

## RANDOM RESPONSE OF A SINGLE SYSTEM DUE TO COMBINED GAUSSIAN AND POISSONIAN EXCITATION

J. Náprstek, R. Král<sup>1</sup>

**Summary:** *The paper makes a sketch of an SDOF system response analysis subjected to a random excitation having a form of the additive Poisson driven independent random impulses. A special generalised Fokker -Planck equation having a form of an integro-differential equation is presented together with boundary and initial conditions. Later the Galerkin-Petrov process as a method of a numerical solution of the respective evolutionary integro-differential equation for the probability density function (PDF) is presented in general. Shape and weighting functions for purposes of a numerical solution procedure are carried out and corresponding algebraic system for PDF values in nodes is deduced. As a demonstration particular SDOF systems are investigated. Resulting PDF are analysed and mutually compared.*

### 1. Introduction

Vnější zatížení působící na mechanické soustavy často obsahuje výraznou náhodnou složku. Většina prací se zaměřuje na náhodné buzení typu gaussovských bílých šumů. V praxi se však vyskytuje řada případů vnějšího buzení, které nelze takto modelovat ani za použití různých pomocných filtrů. Nejznámějším takovým procesem je poissonovský řetězec impulsů.

Zkoumané mechanické soustavy bývají lineární i nelineární. I když hranice není zcela ostrá, dá se říci, že klasické metody řešení založené na korelačních a spektrálních postupech můžeme použít bez obav pouze u lineárních úloh s aditivním gaussovským buzením. I když ani v ostatních případech není jejich použití zcela vyloučeno, je třeba vždy krajní opatrnosti, abychom směřovali k logickému a smysluplnému výsledku, který dává odpověď na původní otázky zadání úlohy. Poissonovský řetězec jakožto součást buzení ať už aditivního či multiplikativního však vždy znamená zásadní komplikaci. Spektrální metody nelze použít vůbec a i korelační postupy v klasickém smyslu jsou spojeny s nesmírnými potížemi a omezeny spíše jen na lineární soustavy. Bylo učiněno několik pokusů o řešení metodou rozkladu podle stochastických momentů na základě výchozí diferenciální soustavy. Zmiňuje se o nich ve své monografii Lin & Cai (1995). Lze je nalézt také v řadě dalších publikací např. Sniady (1989), Mironowicz & Sniady (1990).

Nepracuje-li se cestou přímé numerické integrace původní stochastické diferenciální soustavy, lze se vyhnout řadě nejasností jak v případě gaussovského, tak v případě kombinovaného

<sup>1</sup> Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ing. Radomil Král

Institute of Theoretical and Applied Mechanics ASCR, v.v.i.; Prosecká 76, 190 00 Prague 9  
tel. +420.286 892 515, e-mail: naprstek@itam.cas.cz, kral@itam.cas.cz

buzení (Gauss - Poisson) využitím Markovových procesů. Jejich definice a další aplikace je mnohem složitější, neboť v případě kombinovaného buzení je poissonovská část nespojitá. Pro čistě gaussovské buzení se na základě Markovových procesů dala odvodit parciální diferenciální rovnice pro neznámou funkci hustoty pravděpodobnosti (PDF) odezvy. Tato rovnice se obvykle nazývá Fokker-Planckova (FP). Analogicky pro kombinované buzení můžeme odvodit podobnou rovnici často nazývanou zobecněná Fokker-Planckova (GFP). Používají se i jiná označení.

Rovnice má integro-diferenciální charakter a podobně jako FP je i GFP rovnice evolučního typu. Je tedy schopna popsat přechodový děj, který probíhá od počátečních podmínek až po stacionární stav, pokud existuje. Jestliže se řešení rovnice podaří najít s přijatelnou přesností, dá se říci, že získaný výsledek je přirozeným rozšířením deterministického výsledku. Plně popisuje náhodný charakter odezvy a umožňuje odvodit i další speciální vlastnosti odezvy, jako je její frekvenční skladba a další parametry.

## 2. Zobecněná Fokker-Planckova rovnice

Odezva mechanické soustavy vyplývá z účinků vnějšího buzení. Ta jsou v zásadě deterministického a náhodného typu. V předchozímu příspěvku autoři zkoumali FP rovnici za působení čistě gaussovských buzení, viz (Náprstek & Král, 2008). Nyní rozšíříme výchozí stochastickou diferenciální soustavu o účinek poissonovských náhodných řetězců. Náhodná část buzení se tedy skládá z gaussovské a poissonovské části. Účinky obou částí náhodného buzení zavedeme jako vzájemně nezávislé a každou z nich ve tvaru lineárních kombinací prvních mocnin jednotlivých vnějších procesů. S dostatečnou mírou obecnosti můžeme výchozí diferenciální soustavu vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) + g_{jr}(\mathbf{x}, t)w_r(t) + c_j \cdot Y(t), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \quad (1)$$

$$Y(t) - \text{poissonovský řetězec odpovídající definici: } Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \cdot \delta(t - t_i),$$

$Z_i$  - sekvence náhodných impulsů; impulzy se předpokládají "obdélníkové" o konstantní šířce a náhodné amplitudě; jejich poloha na časové ose odpovídá Poissonovu rozložení s charakteristickou hodnotou  $\lambda$ .

$p_z(\zeta)$  - hustota pravděpodobnosti amplitud impulsů  $Z_i$ .

$c_i$  - konstantní parametry, které specifikují uplatnění řetězce  $Y(t)$  v jednotlivých rovnicích soustavy (1); řetězec  $Y(t)$  se uplatňuje v soustavě (1) pouze jako aditivní šum a bez možnosti deterministické modulace.

$w_r(t)$  - gaussovské spojité bílé šumy s konstantní vzájemnou hustotou ve smyslu momentů:  
 $K_{rs} = \mathbf{E}\{w_r \cdot w_s\}; r, s = 1, m$ .

$f_j(\mathbf{x}, t), g_{jr}(\mathbf{x}, t)$  - spojité deterministické funkce stavových proměnných a času  $j = 1, n$ ; šumy mohou působit jako aditivní i multiplikativní s případnou deterministickou modulací.

V zásadě jsou možné i obecnější formulace soustavy (1), kdy složky náhodného buzení jsou pojaty uvnitř vždy jediného nelineárního funkčního předpisu na pravé straně. V aplikacích se však tyto případy objevují zřídka. I obecná matematická literatura jim věnuje jen minimální pozornost. Většinou si lze totiž pomoci i v případech nelineárního vstupu náhodných budících procesů rozšířením původní soustavy tak, že dospejeme opět k soustavě typu (1) s lineárním vstupem náhodných procesů obojího typu. Obecná formulace by vyžadovala mnohem složitější

teoretické zázemí přičemž přínos pro úlohy teoretické mechaniky a fyziky ve srovnání s lineární formulací by byl velmi malý. Existují však speciální případy, pro které jsou vypracovány jednoúčelové postupy.

Soustavě (1) lze přiřadit GFP rovnici pro neznámou PDF odezvy v proměnných  $\mathbf{x}, t$ . Tuto rovnici lze najít v základním tvaru (bez poissonovských řetězců) i s podrobným odvozením a analýzou různých vlastností v řadě monografií, viz např. Bolotin (1979), Lin & Cai (1995), Pugachev & Sinitcyn (1987) a mnoho dalších. GFP rozšířená o vliv poissonovských řetězců je uvedena v posledních dvou monografiích pro konstantní i náhodně proměnné amplitudy impulsů včetně rozboru speciálních případů. Teorií obecných procesů působících na vstupu stochastických diferenciálních systémů se zabývá monografie Gikhman & Skorokhod (1972). Při práci s poissonovskými procesy se na ni odvolávají všichni pozdější autoři. Příslušnou GFP rovnici, která odpovídá soustavě (1) píšeme podle Wojtkiewicz et al. (1999) ve tvaru:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\kappa_j(\mathbf{x}, t) \cdot p(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (\kappa_{jk}(\mathbf{x}, t) \cdot p(\mathbf{x}, t)) - \lambda p(\mathbf{x}, t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x} - \mathbf{c} \cdot \zeta, t) p_z(\zeta) d\zeta \quad (2)$$

koeficienty driftu:  $\kappa_j(\mathbf{x}, t) = f_j(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} K_{rs} \cdot g_{ls}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial g_{jr}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l}$  (3)

koeficienty difuse:  $\kappa_{jk}(\mathbf{x}, t) = K_{rs} \cdot g_{jr}(\mathbf{x}, t) g_{ks}(\mathbf{x}, t)$

Otázkou je, jaké metody zvolit pro řešení GFP rovnice v případě konkrétní mechanické soustavy. Na rozdíl od čistě gaussovského buzení není v případě buzení poissonovského literatura ani zdaleka tak bohatá. Také speciálních případů řešitelných analyticky buď v uzavřeném tvaru nebo přibližně je podstatně méně. Mimo již zmíněné monografie Lin & Cai (1995), Pugachev & Sinitcyn (1987) a především Gikhman & Skorokhod (1972) však přesto existuje řada prací věnovaných různým semi-analytickým přibližným postupům. Jejich skladba obvykle odpovídá charakteru výsledku, který je cílem studie. Jmenujme na př. práce Di Paola & Vasta (1997), Grigoriu (1996a,b), Köylüoğlu et al. (1994, 1998), Tylikowski & Marowski (1986), Vasta (1995), popř. jedna kapitola v monografii Lin & Cai (1995). Zabývají se však převážně základními analytickými problémy uplatnění poissonovského buzení soustav typu (1). Navíc některé závěry těchto prací nejsou zcela ve shodě.

Mezi semi-analytickými postupy, které se pokoušejí o řešení nestacionárního problému rovnice (2) je třeba zmínit některé postupy založené na vlastních funkcích a číslech FPK operátora, viz např. Náprstek (2005). Uplatnění našly i různé další asymptotické metody zejména ve spojení s úlohou prvního opuštění oblasti, viz monografie Grasman & van Herwaarden (1999).

Velmi silným nástrojem pro řešení FP i GFP rovnice jsou však numerické metody. Autoři ukázali v práci Náprstek & Král (2008) na základě vlastního studia a předchozích pramenů možnosti MKP uplatněné na FP rovnici. I když čistě numerická řešení trpí z principu řadou nedostatků, podařilo se ukázat na několik důležitých vlastností PDF doposud nezjištěných jinými metodami.

Obsáhlý přehled o stavu poznání ve využití numerických metod pro řešení FP rovnice včetně zmínky o GFP rovnici byl uveřejněn v r. 1997, viz Schuéller at al. (1997). Před tímto i po tomto datu byla publikována řada prací, které se věnují využití metody konečných prvků (MKP) pro řešení FP rovnice. První pokusy o využití MKP při řešení FP rovnice sahají do sedmdesátých let. Jmenujme na příklad: Bergman & Heinrich (1981), Bergman & Spencer (1992), Spencer & Bergman (1993), Bergman et al. (1996), Masud & Bergman (2005), atd. Přestože přínos těchto prací je nesporný, autorská základna se stále nezdá být příliš široká.

GFP operátor není samoadjungovaný. Vzhledem k této a dalším jeho vlastnostem vyžaduje řešení nasadit variační metody založené na operacích ortogonalizace. Za základ výpočtu byla

tedy zvolena Galerkinova metoda v Petrovově úpravě. Různými aspekty speciálních variant MKP v souvislosti s úpravami Galerkinovy metody uplatněné na FP rovnici se zabývali mnozí autoři. Otázkám stacionárních řešení se věnují např. Langley (1985), či Langtangen (1991), multiscale nástrojům mezi mnoha jinými např. Masud & Khurram (2004).

Účinnost MKP v řešení FP rovnice se zdá veliká. Zejména při studiu některých detailních vlastností PDF odezvy ve fázi přechodových procesů je patrně MKP obtížně nahraditelná. Formulace řešení, kdy některé stavové proměnné mohou nabývat hodnot pouze na daném intervalu a na hranicích mají složitější okrajové podmínky, nečiní potíže. Nástroj MKP umožňuje bez velkých potíží opustit jinak obtížně překonatelný předpoklad gaussovských šumů ve vstupech v soustavě (1). Pokud se FP rovnici podaří sestavit i pro jiné vstupní šumy, např. poissonovské řetězce, metoda funguje poměrně spolehlivě, viz např. Wojtkiewicz et al. (1999) s návazností na další práce, např. Vasta (1995), Grigoriu (1996a,b), Di Paola & Vasta (1997).

Průzkumem literatury se ukázalo, že na rozdíl od FP se o přímé řešení GFP rovnice použitím MKP dosud pravděpodobně nikdo nepokusil. Jistou komplikaci při zahrnutí poissonovského buzení znamená konvoluce v druhé části GFP rovnice (2). V některých pracích ji autoři odstraňují Fourierovou transformaci v těch prostorových souřadnicích, ve kterých působí poissonovské buzení, např. Wojtkiewicz et al. (1999). Vznikne tak soustava obyčejných diferenciálních rovnic, kterou autoři této práce řeší metodou sítí. Značnou nevýhodou tohoto postupu je, že se dopracujeme řešení ve tvaru Fourierova obrazu. Pokud k popisu výsledku nestačí charakteristická funkce PDF, je nezbytné následně nastoupit cestu zpětné Fourierovy transformace.

Všimněme si, že odpadne-li gaussovská část buzení, rovnice (2) se významně zjednoduší, neboť odpadnou difuzní členy ( $\kappa_{jk} = 0$ ), např. Tylikowski & Marowski (1986). V případě, že amplituda impulsů v poissonovské části buzení je konstantní (náhodná je pouze jejich časová sekvence), změní se hustota  $p_z(\zeta)$  na Diracovu funkci s nenulovou hodnotou v bodě  $\zeta_0$ . Konvoluce potom degeneruje na běžný člen s posunutým argumentem  $\lambda \cdot p(\mathbf{x} - \mathbf{c} \cdot \zeta_0)$ .

Připomeňme si některé nedostatky MKP v této aplikaci. Zavést skutečně deterministickou počáteční podmínu pro hustotu pravděpodobnosti (ve tvaru Diracovy funkce) je v podstatě nemožné, což ovšem nemusí příliš vadit. Horší je otázka růstu počtu nezávislých proměnných s počtem stupňů volnosti soustavy (1). Tím ostatně trpí i analytické metody řešení. Zde se toto úskalí projevuje nutností vyhodnocovat integrály na konečných prvcích v prostoru o velkém počtu dimenzí (při  $n$  stupních volnosti má prostor dimenze  $2n$ ). Rozsah soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, která vznikne diskretizací výrazu na pravé straně rovnice (2), roste exponenciálně. Problematické může být řešení stacionárního problému (s nulovou levou stranou v rovnici (2)) zejména na nekonečně velké mnohorozměrné oblasti.

Přesto se zdá, že v řadě prakticky významných případů mohou výhody převažovat a MKP by tak mohla poskytnout cenný efektivní prostředek pro řešení FP rovnice. V následujících kapitolách uvedeme několik ukázkových příkladů soustav s jedním stupněm volnosti s buzením aditivním poissonovským řetězcem. Nejprve však upozorníme na několik vlastností konečných prvků a metod numerické integrace použitých v daném případě.

GFP rovnice je lineární a v konkrétních případech, o kterých budeme hovořit (soustavy s jedním stupněm volnosti), pouze ve dvou prostorových proměnných  $x_1, x_2$  (posuv, rychlosť) a s aditivním buzením. Odpadá tedy problém výrazné mnohorozměrnosti prvků a je možné integrovat klasickými postupy. Vzhledem k tomu, že GFP je v prostorových souřadnicích druhého řádu, postačí prvky s lineární aproximací mezi uzlovými body. Z důvodů vyloučení jakékoli sekundární nehomogenity byla oblast rozdělena ve všech případech na obdélníkové prvky o stejně velikosti, bez jakéhokoli zhušťování v místech "dramatičtějších" změn PDF.

Pro další postup použijeme tato označení, viz obr. 1:

$x_1^e, x_2^e$  - lokální souřadnice v rámci jednoho konečného prvku vzhledem ke středu,  
 $x_1, x_2$  - globální souřadnice

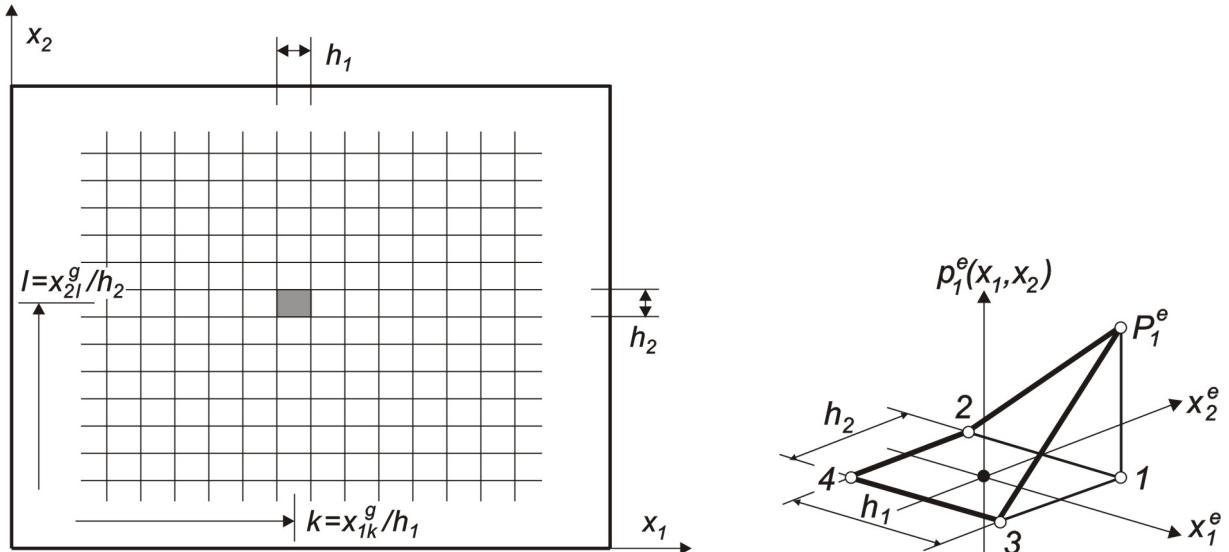


Figure 1: Dělení oblasti na prvky podle posuvu  $x_1$  a rychlosti  $x_2$ ; schéma approximace PDF v oboru konečného prvku.

$x_{1k}, x_{2l}$  - globální souřadnice středu prvku ( $k, l$ ),

$p_i^e(x_1^e, x_2^e)$  - tvarové funkce;  $i = 1, 4$ ,

$P_i^e$  - hodnoty PDF v uzlech prvku; index má lokální význam;  $i = 1, 4$ ,

$h_1, h_2$  - rozměry prvku.

přičemž platí:

$$x_1 = x_{1k}^g + x_1^e; \quad x_2 = x_{2l}^g + x_2^e. \quad (4)$$

Pro funkce  $g_{jr}$ , viz (1), (3) zavedeme konstanty:  $g_{11} = g_1 = 0, g_{21} = g_2 = 1$ . Dále zavedeme předpoklad, že poissonovské buzení bude uplatněno pouze v souřadnici  $x_2$ . Tím si připravíme stav, kdy soustava o jednom stupni volnosti bude buzena náhodně velkými silovými impulsy.

Vzhledem k tomu, že operátor rovnice (2) je druhého řádu. Při galerkinovském postupu tedy vystačíme k zajištění konvergence v průměru s lineární approximací. S využitím této konvencí zavedeme v oboru jednoho obdélníkového prvku obvyklou approximační funkci ve tvaru, viz obr. 1:

$$\begin{aligned} p^e(x_1^e, x_2^e) &= \sum_{i=1}^4 P_i^e \cdot p_i^e(x_1^e, x_2^e), & p_i^e(x_1^e, x_2^e) &= p_i^e, \\ p_1^e &= (h_1 + 2x_1^e)(h_2 + 2x_2^e)/4h_1h_2, & p_2^e &= (h_1 - 2x_1^e)(h_2 + 2x_2^e)/4h_1h_2, \\ p_3^e &= (h_1 + 2x_1^e)(h_2 - 2x_2^e)/4h_1h_2, & p_4^e &= (h_1 - 2x_1^e)(h_2 - 2x_2^e)/4h_1h_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Další úpravy ve smyslu metody Galerkin-Petrov uplatníme nejprve na diferenciální část (levá strana a dále první, druhý a třetí člen na pravé straně (2)), viz Náprstek & Král (2008). Podle známých algoritmů znamená dosazení approximace (5) do rovnice (2) nahradit neznámou funkci  $p(x_1, x_2, t)$  v celém definičním oboru složitou lomenou funkcí, která se uplatní v oboru určitého prvku prostřednictvím součinu approximace (5) a výrazu složeného z Heavisidových funkcí ("jednotkové okno"). Má hodnotu jedna v oboru prvku a nula mimo tento prvek. Další krok tedy znamená, že rovnici (2) po dosazení approximace (5) vynásobíme postupně všemi čtyřmi tvarovými funkcemi včetně příslušného "jednotkového okna" a vždy integrujeme v mezích celé oblasti. Jednotkové okno však způsobí, že integrace dá nenulové hodnoty pouze v mezích příslušného prvku. Z jednotlivých členů rovnice (2) vzniknou v daném případě matice  $(4 \times 4)$

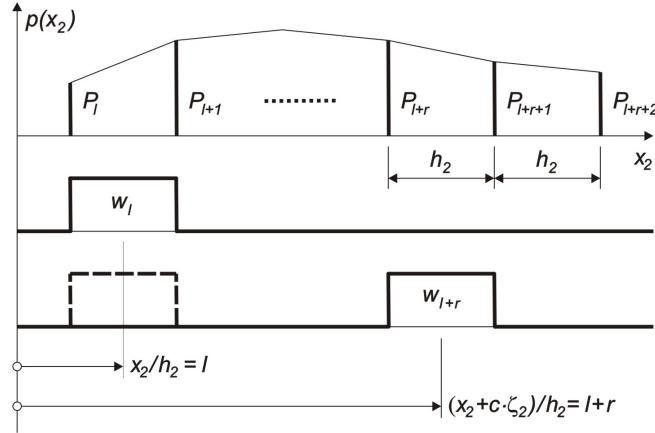


Figure 2: Posuv argumentu.

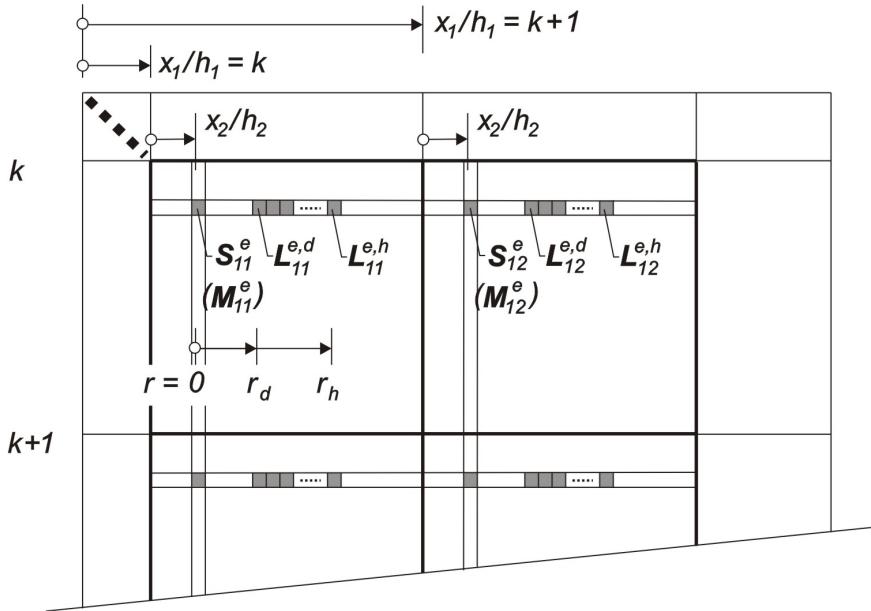


Figure 3: Schéma umístění lokálních matic do matic globálních.

v lokálních souřadnicích. Vzniknou tak matice  $\mathbf{M}^e$ ,  $\mathbf{S}^e$  ( $4 \times 4$ ) pro jeden konečný prvek  $(k, l)$ . Prvky těchto matic se stanoví ze vzorců:

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega} p_i^e(x_1^e, x_2^e) p_j^e(x_1^e, x_2^e) dx_1^e dx_2^e, \quad \Omega \text{ — integrační oblast jednoho prvku} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} S_{ij}^e = & \int_{\Omega} \left[ p_i^e(x_1^e, x_2^e) p_j^e(x_1^e, x_2^e) \left( \frac{\partial f_1(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & + p_i^e(x_1^e, x_2^e) \left( f_1(x_1, x_2, t) \frac{\partial p_j^e(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1^e} + f_2(x_1, x_2, t) \frac{\partial p_j^e(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2^e} \right) + \\ & \left. + K_{aa} \frac{\partial p_i^e(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2^e} \frac{\partial p_j^e(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2^e} \right] dx_1^e dx_2^e \end{aligned} \quad (7)$$

Při integraci v (7) je třeba respektovat, že  $f_1, f_2$  jsou funkce globálních souřadnic, které odpovídají (4). Tyto funkce v rámci prvku approximujeme buď funkčními hodnotami v bodě

$(x_{1k}^g, x_{2l}^g)$ , anebo přesněji lineární funkcí okolo těchto funkčních hodnot. Matice  $\mathbf{M}^e$  odpovídá levé straně (2) a po vynásobení konstantou  $\lambda$  třetímu členu na pravé straně. Matice  $\mathbf{S}^{ed}$  zahrnuje vliv prvních dvou členů na pravé straně (2).

Další krok spočívající v umístění do globálních matic je vzhledem k použité síti zřejmý. Transformace do globálních souřadnic znamená v daném případě použít pro každý prvek matice  $\mathbf{M}^e$ ,  $\mathbf{S}^e$  podle (6), (7), které po úpravě vzhledem k poloze  $(x_{1k}^g, x_{2l}^g)$  se načtou na příslušná místa globálních matic  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{S}$ , viz obr. 2, 3. Schéma v obr. 3 odpovídá číslování uzelů nejprve podle  $x_2$ , resp.  $l$  a v nadřazeném cyklu podle  $x_1$ , resp.  $k$ . Podmatice  $\mathbf{M}_{11}^e$ ,  $\mathbf{M}_{12}^e$ , atd. jsou typu  $2 \times 2$  zde znamenají horní levou, resp. horní pravou čtvrtinu původní matice  $\mathbf{M}^e$ . Pokud by číslování bylo obecné, bylo by nutné při umístování do globálních matic pracovat s každým z 16 prvků matice  $\mathbf{M}^e$ , resp.  $\mathbf{S}^e$  zvlášť.

Takto zpracujeme všechny prvky, čímž vznikne soustava obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé hodnoty  $\mathbf{P}(t)$ , které jsou funkciemi času. Tento proces byl použit pro čistě gaussovská buzení v příspěvku Náprstek & Král (2008). Je všeobecně známý a v případě diferenciálních operátorů bez posuvu argumentu je propracovaný na vysokou úroveň.

Věnujme se nyní konvoluční části v rovnici (2). Předpokládejme, že  $p_z(\zeta)$  je nenulová pouze na intervalu  $\zeta \in (\zeta_d - h_2/2c, \zeta_h + h_2/2c)$ , přičemž hranice intervalu  $\zeta_d, \zeta_h$  jsou celistvé násobky  $h_2/c$ . Zadanou PDF  $p_z(\zeta)$  rozložíme po ose  $x_2$  po úsecích, které odpovídají rozdělení na prvky v souřadnici  $x_2$ . To znamená, že uvnitř jednoho prvku je globální souřadnice  $\zeta$  popsána transformačním vztahem:

$$\zeta = \zeta_r^g + \zeta^e ; \quad \zeta^e \in (-h_2/2c; h_2/2c) \quad (8)$$

kde  $c \cdot \zeta_r^g$  znamená souřadnici středu a  $c \cdot \zeta^e$  lokální souřadnici uvnitř prvku. Index  $r$  tohoto prvku znamená posuv vpravo od původní polohy dané indexem  $l$  na výslednou hodnotu  $l + r$ .

Připusťme na chvíli, že  $p_z(\zeta)$  je nenulové pouze v rámci jednoho prvku  $r$ , kde nabývá konstantní hodnoty  $p_{zr}$ . V takovém případě integrál v (2) podle  $\zeta$  zmizí a je nahrazen přenásobením integrantu hodnotou  $p_{zr} \cdot h_2/c$ . V rovnici (2) se tak objeví neznámá s posunutým argumentem  $x_2 - c \cdot \zeta_r^g$ . To znamená, že k zákrytu s "jednotkovým oknem" umístěným do bodu  $x_{2l}$ , kterým násobíme rovnici (2) s neznámou approximovanou podle (5), dojde až po posunutí  $x_2$  o hodnotu  $c \cdot \zeta_r^g$ . Výsledek integrace uvnitř prvku se nezmění, neboť v integrantu nepůsobí žádný z koeficientů  $f_1, f_2$ , avšak zvýší se ve stejně míře index neznámých  $l$  ve směru  $x_2$  o hodnotu  $r = c \cdot \zeta_r^g/h_2$ . To znamená, že lokální matici  $\mathbf{L}^{er}$ , která odpovídá  $\mathbf{M}^e$  podle (6), načteme po přenásobení hodnotou  $\lambda \cdot h_2$  o  $r$  místo vpravo od hlavní diagonály globální matice  $\mathbf{S}$ . Odpovídá jednomu prvku a impulsnímu buzení jehož amplituda se řídí rovnoměrným rozdělením (až na násobnou konstantu  $c$ ) v mezích jednoho prvku, což znamená, že je téměř konstantní.

Pokud má  $p_z(\zeta)$  nenulové hodnoty na širším intervalu než jeden prvek, postup se opakuje s příslušnou úpravou posunu od hlavní diagonály. Index posunu postupně nabývá hodnot  $r = c \cdot \zeta_d/h_2, c \cdot \zeta_h/h_2$ . Celý tento algoritmus je naznačen ve schématech na obr. 2 a 3. Doplňující globální matici  $\mathbf{L}$  tedy můžeme vyjádřit:

$$\mathbf{L} = \sum_{r=c \cdot \zeta_d/h_2}^{c \cdot \zeta_h/h_2} \mathbf{L}^r \quad (9)$$

kde  $\mathbf{L}^r$  odpovídá doplňku globální matice pro  $r$ -tu část  $p_z(\zeta)$  včetně příslušného umístění, to jest transformace do globální souřadné soustavy a načtení do globální matice po přenásobení koeficienty  $\lambda, h_2$ . Sumace v (9) tedy má spíše symbolický význam.

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro hodnoty PDF v uzlech síti můžeme symbolicky vyjádřit takto:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{M} + \lambda \cdot h_2 \mathbf{L}) \mathbf{P} \quad (10)$$

kde  $\mathbf{P}$  je vektor neznámých hodnot PDF.

Jako integrační metoda soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (10) se nejlépe osvědčil postup typu prediktor-korektor založený na Adamsově algoritmu, viz např. Kloeden & Platen (1992).

### 3. Lineární soustava s aditivním poissonovským buzením

Zabývejme se soustavou o jednom stupni volnosti (SDOF) s náhodným aditivním buzením poissonovským řetězcem:

$$\ddot{x} + 2\omega_b \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = c \cdot Y(t) \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - 2\omega_b x_2 + c \cdot Y(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Proces  $Y(t)$  je stacionární poissonovský řetězec, přičemž platí  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = c$ . Koeficienty difuze jsou nulové vzhledem k tomu, že na soustavu (7) nepůsobí žádné gaussovské budící procesy. Z toho důvodu v původní rovnici (2) odpadne člen s druhými derivacemi. Koeficienty driftu vyplývají bezprostředně ze vzorců (3):

$$\kappa_1 = x_2, \quad \kappa_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\omega_b x_2. \quad (12)$$

FP rovnici dostaneme dosazením (8) a následnou úpravou z obecného tvaru (2):

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, t)}{\partial t} = -\frac{\partial (x_2 p(x_1, x_2, t))}{\partial x_1} + \frac{\partial [(\omega_0^2 x_1 + 2\omega_b x_2)p(x_1, x_2, t)]}{\partial x_2} - \lambda p(x_1, x_2, t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2 - c \cdot \zeta, t) p_z(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

Hustotu pravděpodobnosti  $p_z(\zeta)$  zavedeme konstantní o amplitudě  $q$  na intervalu  $\zeta \in (D_1, D_2)$ , kde  $D_1 = \zeta_d - h_2/2c$ ,  $D_2 = \zeta_h + h_2/2c$ , jak odpovídá výkladu v minulé kapitole. Impulsy jsou tedy vesměs kladné a každý z nich má konečnou energii.

Neznámou  $p(x_1, x_2, t)$  approximujeme podle (5). Dále postupujeme ve smyslu Galerkin - Petrovovy metody. Výsledkem integrace pro jeden prvek oblasti je soustava čtyř obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu:

Pro numerické řešení rovnice (9) volíme parametry soustavy takto:  $\omega_0^2 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$ ,  $K_{aa} = 0.0$ ,  $K_{ab} = K_{bb} = 0.0$ . Buzení je zahájeno v okamžiku  $t = 0$ , přičemž předpokládáme, že odezva soustavy vychází z klidové polohy.

Počáteční podmítku pro PDF volíme ve tvaru:

$$p(x_1, x_2, 0) = N \cdot \exp(-\omega_0^2(x_1 - x_{1,0})^2/\sigma^2) \exp(-(x_2 - x_{2,0})^2/\sigma^2) \quad (14)$$

kde  $N = 1/2\pi\sigma^2$ ,  $\sigma^2 = 1/9$ . Počáteční podmínka (14) se pro malou hodnotu  $\sigma^2$  blíží k původně požadované Diracově funkci. Připouští, že pohyb soustavy nezačíná v bodě  $(x_{1,0}, x_{2,0})$  s naprostou jistotou, jak by odpovídalo Diracově funkci, ale s možností nepatrných odchylek kolem tohoto bodu, které se řídí podle PDF dané vzorcem (14). Souřadnice vrcholu funkce (14) umístíme pro lineární soustavu do počátku ( $x_{1,0} = 0$ ,  $x_{2,0} = 0$ ).

Na základě těchto dílčích approximací sestavíme diferenciální soustavu typu (10). Podobně jako v Náprstek & Král (2008) volíme velikost oblasti tak, aby bylo možné s dostatečnou přesností pokládat  $p(x_1, x_2, t)$  na celém jejím okraji za nulovou. Hodnotu  $p(x_1, x_2, t) = 0$  na okraji oblasti pro všechna  $t$  tedy zavedeme jako okrajovou podmítku. Při načítání lokálních matic  $\mathbf{L}^e$  do globální matice podle (10), vyjdou v okrajových oblastech některé prvky mimo

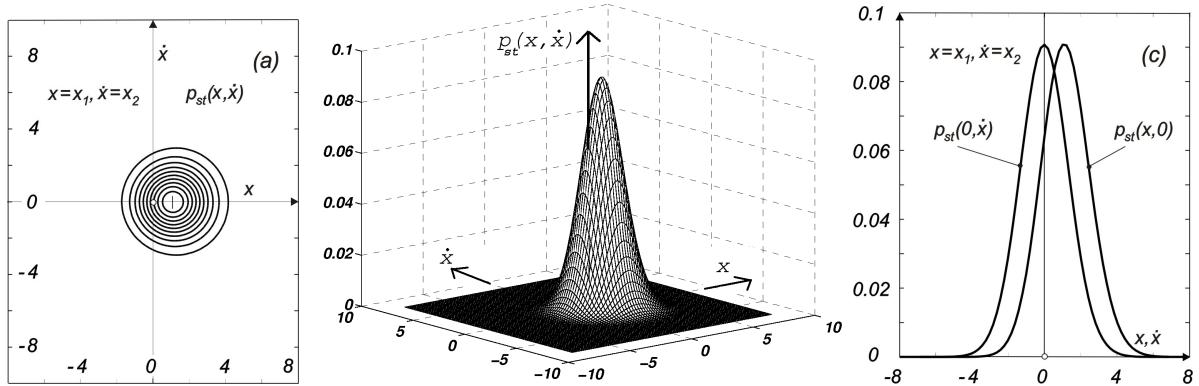


Figure 4: PDF of the linear system's response with additive Poisson noise; (a) contour plot; (b) 3D surface plot; (c) cross-sections along the axes.

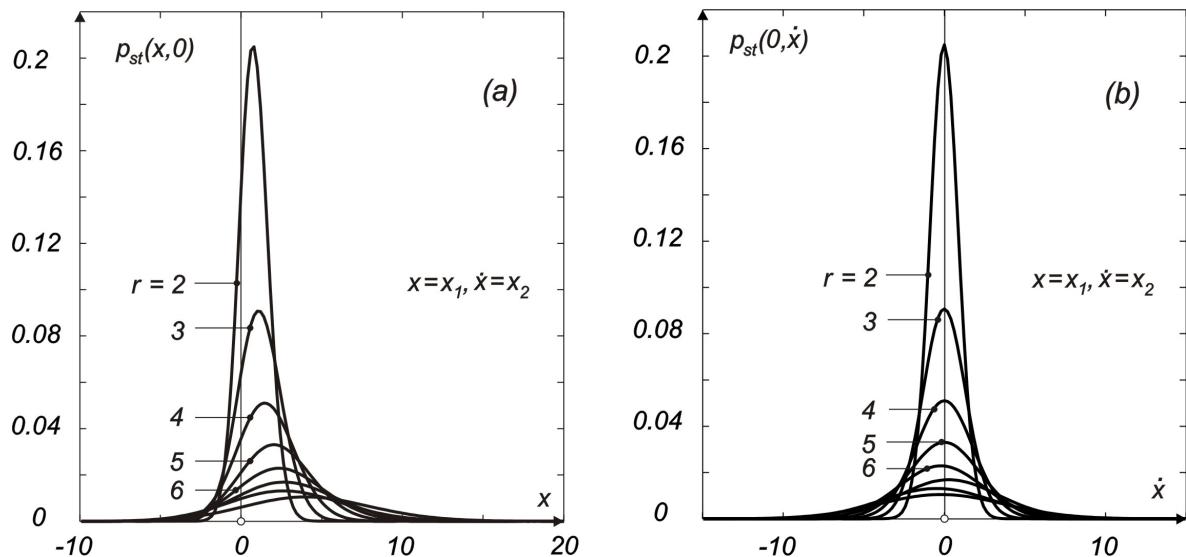


Figure 5: PDF of the linear system's response for individual elements  $\zeta_r^g$ ,  $r = 2, 3, \dots, 9$ ;  $\lambda = 2.0$ ;  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$ ; (a) cross-sections along the  $x = x_1$  axis; (b) cross-sections along the  $\dot{x} = x_2$  axis.

vymezený obor této matice. Účinek těchto prvků zanedbáme. Abychom tak mohli učinit, musí být dělení sítě dostatečně jemné a okraje oblasti vzdálené místům, kde dochází k významným proměnám PDF. Tyto parametry nelze určit exaktně. Úlohu je třeba propočítat několikrát se zavedením malých variací v poloze okrajů a dělení sítě s ohledem na parametry oscilátoru a pásmo buzení poissonovského sumu.

Jako zkušební případ byl vybrán klasický lineární systém podle rovnice (1) s parametry  $\omega_0^2 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$  při parametru buzení  $c = 1$ . Intenzita poissonovského řetězce je volena v rozmezí  $\lambda = 1.0, \dots, 10.0$ . Amplituda odpovídá prvku, ve kterém je zvoleno pásmo nenulové pravděpodobnosti velikosti působících impulsů. Tato pásmá jsou volena jednak postupně pro  $\zeta_r^g$  odpovídající  $r = 2, \dots, 9$ , anebo kumulativně jako širší pásmá  $r = 1 \div 2, r = 1 \div 3, \dots, r = 1 \div 7$ . Oblast integrace rovnice (13) je zavedena takto:  $x = x_1 \in (-20; 20)$ ,  $\dot{x} = x_2 \in (-20; 20)$ ; v každém z obou směrů je oblast rozdělena na 200 prvků, tj.  $h_1 = 0.2$ ,  $h_2 = 0.2$ .

Rámcový přehled o povaze PDF ve stacionárním stavu po odeznění přechodového procesu si lze učinit z obr. 4 (označeno  $p_{st}(x, \dot{x})$ ). Matematický střed odezvy se z počátku (počáteční podmínka) posunul ve směru  $x$ , resp.  $x_1$ . Do tohoto bodu se dostal z počátku po ostré spirále.

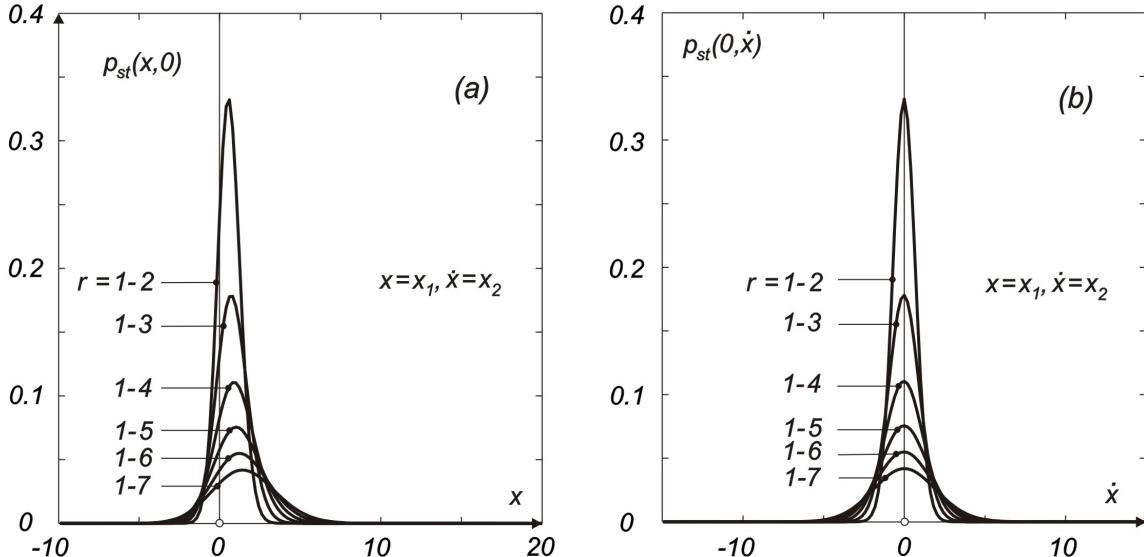


Figure 6: PDF odezvy lineární soustavy při buzení v pásmu prvků  $\zeta_r^g$ ,  $r = 1 \div 2; r = 1 \div 3, \dots, r = 1 \div 7$ ; hustota  $\lambda = 2.0$ ;  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$ ; (a) svislé řezy osou  $x = x_1$ -výchylka; (b) svislé řezy vedené vrcholem plochy ve směru osy  $\dot{x} = x_2$ -rychlosť.

Poloha matematického středu ukazuje, že s nejvyšší pravděpodobností bude výchylka pozitivní a rychlosť výchylky nulová. Vrstevnicový diagram ukazuje mírnou šikmost směrem k počátku. Z axonometrického pohledu a ze svislých řezů je zřejmé, že PDF v obou souřadnicích silně připomíná Gaussovu křivku, i když třetí a čtvrtý moment se jí mírně vzdalují.

Výsledky podrobnějšího průzkumu vlastností PDF odezvy výše zmíněné SDOF soustavy jsou znázorněny na obr. 5-7. Způsob prezentace je u všech tří obrázků podobný. Část (a) znázorňuje svislý řez plochou PDF ve stacionárním stavu osou  $x$ -výchylka; označeno jako  $p_{st}(x, 0)$ . Každý z těchto řezů je normalizován. V části (b) jsou za stejných podmínek znázorněny svislé řezy vedené vrcholem plochy ve směru osy  $\dot{x}$ -rychlosť; označeno jako  $p_{st}(0, \dot{x})$ . Vodorovná měřítka v částech (a) všech tří obrázků jsou stejná, totéž se týká části (b).

V obr. 5 jsou uvedeny řezy odpovídající pásmům  $r = 2, \dots, 9$ , to jest stavům, kdy amplitudy impulsů se pohybují vždy pouze ve velmi úzkém rozmezí jednoho prvku a lze je téměř pokládat za konstantní. Intenzita příslušného poissonovského procesu buzení je v tomto případě volena konstantní hodnotou  $\lambda = 2.0$ . Z části (a) je zřetelné, že matematický střed odezvy se vzrůstajícím  $r$  stoupá. Klesá maximum PDF, stoupá rozptyl odezvy. Šikmost  $p_{st}(x, 0)$  je mírně kladná, nicméně nenarušuje příliš symetrii křivky vzhledem k matematickému středu. Tyto tendenze spojité navazují na počáteční podmínu (14). PDF rychlosti je v této sérii symetrická a má nulový matematický střed. Maximum PDF klesá, rozptyl stoupá.

Podobný vývoj lze zaznamenat na obr. 6. Série řezů PDF odpovídá buzení, kdy amplitudy impulsů se pohybují s rovnoramenným rozdělením v pásmu  $r = 1$  a  $2$ , dále v pásmu  $r = 1 \div 3$  až nakonec v pásmu  $r = 1 \div 7$ . Hustota amplitud impulsů je tedy v posledním případě kladná a konstantní v intervalu  $r = 1, \dots, 7$  a nulová mimo tento interval. Absolutní hodnoty výchylek soustavy jsou za těchto okolností mnohem větší než v případě jednotlivých  $r$ . Z obrázku (a) je patrné, že matematický střed výchylky se posouvá do vyšších hodnot v porovnání s obr. 5(a). Kvantitativní rozdíl v amplitudách výchylek však není zřetelný vzhledem k tomu, že všechny křivky PDF jsou normalizovány.

Vliv stoupající hustoty  $\lambda$  budícího poissonovského procesu je zachycen na obr. 7. Pro hodnoty  $\lambda = 2, \dots, 10$  při konstantní hodnotě  $r = 4$  je vývoj PDF výchylky znázorněn v části (a) a rychlosti v části (b). Vzrůstající hustota má logicky vliv na stoupání matematického středu

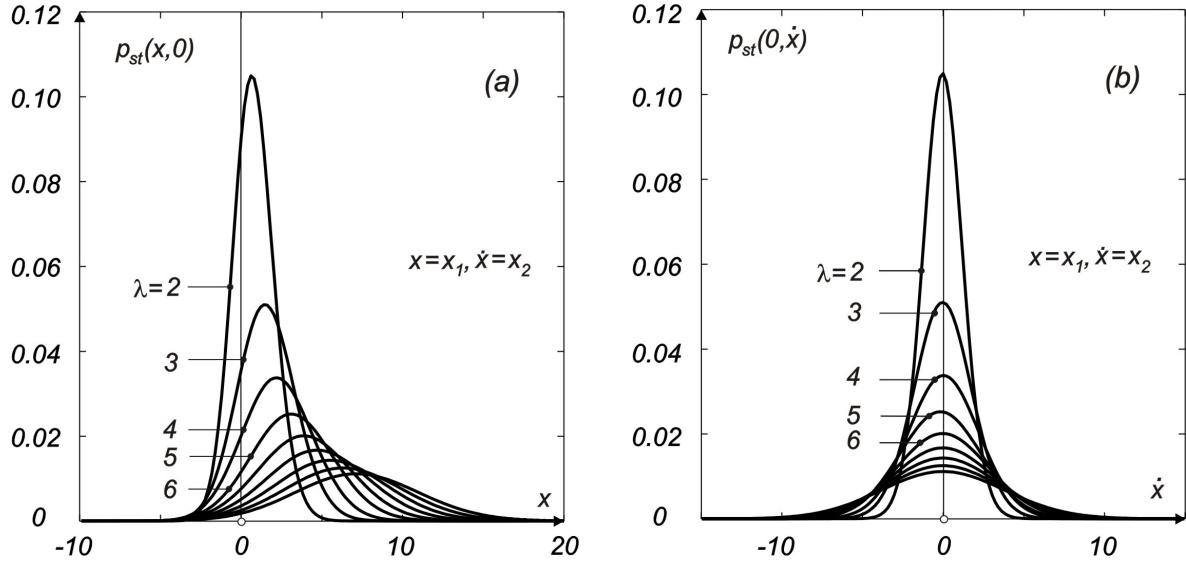


Figure 7: PDF odezvy lineární soustavy při buzení o hustotách  $\lambda = 2, 3, \dots, 10$ ; oblast prvku  $\zeta_r^g, r = 4$ ;  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$ ; (a) svislé řezy osou  $x = x_1$ -výchylka; (b) svislé řezy vedené vrcholem plochy ve směru osy  $\dot{x} = x_2$ -rychlosť.

Table 1: Statistické momenty výchylky ve stacionárním stavu pro rostoucí  $\lambda, r = 4$ .

$\lambda$	$M_1$	$M_{2c}$	$M_{3c}$	$M_{3c}^G$	$M_{4c}$	$M_{4c}^G$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2.0	0.764	1.159	0.318	0.0	8.017	7.544
3.0	1.580	3.221	0.650	0.0	31.898	31.130
4.0	2.285	4.847	0.977	0.0	71.670	70.490
5.0	3.199	6.474	1.300	0.0	127.340	125.750
6.0	3.982	8.120	1.628	0.0	200.000	197.820
7.0	4.798	9.752	1.948	0.0	287.580	285.340
8.0	5.607	11.381	2.226	0.0	390.490	388.570

výchylky, pokles maxima PDF a vzrůst rozptylu. Vybrané výsledky výpočtů jsou uvedeny také v tab. 1. Pro stoupající  $\lambda$  je zachyceno v každém řádku několik statistických momentů umožňujících hrubé porovnání s obdobným gaussovským procesem:

$M_1$  - matematický střed, resp. nejpravděpodobnější výchylka zkoumané soustavy ve stacionárním stavu;

$M_{2c}$  - centrální druhý moment, resp. rozptyl výchylky;

$M_{3c}$  - třetí centrální moment, resp. šíkmost výchylky;

$M_{3c}^G = 0.0$  - šíkmost výchylky gaussovského procesu;

$M_{4c}$  - čtvrtý centrální moment, resp. špičatost výchylky;

$M_{4c}^G = 3 * M_{2c}^2$  - špičatost výchylky gaussovského procesu.

Z obr. 7(a) a druhého sloupce tabulky je patrné, jak stoupá jistá "efektivní" výchylka s rostoucí intenzitou budícího procesu. Rozptyl výchylky ve třetím sloupci je veličina se zřejmou

interpretací. Čtvrtý (šikmost) a šestý (špičatost) sloupec lze využít jako indikaci odchylky zkoumaného procesu od gaussovského procesu. Šikmost gaussovského procesu je nulová, jak uvádí pátý sloupec. Skutečná šikmost ve čtvrtém sloupci má však nezanedbatelnou hodnotu. Posudme špičatost. Pokud by proces byl gaussovský, musela by špičatost vykazovat hodnoty podle sedmého sloupce. Hodnoty v šestém a sedmém sloupci se však liší. Nicméně celkově můžeme konstatovat, že výsledek se od gaussovského procesu neliší zásadně. Potvrzuje se tak jeden z důsledků centrálního teorému, že ne-gaussovský stacionární proces filtrovaný stabilním lineárním systémem s konstantními koeficienty se blíží gaussovskému procesu.

Spokojíme-li se s hrubými kvalitativními odhady, můžeme výchylku v jisté třídě vstupních parametrů pokládat přibližně za gaussovskou. Kvantitativní analýza však s touto aproximací nevystačí. To se týká zejména případů, kdy je třeba zkoumat statistiku velkých výchylek v souvislosti s teorií spolehlivosti. Nicméně i v případě odhadů je vždy třeba oprávněnost gaussovské approximace posoudit alespoň přibližným výše zmíněným testem, pokud nepoužijeme některý ze sofistikovanějších testů, které nabízí statistická literatura.

#### 4. Nelineární soustava Duffingova typu s aditivním poissonovským buzením

Duffingovu rovnici lze psát v základním a normálním tvaru při aditivním buzení poissonovským řetězcem takto:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_b \dot{x} - \omega_0^2 \cdot x(1 - \alpha^2 x^2) &= c \cdot Y(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= \omega_0^2 x_1(1 - \alpha^2 x_1^2) - 2\omega_b x_2 + c \cdot Y(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Ze vzorců (3) vyplývají koeficienty driftu a difuze:

$$\kappa_1 = x_2, \quad \kappa_2 = \omega_0^2 x_1(1 - \alpha^2 x_1^2) - 2\omega_b x_2, \quad (16)$$

Na základě (15), (16) píšeme FP rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial (x_2 p(x_1, x_2, t))}{\partial x_1} - \frac{\partial [(\omega_0^2 x_1(1 - \alpha^2 x_1^2) - 2\omega_b x_2)p(x_1, x_2, t)]}{\partial x_2} \\ &\quad - \lambda p(x_1, x_2, t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2 - c \cdot \zeta, t) p_z(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (17)$$

Rovnicí (15) lze vystihnout pohyb Miesessova vzpěradla buzeného poissonovským řetězcem. Lineární část tuhosti je záporná, a proto má soustava v počátku  $(0, 0)$  nestabilní stacionární bod. Dva stabilní stacionární body mají polohu  $S_i \equiv (x_1 = \pm 1/\alpha, x_2 = 0)$ ,  $i = 1, 2$ . Míra repulsivity v počátku závisí na vztahu obou částí tuhosti a na intenzitě poissonovského řetězce.

Rozdělení oblasti na prvky a ostatní okolnosti výpočtu jsou podobné jako v předchozím případě:  $\omega_0^2 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$  a míra nonlinearity  $\alpha^2 = 0.1$ . Pokud jsou v Duffingově SDOF soustavě kubická část tuhosti a útlum kladné veličiny, dá se při poissonovském buzení předpokládat existence stacionárního řešení GFP rovnice (17). Rozsáhlé numerické analýzy navíc potvrzily, že toto řešení je jednoznačné a nezávisí na poloze bodu bodu  $(x_{1,0}, x_{2,0})$ . Tvar výsledku je především dán skladbou amplitud impulsů. Pokud impulsy působí stále jedním směrem, ať je šířka pásmá amplitud jakákoli v rámci jejich rovnoměrného rozdělení, PDF odezvy ve stacionárním stavu  $p_{st}(x, \dot{x})$  se vždy koncentruje v okolí stacionárního bodu  $S_1$  nebo  $S_2$  podle směru impulsů. K tomuto výsledku dospějeme i v případě, že za výchozí stav zvolíme opačný stacionární bod.

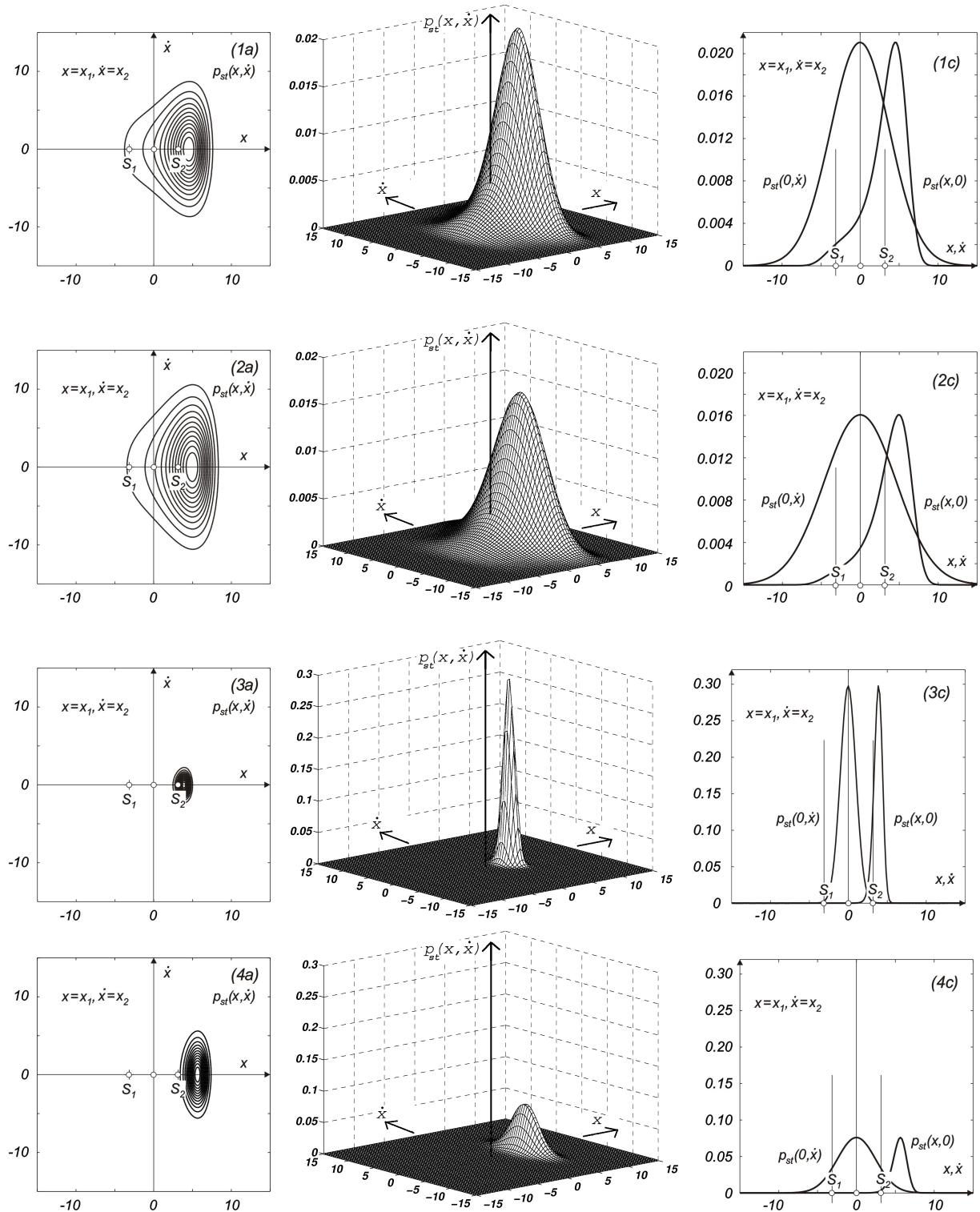


Figure 8: PDF odezvy Duffingovy soustavy  $\omega_0^2 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$ ,  $\alpha^2 = 0.1$  ve stacionárním stavu při aditivním poissonovském buzení; výsledky pro čtyři specifikace buzení  $\lambda, r$  v jednotlivých řádkách; uspořádání v jednotlivých řádkách: (a) vrstevnicový diagram; (b) axonometrický pohled; (c) svislé řezy vedené vrcholem plochy ve směru os  $x, \dot{x}$ .

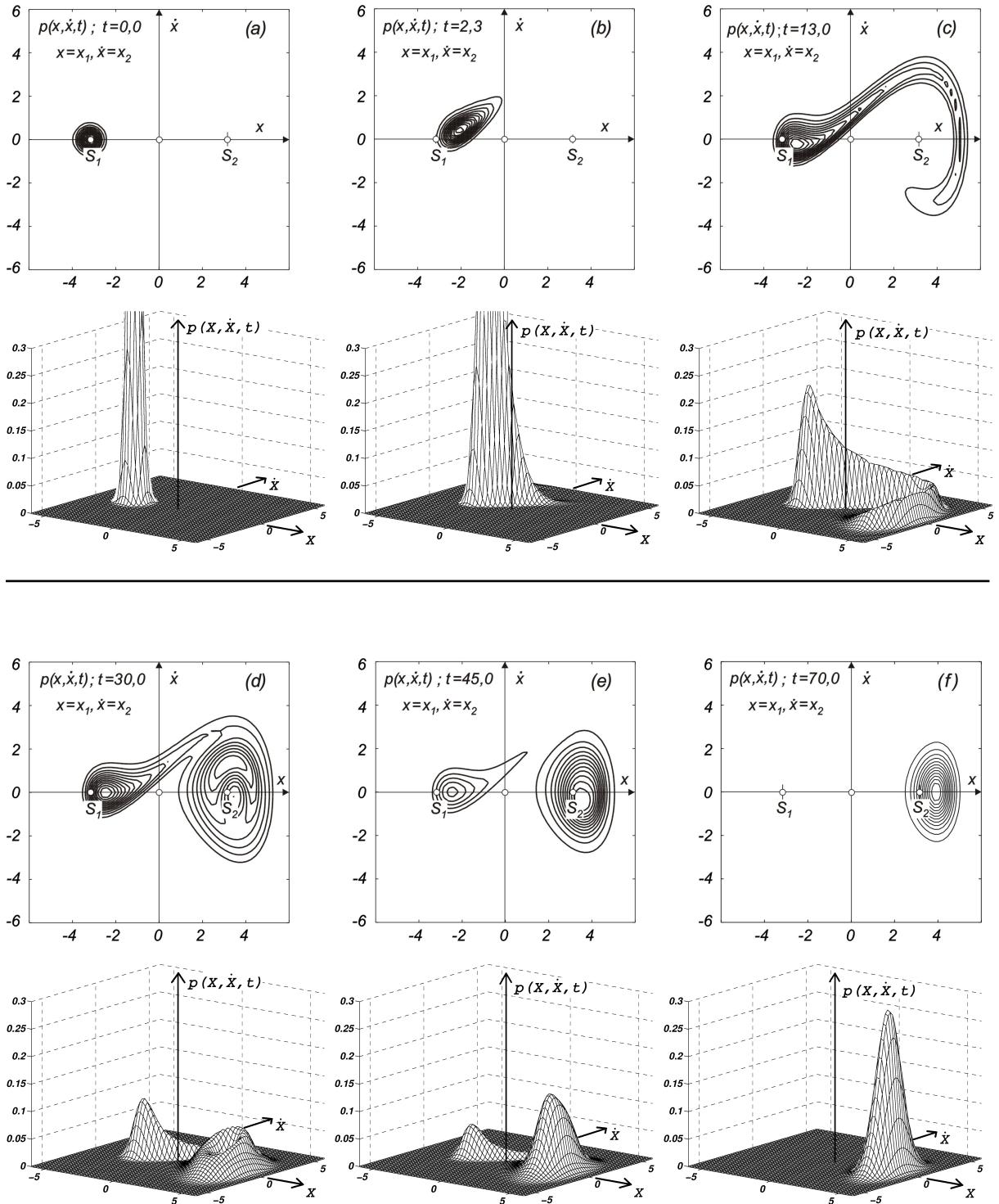


Figure 9: Vývoj PDF odezvy Duffingovy soustavy  $\omega_0^2 = 1.0$ ,  $\omega_b = 0.1$ ,  $\alpha^2 = 0.1$  v čase při parametrech  $\lambda = 10.0$ ,  $r = 1$ ; znázorněno je PDF pro šest stavů a to v okamžicích  $t = 0.0, 2.3, 13.0, 30.0, 45.0, 70.0$ ; jednotlivé stavy jsou uspořádány ve dvojicích (a) až (f), kde každá z nich se skládá z vrstevnicového diagramu (horní obrázek) a axonometrického pohledu (dolní obrázek).

Vybrané výsledky výpočtů jsou znázorněny pro stacionární případy odezvy v obr. 8. V každé řádce jsou uvedeny výsledky pro tyto parametry buzení: 1. řádek  $\lambda = 4, r = 6$  části obr. 8(1a) až 8(1c), 2. řádek  $\lambda = 6, r = 6$  části obr. 8(2a) až 8(2c), 3. řádek  $\lambda = 10, r = 1$  části obr. 8(3a) až 8(3c), 4. řádek  $\lambda = 60, r = 1$  části obr. 8(2a) až 8(2c); usporádání částí v každém řádku: (a) vrstevnicový diagram; (b) axonometrický pohled; (c) svislé řezy osami  $x, \dot{x}$ . Ze sloupců (a),(c) je zřejmé, že PDF rychlosti odezvy zůstává symetrická se středem v počátku. Impulsy buzení mají kladný směr. Je zřejmé, že bod  $S_2$  je koncentrátem PDF výchylky, nicméně odchylka v kladném směru je zřetelná. Tento typ odchylky je obecný a je třeba si jej uvědomit v aplikacích. Při silných amplitudách  $r = 6$  (1.a 2. řádek) je znatelný vliv bodu  $S_1$ , jímž je klesání v levé části PDF výchylky poněkud ovlivněno. Avšak nepodařilo se sestavit popis buzení a počátečních podmínek tak, aby výsledek měl alespoň částečně bi-modální charakter. Obecně můžeme říci, že PDF odezvy Duffingova oscilátoru při poissonovském buzení má zásadně odlišný charakter od PDF odezvy tohoto oscilátoru při buzení gaussovským bílým šumem, viz Wojtkiewicz et al. (1999), Náprstek & Král (2008).

Vývoj PDF v času není příliš zajímavý vycházíme-li při kladné orientaci impulsů z počáteční podmínky (14) pro bod  $S_2$ , tj.  $(1/\alpha, 0)$ . Vzdalujeme-li se s počáteční podmínkou od bodu  $S_2$  k bodu  $S_1$ , přechodový proces se dramatizuje. Ukázka je uvedena na obr. 9 pro výchozí bod  $S_1 \equiv (-1/\alpha, 0)$ . Stav vývoje PDF odezvy Duffingovy soustavy při parametrech buzení  $\lambda = 10.0, r = 1$  (3. řádek v obr. 8) je znázorněn pro šest okamžiků s přibližně logaritmickým odstupem:  $t = 0.0, 2.3, 13.0, 30.0, 45.0, 70.0$ . Každý z těchto okamžiků charakterizuje jedna z dvojic (a) až (f). Každá dvojice se skládá z vrstevnicového diagramu (horní obrázek) a axonometrického pohledu (dolní obrázek). Po spuštění procesu simulace opouští PDF původní rotační plochu počáteční podmínky (14), získává lehce protáhlý tvar a rychle snižuje výšku. V další fázi s významnou četností proráží energetickou bariéru a začíná "obtékat" bod  $S_2$ . V následující fázi se již PDF začíná koncentrovat do okolí  $S_2$ , nicméně v okolí tohoto bodu setrvává v PDF jistá konkávní oblast. Okolí bodu  $S_1$  je však stále ještě významné. V předposlední fázi se již dominantní část PDF soustředuje kolem  $S_2$ . V poslední etapě PDF zaujalo stacionární podobu.

## 5. Závěr

Studie navazuje na předchozí publikace autorů tohoto článku a řadu citovaných pramenů, které se zabývaly numerickým řešením MKP buď FP rovnice pro buzení gaussovskými bílými šumy anebo GFP rovnice pro buzení aditivními poissonovskými řetězci. GFP rovnice pro PDF odezvy nelineární dynamické soustavy je lineární stejně jako FP rovnice. Zahrnuje však všechna úskalí, která obsahuje FP rovnice, jako je velký počet prostorových proměnných, exponenciálně rostoucí rozsah diferenciální soustavy pro časový vývoj funkčních hodnot PDF v uzlech, atd.

Navíc GFP má integro-diferenciální charakter, což významně komplikuje sestrojení příslušných konečných prvků. Důvodem těchto komplikací je nelokální charakter integro-diferenciálního operátora konvolučního typu. Zatímco v dřívějších pracích se tento problém odstraňoval Fourierovou transformací v příslušných prostorových souřadnicích, zvolili autoři této studie přímou cestu diskretisace MKP. Tím odpadá nutnost zpětné Fourierovy transformace výsledku do originálu. Na druhou stranu je třeba pracovat s neznámými s posunutou proměnnou, přičemž zpracování tohoto posunu se řídí intenzitou a pravděpodobností skladbou vnějšího buzení příslušným poissonovským řetězcem.

Numerické výsledky ukazují, že poissonovské aditivní buzení vede u lineárních soustav k PDF, kterou lze přirovnat k PDF gaussovského typu, pokud postačí hrubý kvalitativní odhad výsledku. Při kvantitativní analýze je třeba si uvědomit nenulovou šikmost výsledné PDF, a tudíž nesymetrii statistiky výchylek. Také špičatost se liší od gaussovské. Tyto rozdíly je třeba respektovat zejména při analýzách malých pravděpodobností při velkých hodnotách prostorových souřadnic, s čímž se setkáváme v teorii spolehlivosti, v problémech prvního opuštění oblasti, atd.

## 6. Poděkování

Autoři děkují Grantové agentuře ČR (grant č. 103/09/0094), Grantové agentuře AV ČR (grant č. A200710902) a výzkumnému záměru ÚTAM AV0Z 20710524, za jejichž podpory vznikla tato práce.

## 7. Literatura

- Bergman L.A., Heinrich J.C. (1981) Petrov-Galerkin finite element solution for the first passage probability and moments of first passage time of the randomly accelerated free particle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **27**, 345-362.
- Bergman L.A., Spencer B.F. (1992) Robust numerical solution of the transient Fokker-Planck equation for nonlinear dynamical systems. In: *Proc. IUTAM Symposium Nonlinear Stochastic Mechanics* (N.Bellomo, F.Casciati eds). University Turin, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, pp.49-60.
- Bergman L.A., Spencer B.F., Wojtkiewicz S.F., Johnson E.A. (1996) Robust numerical solution of the Fokker-Planck equation for second order dynamical system under parametric and external white noise excitation. In: *Proc. Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics* (W. Langford, W. Kliemann, N. Sri Namachchivaya, eds). American Mathematical Society, pp. 23-27.
- Bolotin V.V. (1979) *Random Vibrations of Elastic Systems* (in Russian). Nauka, Moskva.
- Di Paola M., Vasta M. (1997) Stochastic integro-differential and differential equations of non-linear systems excited by parametric poisson pulses. *Int.Journal of Non-linear Mechanics*, **8**, 855-862.
- Gikhman, I.I., Skorokhod, A.V. (1972) *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin.
- Grasman J., van Herwaarden, O.A. (1999) *Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Applications*. Springer, Berlin.
- Grigoriu, M. (1996a) Response of dynamic systems to Poisson white noise. *Journal of Sound and Vibration*, **195**(3), 375-389.
- Grigoriu, M. (1996b) A partial differential equation for the characteristic function of the response of non-linear systems to additive Poisson white noise. *Journal of Sound and Vibration*, **198**(2), 193-202.
- Kloeden, P.E., Platen E. (1992) *Numerical solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin.
- Köylüoğlu, H.U., Nielsen, S.R.K., Iwankiewicz, R. (1994) Reliability of non-linear oscillators subject to Poisson driven impulses. *Journal of Sound and Vibration*, **176**(1), 19-33.
- Köylüoğlu, H.U., Nielsen, Cakmak, A.S. (1998) Fast cell-to-cell mapping (path integration) for nonlinear white noise and Poisson driven systems. *Structural Safety*, **17**, 151-165.
- Langley, R.S. (1985) A finite element method for the statistics of nonlinear random vibration. *Journal of Sound and Vibration*, **101**, 41-54.
- Langtangen H.P. (1991) A general numerical solution method for Fokker-Planck equations with applications to structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **6**, 1991, 33-48.
- Lin Y.K., Cai G.Q. (1995) *Probabilistic Structural Dynamics - Advanced Theory and Applications*. McGraw - Hill, New York.
- Masud A., Khurram R. (2004) A multiscale-stabilized finite element method for the advection-

- diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 1997-2018.
- Masud A., Bergman, L.A. (2005) Application of multi-scale finite element methods to the solution of the Fokker-Planck equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 1513-1526.
- Mironowicz, W., Sniady, P. (1990) Vibration of linear structures due to jump-discontinuous, non-interrupted, stochastic processes. *Earthquake engineering and structural dynamics*, **19**, 577-582.
- Náprstek J. (2005) Some properties and applications of eigen functions of the Fokker-Planck operator. In: *Proc. Engineering Mechanics 2005* (V.Fuis et al.eds). ÚMT VUT Brno, Svatka, CD ROM, 12pp.
- Náprstek J., Král R. (2008): Some instances of the Fokker-Planck equation numerical analysis for systems with gaussian noises. *Engineering Mechanics*, **15**, 6, 419-434.
- Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. (1987) *Stochastic Differential Systems - Analysis and Filtering*. J. Wiley, Chichester.
- Schuëller, G. at al. (1997) A state of the art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics - Special Issue*, **12**, 197-321.
- Sniady, P. (1989) Dynamic response of linear structures to a random stream pulses. *Journal of Sound and Vibration*, **131**(1), 91-102.
- Spencer B.F., Bergman L.A. (1993) On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Dynamics*, **4**, 357-372.
- Tylkowski, A., Marowski, W. (1986) Vibration of a non-linear single degree of freedom system due to Poissonian impulse excitation. *Int.Journal Non-Linear Mechanics*, **3**, 229-238.
- Vasta, M. (1995) Exact stationary solution for a class of non-linear systems driven by non-normal delta-correlated processes. *Int.Journal of Non-linear Mechanics*, **30**, 407-418.
- Wojtkiewicz, S., Johnson, E., Bergman, L.A., Grigoriu, M., Spencer, B.F. (1999) Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: Solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **168**, 73-89.