuční derivací

$$\frac{d}{dx} M_d(x) = \Delta\ \rho(x) + \Theta_1\ \mathrm{Dirac}(x - c_1)\ . \tag{50}$$

Neznámá hodnota nespojitosti Θ_1 deplanačního momentu v místě vloženého kloubu mezi segmenty nosníku se určí na základě deformační podmínky (49).

Ad b)
Na obou čelech TN, která mohou volně deplanovat, bude normálné napětí nulové, a tak bude v místě takového kloubu nulový i deplanační moment

$$M_d(x)\Big|_{x = c_1} = 0\ . \tag{51}$$

Deformační podmínku (51) musíme použít, abychom vypočetli velikost příslušné nespojitosti v průběhu deplanační funkce

$$\frac{d}{dx}\rho(x) = \frac{\omega^2\ (M_d(x) + \beta\ \mathrm{M}(x))}{\Delta} + \mathrm{P}_1\ \mathrm{Dirac}(x - c_1)\ . \tag{52}$$

Ad c)
Uvažujme, že čelo segmentu zleva uvažovaného vloženého kloubu je vyztuženo ohybově dokonale tuhou deskou. Čelo segmentu z pravé strany kloubu budiž volně deplanabilní. Kromě nespojitosti v natočení příčného řezu objeví se v takovémto kloubu skokové nespojitosti v deplanačním momentu a deplanační funkci. K určení těchto dvou dodatečných nespojitostí použijeme dvě doplňující deformační podmínky kloubu

$$\lim_{x \to c_1 -} \rho(x) = 0\ , \qquad \lim_{x \to c_1 +} M_d(x) = 0\ . \tag{53}$$

Ad d)
V tomto případě, kdy je ohybově tuhé čelo segmentu zprava vloženého kloubu a čelo zleva volně deplanabilní, jsou deformační podmínky

$$\lim_{x \to c_1 -} M_d(x) = 0\ , \qquad \lim_{x \to c_1 +} \rho(x) = 0\ . \tag{54}$$

Podobně jako výše uvedené nespojitosti vlivem vloženého kloubu nosníku bychom mohli zavést nespojitost vlivem vložené posuvné kinematické dvojice, spojující sousední segmenty téhož nosníku.

Na rozdíl od skokových nespojitostí posouvající síly nebo ohybového momentu, které vznikají idealizací soustředěného zatížení nebo soustředěných reakcí v podporách mezi konci nosníku, jsou nespojitosti v natočení příčného řezu, deplanační funkci a deplanačním momentu reálné veličiny v místech vložených kloubů TN.

5. Zobecněný SODR modelu stísněného ohybu tenkostěnného prizmatického nosníku s konečným počtem nespojitostí v posouvající síle, ohybovém momentu, deplanačním momentu a úhlu natočení příčného řezu

Nechť posouvající síla T(x) má skokové nespojitosti o velikosti $F_1, F_2, \ldots, F_{n_1}$ v bodech $x = a_1, \ldots\ a_{n_1}$ vlivem idealizovaných osamělých břemen nebo vazbových reakcí, přičemž $0 < a_1, \ldots, a_{n_1} < l$. Nechť ohybový moment M(x) má skokové nespojitosti o velikosti

$M_1, M_2, \ldots, M_{n_2}$ vlivem idealizovaných osamělých silových dvojic, které působí v bodech $x = b_1, \ldots, b_{n_2}$, přičemž $0 < b_1, \ldots, b_{n_2} < l$. Nechť úhel natočení příčného řezu $\phi(x)$ má skokové nespojitosti $\Phi_1 .. \Phi_{n_3}$ vlivem vložených kloubů, které spojují segmenty nosníku v místech $x = c_1 .. c_{n_3}$, přičemž $0 < c_1, \ldots, c_{n_3} < l$. Nechť všechna čela segmentů nosníku v místech jeho vložených kloubů jsou vyztužena ohybově tuhými deskami, které dokonale brání deplanaci příčných řezů. Následkem toho vzniknou na takových čelech segmentů deplanační momenty s obecně různými hodnotami. Ve vložených kloubech nosníku se proto mohou objevit navíc skokové nespojitosti $\Theta_1 .. \Theta_{n_3}$ v průběhu deplanačního momentu $M_d(x)$.

Nyní můžeme zobecnit distribuční derivace (44), (47), (48), (50) pro konečný počet nespojitostí, a tak dostaneme zobecněný SODR prvního řádu tenkostěnného nosníku s relativně malou štíhlostí, resp. s osamělým zatížením relativně blízko od podepření či vetknutí, umožňující vypočítat špičky ohybového napětí v místech stísnění deplanace příčných řezů

$$\frac{d}{dx}\mathrm{T}(x) = -\mathrm{q}(x) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_i \,\mathrm{Dirac}(x - a_i)\right), \tag{55}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{M}(x) = \mathrm{T}(x) + \left(\sum_{i=1}^{n_2} M_i \,\mathrm{Dirac}(x - b_i)\right), \tag{56}$$

$$\frac{d}{dx}M_d(x) = \Delta\,\rho(x) + \left(\sum_{i=1}^{n_3} \Theta_i \,\mathrm{Dirac}(x - c_i)\right), \tag{57}$$

$$\frac{d}{dx}\rho(x) = \frac{\omega^2\,(M_d(x) + \beta\,\mathrm{M}(x))}{\Delta}, \tag{58}$$

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = -\frac{\omega^2\,(\beta\,M_d(x) + \chi\,\mathrm{M}(x))}{\Delta} + \left(\sum_{i=1}^{n_3} \Phi_i \,\mathrm{Dirac}(x - c_i)\right), \tag{59}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x) = \phi(x). \tag{60}$$

6. Obecné řešení zobecněného SODR modelu rovinného ohybu tenkostěnného přímého prizmatického nosníku se zahrnutím vlivu omezení deplanace příčných řezů

Obecné řešení SODR (55) až (60) bude vypočteno pro obecný průběh měrného příčného zatížení q(x) pomocí Laplaceovy transformace ve třech krocích:

- (i) výpočet obrazů rovnic (55) až (60) v Laplaceově transformaci,
- (ii) řešení vzniklé soustavy lineárních algebraických rovnic pro obrazy neznámých veličin,
- (iii) výpočet hledaných veličin pomocí inverzní Laplaceovy transformace.

Obecné řešení bude obsahovat měrné příčné zatížení q(x) v konvolutorních součinech. Výpočet obecného řešení pro q(x) se zcela určitými nespojitostmi může být proveden dvojím způsobem. První možností je zopakování uvedeného postupu s konkrétním vyjádřením měrného příčného zatížení. Druhou možností je dopočítání zmíněných konvolutorních součinů pomocí jejich Laplaceových obrazů. Tento druhý způsob bude dále rovněž uveden.

Zobrazení rovnic (55) až (60) v Laplaceově transformaci vede na

$$p\,\mathrm{laplace}(\mathrm{T}(x),x,p)-\mathrm{T}(0)=-\mathrm{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)-\left(\sum_{i=1}^{n_1}F_i\,\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}\right), \tag{61}$$

$$p\,\mathrm{laplace}(\mathrm{M}(x),x,p)-\mathrm{M}(0)=\mathrm{laplace}(\mathrm{T}(x),x,p)+\left(\sum_{i=1}^{n_2}M_i\,\mathrm{e}^{(-p\,b_i)}\right), \tag{62}$$

$$p\,\mathrm{laplace}(M_d(x),x,p)-M_d(0)=\Delta\,\mathrm{laplace}(\rho(x),x,p)+\left(\sum_{i=1}^{n_3}\Theta_i\,\mathrm{e}^{(-p\,c_i)}\right), \tag{63}$$

$$p\,\mathrm{laplace}(\rho(x),x,p)-\rho(0)=\frac{\omega^2\,\mathrm{laplace}(M_d(x),x,p)}{\Delta}+\frac{\omega^2\,\beta\,\mathrm{laplace}(\mathrm{M}(x),x,p)}{\Delta}, \tag{64}$$

$$p\,\mathrm{laplace}(\phi(x),x,p)-\phi(0)=$$
$$-\frac{\omega^2\,\beta\,\mathrm{laplace}(M_d(x),x,p)}{\Delta}-\frac{\omega^2\,\chi\,\mathrm{laplace}(\mathrm{M}(x),x,p)}{\Delta}+\left(\sum_{i=1}^{n_3}\Phi_i\,\mathrm{e}^{(-p\,c_i)}\right), \tag{65}$$

$$p\,\mathrm{laplace}(\mathrm{w}(x),x,p)-\mathrm{w}(0)=\mathrm{laplace}(\phi(x),x,p), \tag{66}$$

kde

$\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(x),x,p)$	obraz veličiny $\mathrm{f}(x)$ v Laplaceově transformaci,
p	komplexní proměnná v Laplaceově obrazu,
f(0)	hodnota veličiny $\mathrm{f}(x)$ v levém koncovém bodě nosníku (počátek).

Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (61) až (66) je tvaru

$$\mathrm{laplace}(\mathrm{T}(x),x,p)=\frac{\mathrm{T}(0)}{p}-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}F_i}{p}\right)-\frac{\mathrm{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)}{p}, \tag{67}$$

$$\mathrm{laplace}(\mathrm{M}(x),x,p)=$$
$$\frac{\mathrm{T}(0)}{p^2}+\frac{\mathrm{M}(0)}{p}-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}F_i}{p^2}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{\mathrm{e}^{(-p\,b_i)}M_i}{p}\right)-\frac{\mathrm{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)}{p^2}, \tag{68}$$

$$\operatorname{laplace}(M_d(x),x,p)=\frac{\omega^2\,\beta\,\mathrm{T}(0)}{p^2\,(-\omega^2+p^2)}+\frac{\omega^2\,\beta\,\mathrm{M}(0)}{p\,(-\omega^2+p^2)}+\frac{p\,M_d(0)}{-\omega^2+p^2}+\frac{\Delta\,\rho(0)}{-\omega^2+p^2}$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\omega^2\,\beta\,\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}\,F_i}{p^2\,(-\omega^2+p^2)}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{\omega^2\,\beta\,\mathrm{e}^{(-p\,b_i)}\,M_i}{(-\omega^2+p^2)\,p}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_3}\frac{\mathrm{e}^{(-p\,c_i)}\,p\,\Theta_i}{-\omega^2+p^2}\right)$$
$$-\frac{\omega^2\,\beta\,\operatorname{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)}{p^2\,(-\omega^2+p^2)}\,, \tag{69}$$

$$\operatorname{laplace}(\rho(x),x,p)=\frac{\beta\,\omega^2\,\mathrm{T}(0)}{(-\omega^2+p^2)\,p\,\Delta}+\frac{\beta\,\omega^2\,\mathrm{M}(0)}{(-\omega^2+p^2)\,\Delta}+\frac{\omega^2\,M_d(0)}{(-\omega^2+p^2)\,\Delta}+\frac{p\,\rho(0)}{-\omega^2+p^2}$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\beta\,\omega^2\,\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}\,F_i}{(-\omega^2+p^2)\,p\,\Delta}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{\beta\,\omega^2\,\mathrm{e}^{(-p\,b_i)}\,M_i}{(-\omega^2+p^2)\,\Delta}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_3}\frac{\omega^2\,\mathrm{e}^{(-p\,c_i)}\,\Theta_i}{(-\omega^2+p^2)\,\Delta}\right)$$
$$-\frac{\beta\,\omega^2\,\operatorname{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)}{(-\omega^2+p^2)\,p\,\Delta}\,, \tag{70}$$

$$\operatorname{laplace}(\phi(x),x,p)=\frac{((\chi-\beta^2)\,\omega^4-\omega^2\,\chi\,p^2)\,\mathrm{T}(0)}{p^3\,\Delta\,(-\omega^2+p^2)}+\frac{((\chi-\beta^2)\,\omega^4-p^2\,\omega^2\,\chi)\,\mathrm{M}(0)}{p^2\,\Delta\,(-\omega^2+p^2)}$$
$$-\frac{\omega^2\,\beta\,M_d(0)}{\Delta\,(-\omega^2+p^2)}-\frac{\omega^2\,\beta\,\rho(0)}{p\,(-\omega^2+p^2)}+\frac{\phi(0)}{p}+\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{((-\chi+\beta^2)\,\omega^4+\omega^2\,\chi\,p^2)\,\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}\,F_i}{p^3\,\Delta\,(-\omega^2+p^2)}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{((\chi-\beta^2)\,\omega^4-p^2\,\omega^2\,\chi)\,\mathrm{e}^{(-p\,b_i)}\,M_i}{p^2\,\Delta\,(-\omega^2+p^2)}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n_3}\left(-\frac{\omega^2\,\beta\,\Theta_i}{\Delta\,(-\omega^2+p^2)}+\frac{\Phi_i}{p}\right)\mathrm{e}^{(-p\,c_i)}\right)$$
$$+\frac{((-\chi+\beta^2)\,\omega^4+\omega^2\,\chi\,p^2)\,\operatorname{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)}{p^3\,\Delta\,(-\omega^2+p^2)}\,, \tag{71}$$

$$\operatorname{laplace}(\mathrm{w}(x),x,p)=\frac{\mathrm{w}(0)}{p}+\frac{\phi(0)}{p^2}-\frac{((\beta^2-\chi)\,\omega^4+\omega^2\,\chi\,p^2)\,\mathrm{T}(0)}{(p^2-\omega^2)\,p^4\,\Delta}$$
$$-\frac{((\beta^2-\chi)\,\omega^4+\omega^2\,\chi\,p^2)\,\mathrm{M}(0)}{(p^2-\omega^2)\,p^3\,\Delta}-\frac{\beta\,\omega^2\,M_d(0)}{(p^2-\omega^2)\,p\,\Delta}-\frac{\beta\,\omega^2\,\rho(0)}{(p^2-\omega^2)\,p^2}$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{n_1}\frac{((-\beta^2+\chi)\,\omega^4-\omega^2\,\chi\,p^2)\,\mathrm{e}^{(-p\,a_i)}\,F_i}{(p^2-\omega^2)\,p^4\,\Delta}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n_2}\frac{((\beta^2-\chi)\,\omega^4+\omega^2\,\chi\,p^2)\,\mathrm{e}^{(-p\,b_i)}\,M_i}{(p^2-\omega^2)\,p^3\,\Delta}\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n_3}\left(\frac{\Phi_i}{p^2}-\frac{\beta\,\Theta_i\,\omega^2}{(p^2-\omega^2)\,p\,\Delta}\right)\mathrm{e}^{(-p\,c_i)}\right)-\frac{((-\beta^2+\chi)\,\omega^4-\omega^2\,\chi\,p^2)\,\operatorname{laplace}(\mathrm{q}(x),x,p)}{(p^2-\omega^2)\,p^4\,\Delta}\,. \tag{72}$$

Rovnice (68) až (72) musely být vzhledem ke své značné délce zapsány na dvou či více řádcích, přičemž symbol početní operace na počátku pokračujícího řádku není obsažen na konci řádku předchozího. Důvodem je to, že uvedené rovnice byly sestaveny v počítačovém programu jakožto výkonné příkazy. Opakování symbolů základních početních operací by v počítačovém příkazu způsobilo chybu.

Hledané obecné řešení SODR (55) až (60) získáme inverzní Laplaceovou transformací obrazů (67) až (72) ve tvaru

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(0) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_i \, \mathrm{Heaviside}(x - a_i) \right) - \int_0^x \mathrm{q}(\xi)\, d\xi \ , \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x) = {} & \mathrm{T}(0)\, x + \mathrm{M}(0) - \left(\sum_{i=1}^{n_1} F_i \, \mathrm{Heaviside}(x - a_i)\,(x - a_1) \right) \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n_2} M_i \, \mathrm{Heaviside}(x - b_i) \right) - \int_0^x \mathrm{q}(\xi)\,(x - \xi)\, d\xi \end{aligned} \quad , \tag{74}$$

$$\begin{aligned} M_d(x) = {} & \left(-\beta\, x + \frac{\sinh(\omega\, x)\,\beta}{\omega} \right) \mathrm{T}(0) + (-1 + \cosh(\omega\, x))\,\beta\, \mathrm{M}(0) + \cosh(\omega\, x)\, M_d(0) + \frac{\sinh(\omega\, x)\,\Delta\,\rho(0)}{\omega} \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left((x - a_i)\,\beta + \frac{\beta \sinh(\omega\,(-x + a_i))}{\omega} \right) \mathrm{Heaviside}(x - a_i)\, F_i \right) \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n_2} \left(-2 + 2 \left[\cosh\left(\frac{\omega\,(-x + b_i)}{2} \right) \right]^2 \right) \beta\, \mathrm{Heaviside}(x - b_i)\, M_i \right) \\ & + \left(\sum_{i=1}^{n_3} \Theta_i \, \mathrm{Heaviside}(x - c_i) \cosh(\omega\,(-x + c_i)) \right) + \beta \int_0^x \mathrm{q}(\xi) \left(x - \xi - \frac{\sinh(\omega\,(x - \xi))}{\omega} \right) d\xi \end{aligned} \quad , \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \rho(x) = {} & \rho(0)\cosh(\omega\, x) - \frac{(-\cosh(\omega\, x) + 1)\,\beta\, \mathrm{T}(0)}{\Delta} + \frac{\beta\,\omega \sinh(\omega\, x)\, \mathrm{M}(0)}{\Delta} + \frac{\omega \sinh(\omega\, x)\, M_d(0)}{\Delta} \\ & - \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{2 \left(\left[\cosh\left(\frac{\omega\,(-x + a_i)}{2} \right) \right]^2 - 1 \right) \beta\, \mathrm{Heaviside}(x - a_i)\, F_i}{\Delta} \right) \\ & - \left(\sum_{i=1}^{n_2} \frac{\beta\,\omega\, \mathrm{Heaviside}(x - b_i) \sinh(\omega\,(-x + b_i))\, M_i}{\Delta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n_3} \frac{\omega\,\Theta_i \sinh(\omega\,(-x + c_i))\, \mathrm{Heaviside}(x - c_i)}{\Delta} \right) \\ & + \frac{\beta}{\Delta} \int_0^x \mathrm{q}(\xi)\,(1 - \cosh(\omega\,(x - \xi)))\, d\xi \end{aligned} \quad , \tag{76}$$

$$\begin{aligned} \phi(x) = {} & \phi(0) + \frac{\left(\frac{(\beta^2 - \chi)\,\omega^2 x^2}{2} + (1 - \cosh(\omega\, x))\,\beta^2 \right) \mathrm{T}(0)}{\Delta} + \left(\frac{(\beta^2 - \chi)\,\omega^2 x}{\Delta} - \frac{\omega \sinh(\omega\, x)\,\beta^2}{\Delta} \right) \mathrm{M}(0) \\ & - \frac{\omega \sinh(\omega\, x)\,\beta\, M_d(0)}{\Delta} + (1 - \cosh(\omega\, x))\,\beta\,\rho(0) + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{(-\beta^2 + \chi)\,\omega^2 x^2}{2\,\Delta} + \frac{(\beta^2 - \chi)\,\omega^2 a_i\, x}{\Delta} \right.\right. \\ & + \frac{(-\beta^2 + \chi)\,\omega^2 a_i^2}{2\,\Delta} + \frac{(\cosh(\omega\,(-x + a_i)) - 1)\,\beta^2}{\Delta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\Big(-\cosh(\omega\,(-x+a_i))-1+2\Big[\cosh\Big(\frac{\omega\,(-x+a_i)}{2}\Big)\Big]^2\Big)\,\chi}{\Delta}\,\mathrm{Heaviside}(x-a_i)\,F_i\Bigg)\\
&+\Bigg(\sum_{i=1}^{n_2}\Bigg(\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,x}{\Delta}+\frac{(-\beta^2+\chi)\,\omega^2\,b_i}{\Delta}+\frac{\omega\,\beta^2\sinh(\omega\,(-x+b_i))}{\Delta}\Bigg)\mathrm{Heaviside}(x-b_i)\,M_i\Bigg)+\Bigg(\\
&\sum_{i=1}^{n_3}\Bigg(\frac{\beta\,\Theta_i\,\omega\sinh(\omega\,(-x+c_i))}{\Delta}+\Bigg(2+\cosh(\omega\,(-x+c_i))-2\Big[\cosh\Big(\frac{\omega\,(-x+c_i)}{2}\Big)\Big]^2\Bigg)\Phi_i\Bigg)\mathrm{Heaviside}(x-c_i)\\
&\Bigg)+\frac{1}{\Delta}\int_0^x \mathrm{q}(\xi)\Bigg(\frac{(\chi-\beta^2)\,\omega^2\,(x-\xi)^2}{2}+\beta^2\,(\cosh(\omega\,(x-\xi))-1)\Bigg)d\xi
\end{aligned}
\quad ,\ (77)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}(x)=\ &\mathrm{w}(0)+x\,\phi(0)+\frac{\Big(\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,x^3}{6}+\beta^2\,x-\frac{\beta^2\sinh(\omega\,x)}{\omega}\Big)\mathrm{T}(0)}{\Delta}\\
&+\frac{\Big(\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,x^2}{2}+(1-\cosh(\omega\,x))\,\beta^2\Big)\mathrm{M}(0)}{\Delta}+\frac{(1-\cosh(\omega\,x))\,\beta\,M_d(0)}{\Delta}+\Big(\beta\,x-\frac{\sinh(\omega\,x)\,\beta}{\omega}\Big)\rho(0)\\
&+\Bigg(\sum_{i=1}^{n_1}\Bigg(\frac{(\chi-\beta^2)\,\omega^2\,x^3}{6\,\Delta}+\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,a_i\,x^2}{2\,\Delta}+\Bigg(\frac{(\chi-\beta^2)\,\omega^2\,a_i^{\,2}}{2\,\Delta}-\frac{\beta^2}{\Delta}\Bigg)x+\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,a_i^{\,3}}{6\,\Delta}+\frac{\beta^2\,a_i}{\Delta}\\
&-\frac{\beta^2\sinh(\omega\,(-x+a_i))}{\Delta\,\omega}\Bigg)\mathrm{Heaviside}(x-a_i)\,F_i\Bigg)+\Bigg(\sum_{i=1}^{n_2}\Bigg(\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,x^2}{2\,\Delta}+\frac{(\chi-\beta^2)\,\omega^2\,b_i\,x}{\Delta}\\
&+\frac{(\beta^2-\chi)\,\omega^2\,b_i^{\,2}}{2\,\Delta}+\frac{(1-\cosh(\omega\,(-x+b_i)))\,\beta^2}{\Delta}+\frac{\Big(1-2\Big[\cosh\Big(\frac{\omega\,(-x+b_i)}{2}\Big)\Big]^2+\cosh(\omega\,(-x+b_i))\Big)\chi}{\Delta}\Bigg)\\
&\mathrm{Heaviside}(x-b_i)\,M_i\Bigg)+\Bigg(\sum_{i=1}^{n_3}\Bigg(\frac{\Big(2-2\Big[\cosh\Big(\frac{\omega\,(-x+c_i)}{2}\Big)\Big]^2\Big)\beta\,\Theta_i}{\Delta}+(x-c_i)\,\Phi_i\Bigg)\mathrm{Heaviside}(x-c_i)\Bigg)\\
&+\frac{1}{\Delta}\int_0^x \mathrm{q}(\xi)\Bigg(\frac{(\chi-\beta^2)\,\omega^2\,(x-\xi)^3}{6}-\beta^2\,(x-\xi)+\frac{\beta^2\sinh(\omega\,(x-\xi))}{\omega}\Bigg)d\xi
\end{aligned}
\quad .\ (78)
$$

Obecné řešení SODR (55) až (60) má tvar (73) až (78), kde měrné příčné zatížení q(x) vystupuje v konvolutorních součinech. Při jejich výpočtu můžeme vyjít z jejich Laplaceových obrazů na pravých stranách (67) až (72). Samotný výpočet provedeme v těchto krocích:

- (i) vyjádření q(x) jako funkce po částech spojité,
- (ii) konverze q(x) na tvar obsahující Heaviside(x),
- (iii) výpočet Laplaceovy transformace q(x),
- (iv) dosazení Laplaceova obrazu q(x) do obrazů konvolucí v (67) až (72),
- (v) rozklad racionálních lomených funkcí v obrazech na parciální zlomky,
- (vi) výpočet inverzních transformací k obrazům konvolucí z (67) až (72).

Jako příklad použití tohoto postupu uvažujme konkrétně, že q(x) je po částech konstantní s jednou skokovou nespojitostí v bodě $x = d_1$ ($0 < d_1$) a má tvar

$$\mathrm{q}(x) = \{ \begin{matrix} q_1 & x < d_1 \\ 0 & jinak \end{matrix} \quad . \tag{79}$$

Konverze (79) vede na tvar

$$\mathrm{q}(x) = q_1 \,\mathrm{Heaviside}(d_1 - x) \quad . \tag{80}$$

Transformace rovnice (80) je

$$\mathrm{laplace}(\mathrm{q}(x), x, p) = \frac{q_1 \left(1 - \mathrm{e}^{(-p\, d_1)}\right)}{p} \quad . \tag{81}$$

Pravou stranu (81) dosadíme do (67) až (72). Postup dalšího výpočtu ukážeme na případu deplanační funkce $\rho(x)$. Obraz konvoluce na pravé straně (76) je podle (70)

$$\frac{\beta \,\mathrm{laplace}\left(\int_0^x -\mathrm{q}(\xi)\,(-1 + \cosh(\omega\,(-x+\xi)))\, d\xi, x, p \right)}{\Delta} = -\frac{\omega^2 \beta \,\mathrm{laplace}(\mathrm{q}(x), x, p)}{p\, \Delta\, (p^2 - \omega^2)} \quad . \tag{82}$$

Do pravé strany (82) dosadíme z (81) a obdržíme

$$-\frac{\omega^2 \beta \,\mathrm{laplace}(\mathrm{q}(x), x, p)}{p\, \Delta\, (p^2 - \omega^2)} = -\frac{\omega^2 \beta\, q_1 \left(1 - \mathrm{e}^{(-p\, d_1)}\right)}{p^2\, \Delta\, (p^2 - \omega^2)} \quad . \tag{83}$$

Racionální lomenou funkci z pravé strany (83) rozložíme na parciální zlomky

$$-\frac{\omega^2 \beta\, q_1}{p^2\, \Delta\, (p^2 - \omega^2)} = \frac{\beta\, q_1}{p^2\, \Delta} - \frac{\beta\, q_1}{\Delta\, (p^2 - \omega^2)} \quad . \tag{84}$$

Inverzní Laplaceovou transformací (84) dostaneme

$$\mathrm{invlaplace}\left(\frac{\beta\, q_1}{p^2\, \Delta} - \frac{\beta\, q_1}{\Delta\, (p^2 - \omega^2)}, p, x \right) = \frac{\beta\, q_1\, (\omega\, x - \sinh(\omega\, x))}{\omega\, \Delta} \quad . \tag{85}$$

Násobení činitelem $\mathrm{e}^{(-p\, d_1)}$ v Laplaceově obrazu na pravé straně (83) se v Laplaceově vzoru projeví posunutím. Hledané vyjádření konvoluce v deplanační funkci (76) pro měrné příčné zatížení podle (79) je

$$\frac{\beta}{\Delta} \int_0^x \mathrm{q}(\xi)\,(1 - \cosh(\omega\,(x - \xi)))\, d\xi =$$

$$\frac{\beta\, q_1 \left(x + \frac{-\sinh(\omega\, x) + (\sinh(\omega\,(x - d_1)) - \omega\,(x - d_1))\,\mathrm{Heaviside}(x - d_1)}{\omega} \right)}{\Delta} \quad . \tag{86}$$

7. Formulace doplňujících podmínek diferenciální úlohy pro SODR (55) až (60) stísněného ohybu tenkostěnného nosníku

Doplňující podmínky můžeme rozdělit na okrajové a deformační. Vzhledem k počtu integračních konstant v obecném řešení (73) až (78) musíme sestavit celkem šest okrajových podmínek.

Okrajové podmínky pro konec TN s pevným kloubem a volně deplanabilní čelní plochou jsou

$$M_d(x)\big|_{x=l} = 0\ ,\quad \mathrm{M}(x)\big|_{x=l} = 0\ ,\quad \mathrm{w}(x)\big|_{x=l} = 0\ . \tag{87}$$

Ve vetknutí předpokládáme nulové posunutí v podélném a příčném směru ve všech bodech střednice profilu příčného řezu

$$\mathrm{u}(x, s)\big|_{x=l} = 0,\ \mathrm{w}(x)\big|_{x=l} = 0\ . \tag{88}$$

Aby pravá strana (16) byla nulová pro každé s na střednici profilu příčného řezu, musí platit

$$\left(\frac{d}{dx}\mathrm{w}(x)\right)\bigg|_{x=l} = 0\ ,\ \ \rho(x)\big|_{x=l} = 0\ . \tag{89}$$

Má-li nosník osamělé podpory v bodech mezi svými okraji, pak všechny tyto vnitřní podpory musíme uvolnit a zavést neznámé vazbové reakce. Tyto reakce musí dále vystupovat na pravé straně podmínky rovnováhy (55). K jejich určení sestavíme deformační podmínku pro každou vnitřní podporu zvlášť v závislosti na jejím konstrukčním provedení. Tento postup je shodný pro staticky určité i staticky neurčité uložení nosníku.

Deformační podmínky pro rotační kinematické dvojice spojující jednotlivé segmenty prizmatického nosníku jsou uvedeny v kap. 3.

8. Závěry

Přínos tohoto článku je ten, že předkládá takový matematický zápis modelu tenkostěnného prizmatického nosníku se stísněním deplanace příčných řezů při ohybu, který v sobě zahrnuje také vliv nespojitostí v zatížení, uložení nosníku a od eventuálních vložených rotačních kinematických dvojic, spojujících jednotlivé segmenty nosníku.

Nespojitosti, které se mohou v praktickém výpočtu vyskytnout, byly rozděleny do dvou skupin a byly vyjádřeny pomocí zobecněných funkcí. Nespojitosti z první skupiny byly vyjádřeny pomocí skokové Heavisideovy funkce. Nespojitosti z druhé skupiny byly zahrnuty pomocí distribučních derivací posouvající síly, ohybového momentu, deplanačního momentu a natočení příčného řezu.

Obecné řešení (73) až (78) zobecněného matematického modelu (55) až (60) tenkostěnného nosníku bylo vypočteno pomocí Laplaceovy transformace metodou symbolického programování v systému Maple. Integrační konstanty jsou ve tvaru počátečních parametrů jakožto přímý důsledek aplikace Laplaceovy transformace.

Postup výpočtu je stejný pro nosníky uložené staticky určitě i neurčitě. Všechny vnitřní podpory mezi konci nosníku se uvolní a neznámé osamělé vazbové reakce v nich se zavedou jako nespojitosti do distribuční derivace posouvající síly. Pro každý konec nosníku se stanoví tři okrajové podmínky. Neznámé vazbové reakce v podporách mezi konci nosníku se vypočtou na základě deformačních podmínek.

9. Poděkování

Autor tohoto článku děkuje svému Ph.D. školiteli, prof. Ing. M. Hýčovi, DrSc. z TU Liberec, za jeho cenné připomínky.

10. Literatura

Angot, A. (1972) *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. SNTL, Praha.

Hýča, M. (1972) Anwendung der Dirac-Deltafunktion zur Berechnung der Biegung gerader Balken mit Schubverformung. *Wiss. Z. Techn*. Univers. Dresden 21 H.1

Hýča, M. (1974) Zum Problem der Biegung bei dünnwandigen Balken mit Rücksicht auf Wölbschubverformungen. *ZAMM 55*, Heft 4. Bochum

Hýča, M. (1986) Matematický model ohybu tenkostěnných nosníků se zřetelem k deplanaci průřezů a ohybu pásů. *Strojírenství* 36.

Hýča, M. (1990) Local Effects in Thinwalled Beams subject to Bending and Shear. *IUTAM*, Praha.

Hýča, M. (2005) Analysis of Geometrically Imperfect Beam-Columns Subjected to Discontinuous Lateral and Bending Moment Loads by Using Distributions, in: Proc. *1st Int. Conf. on Innovation and Integration in Aerospace Sciences*, Queen's University, Belfast.

Janatka, J. (1961) *Přímé tenkostěnné nosníky*. SNTL, Praha.

Kanwal , R. P. (2004) *Generalized Functions*. Birkhäuser, Boston.

Librescu, L. & Song, O. (2006) *Thin-walled composite beams: theory and application*. Springer, Dordrecht, The Netherlands.

Němec J., Dvořák J. & Höschl C. (1989) *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. SNTL, Praha.

Ponomarev, S. D. & kol. (1956) *Rasčety na pročnosť v mašinostrojenii*. Mašgiz, Moskva.

Rao, S. S. (1982) *The finite element method in engineering*. Pergamon Press, Oxford.

Schwartz, L. (1972) *Matematické metody ve fyzice*. SNTL, Praha.

Sobotka, J. (2006) On Applications of Generalized Functions to Calculations of Beam Design Elements. *Engineering Mechanics*, paper no. 232.

Sobotka, J. (2007) On Applications of Generalized Functions to Calculations of Beam-Column Design Elements. *Engineering Mechanics*, paper no. 125.

Sobotka, J. (2008) On Applications of Generalized Functions to Calculation of Thin-Walled Beam Design Elements Subject to Non-Uniform Torsion. Engineering Mechanics.

Štěpánek, J. (2001) *Matematika pro přírodovědce. Distribuce a diferenciální rovnice*. Karolinum, Praha.

Vlasov, V.Z. (1962) *Tenkostěnné pružné pruty*. SNTL, Praha.

Yavari, A., Sarkani, S. & Moyer, E. T. Jr (2000) On applications of generalized functions to beam bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 5675-5705.

Yavari, A. & Sarkani, S. (2001) On applications of generalized functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities. International *Journal of Mechanical Sciences*, 43, pp. 1543-1562.