ENGINEERING MECHANICS 2009
National Conference with International Participation
Svratka, Czech Republic, May 11 – 14, 2009

pp. 751–756
Paper **#216**

EXTENDED DELAUNAY MESH GENERATOR

D. Krybus, B. Patzák [1]

Summary: *This paper deals with the description of algorithms used for constructing finite element meshes and recognition of boundaries in the context of fluid-structure simulations. First, the overview of numerical approaches to fluid-structure interaction is given and the focus is on particle finite element method. Delaunay triangulation, which is able to generate high quality meshes, was chosen as a suitable meshing method. Alpha shape concept derived from Delaunay triangulation was considered as proper boundary recognition algoritm. The algorithms are being implemented in finite element package OOFEM to enable analysis of fluid-structure interaction problems.*

1. Úvod

Aktuální tématem numerických metod je rozvoj nástrojů určených k analýze inženýrských problémů zahrnujících interakci konstrukcí s kapalinami, které uvažují velké pohyby volné hladiny a přítomnost částečně nebo úplně ponořených těles. Tyto metody pak se pak uplatňují například v modelování hydrodynamického chování lodí, konstrukcí na pobřeží nebo v moři, přepadů přehrad, toku s volnou hladinou v kanálech, nádržích s tekutinami, míchacích zařízení apod.

Pro modelování pohybu pevných těles v kapalinách, jejich vzájemné interakce, či úloh s volnou hladinou se obvykle používá metoda konečných prvků založená na tzv. *arbitrary Lagrange-Eulerovy (ALE)* formulaci. V ALE přístupu je pohyb částic tekutiny oddělen od pohybu uzlů sítě. Relativní vztah mezi pohybem sítě a částic je v momentových rovnicích popsán konvektivní rychlostí.

Obtíže, které analýza interakce konstrukce s kapalinou (*fluid-structure interaction — FSI*) prostřednictvím ALE formulace přináší, zahrnují například potřebu vypořádat se s konvektivním členem rychlosti, zajistit podmínku nestlačitelnosti kapaliny, modelování a sledování hladiny, přenos informací mezi doménami pevné a kapalné části na kontaktním rozhraní, modelování lomu vln, popis velkých pohybů tuhých těles či účinné a rychlé obnovování sítě pro obě domény.

Některé z těchto problémů vymizí, je-li pro formulaci řídících rovnic domény použit Lagrangeovský přístup a to jak pro pevnou, tak kapalnou fázi. V Lagrangeovské formulaci je pohyb diskretizované domény svázán s pohybem sítě. Uzly konečněprvkové sítě lze tak v jistém smyslu považovat za pohybující se částice.

[1] Ing. David Krybus, doc. Dr. Ing. Bořek Patzák, Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, tel. +420 224 355 417, email: david.krybus@fsv.cvut.cz

Do třídy Lagrengeovsky formulovaných metod spadá také *particle finite element method — PFEM* (Oñate at al., 2007) vyvíjená týmem profesora Oñateho z mezinárodního centra pro numerické metody v inženýrství CIMNE na Technické univerzitě v Barceloně. V této metodě jsou uzly sítě z domény kapaliny a pevných látek uvažovány jako částice, které se mohou volně pohybovat a v případě kapalin dokonce oddělovat z hlavní domény, což simuluje například oddělování kapek vody. Nejedná se však o diskrétní model. Částice reprezentuje hmotu a přenáší informaci o objemu ve svém okolí. V každém kroku se z těchto částic vytváří konečněprvková síť, na níž jsou pak standardním způsobem metody konečných prvků řešeny charakteristické rovnice. PFEM je dalším krokem v přirozeném vývoji práce kolektivu autorů zabývajících se řešením FSI úloh prostřednictvím Lagrangeovských konečných prvků a bezsíťových metod.

Nespornou výhodou Lagrangeovské formulace je absence konvektivních členů, které v jiných formulacích řešení komplikují a vyžadují jejich stabilizaci. Daní za tuto přednost je ovšem nutnost adekvátně se zabývat pohybem uzlů sítě. Pro velké pohyby sítě musí být zajištěno její časté obnovování během celé doby řešení, prakticky v každém jeho kroku. Jednou z možností je použití rozšířeného Delauneyovského mozaikování (*extended Delauney tesselation*), jako algoritmu sloužícího ke generování hledané sítě. Vzniklé mnohostěnové prvky s sebou nesou nutnost použití zvláštních tvarových funkcí např. z bezsíťové metody konečných prvků.

Lagrangeovský přístup přináší mnoho výhod pro sledování částic v proudu s uvažováním velkých pohybů hladiny nebo lomících se vln či rozstřikujících se kapalin. S tím vyvstává potřeba identifikace hranice domény množiny daných uzlů. Hranicí je tímto považována jak volná hladina, tak jednotlivé částice pohybující se ven z hlavní domény. Pro účely identifikace se osvědčila technika *Alpha Shape*.

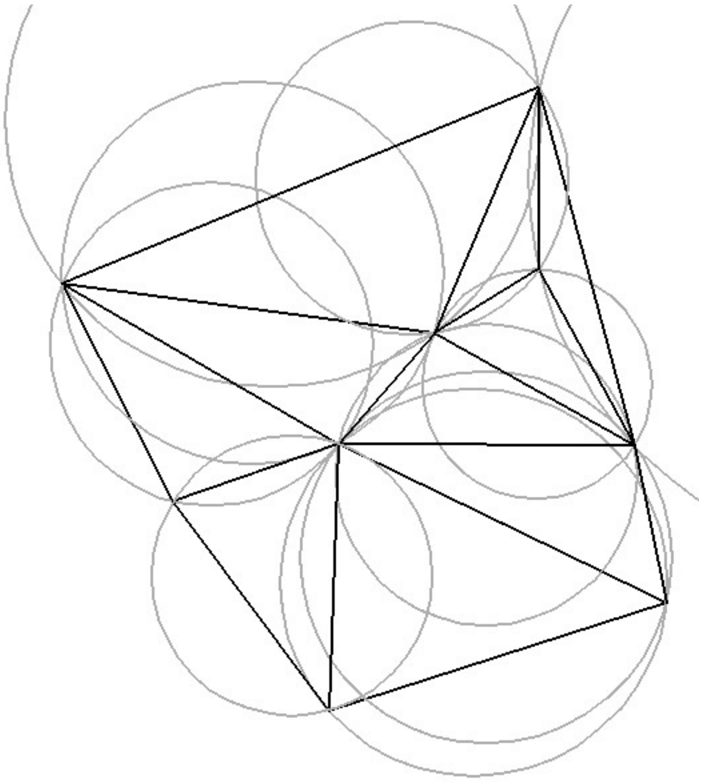
Cílem je implementovat tuto metodu do programu pro výpočet metodou konečných prvků OOFEM (2000) vyvíjeného na Katedře mechaniky Stavební fakulty ČVUT v Praze. OOFEM je zkratka pro *object oriented Finite Element Method* a jak už z názvu vypovídá, jedná se o řešič s objektově orientovanou strukturou. Jelikož popisovaná metoda je náročná z hlediska obnovování konečněprvkové sítě, je prvním krokem vytvoření interního generátoru sítě a metody detekce hranice, což popisuje tento článek.

2. Delaunayova triangulace

Jednou z metod často používaných ke generování sítí je takzvaná Delaunayovská triangulace. Ta byla definována Borisem Delaunayem v roce 1934 pro obecnou množinu bodů P jako taková triangulace, že každá z opsaných kružnic k jednotlivým trojúhelníkům neobsahuje žádný z bodů P, kromě tří tvořících vrcholy trojúhelníku. Delaunayovská triangulace maximalizuje minimální úhel ze všech úhlů v trojúhelnících, což umožňuje získat „kvalitní" síť zaručující stabilní výpočet.

Tuto definici lze rozšířit i do trojrozměrného prostoru. Výsledkem triangulace jsou potom čtyřstěny, jimž opsané koule opět neobsahují jiné body než definiční body na kulové ploše. Teoreticky je možné i rozšíření do jiných než eukleidovských prostorů, což ovšem nezaručuje existenci nebo jedinečnost triangulace.

Duální k Delaunayovské triangulaci je Voronoiův diagram někdy také označovaný jako Voronoiovské mozaikování. Jeho výsledkem je rozdělení metrického prostoru na základě množiny bodů takové, že jakákoliv část je ke svému definičnímu bodu blíže než k jakémukoliv jinému. Pro případ dvou bodů v rovině je tato dělena přímkou kolmou a půlící jejich spojnici. Máme-li



Obr.1 Delaunayovská síť

tři body neležící na přímce, je průsečíkem hranic oddělujících části příslušejících bodům právě střed opsané kružnice trojúhelníku s vrcholy v těchto bodech.

Existuje množství algoritmů sloužících k výpočtu Delaunayovské triangulace, které se dají rozdělit do několika skupin:

- inkrementální vkládací algoritmy
- „flipping" algoritmy
- algoritmy „rozděl a panuj"
- projekční algoritmy

Nepřímo lze díky dualitě použít i tzv. *Sweep-line* algoritmus, který je jedním z nejpoužívanějších k získání Voronoiova diagramu. Pak již snadné vytvořit Delaunayovskou triangulaci.

Inkrementální algoritmy pracují s udržováním stávající Delaunayovy triangulace, do které je v každém kroku vkládán nový bod. Po jeho vložení je síť upravena tak, aby nadále splňovala základní vlastnost.

Flipping algoritmy spočívají v záměně, tzv. „flippovaní" stran trojúhelníků, které nejsou Delaunayovské. Obecně jsou tyto metody založeny na dvou krocích. Nejprve je vygenerována obecná trojúhelníková síť a ta je následně optimalizována záměnou stran tak, aby výsledná síť splňovala Delaunayovskou podmínku. Princip záměny stran si je možné představit následovně. Máme dva trojúhelníky, které mají společnou stranu. Není-li pro tyto trojúhelníky splněna podmínka prázdných opsaných kružnic, nemůže být společná strana Delaunayovská. Pokud si tuto stranu představíme jako diagonálu ve čtyřúhelníku, pak jejím smazáním a rozdělením čtyřúhelníku druhou diagonálou získáme trojúhelníky splňující Delaunayovo kritérium.

Projekční algoritmy převádí úlohu hledání Delaunayovské triangulace na úlohu výpočtu konvexní obálky (*convex hull*) To spočívá v zobrazení bodů na o jednu dimenzi vyšší paraboloid umístěný v počátku. Výpočtem konvexní obálky a její zpětnou projekcí do původní dimenze získáme strany triangulace.

3. Bowyer/Watsonův algoritmus

Algoritmus označovaný jako Bowyer/Watsonův patří mezi jeden z nejpoužívanějších. Spadá do kategorie inkrementálních algoritmů a je založen na postupném přidávání jednotlivých bodů do triangulace. Tento algoritmus odvodil Adrian Bowyer (1981) a nezávisle na něm David F. Watson (1981). Shodou okolností byl popsán v příspěvcích těchto autorů, které vyšly vedle sebe v jednom čísle *The Computer Journal*.

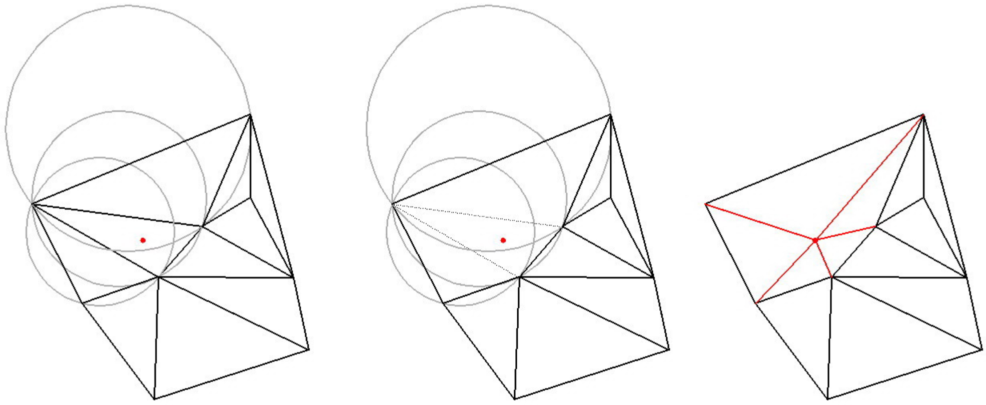
Na počátku bývá zpravidla vytvořen tzv. *bounding-box*, v tomto případě trojúhelník, obsahující všechny body. Do této úvodní triangulace jsou pak body jeden po druhém postupně vkládány a je vždy vyžadováno splnění Delaunayovské vlastnosti. To spočívá v hledání trojúhelníků, do jejichž opsané kružnice vložený bod spadá. Tyto jsou pak smazány a strany jim sousedních trojúhelníků vytvoří tzv. vkládací polygon. Spojením vrcholů polygonu a nově vloženého bodu vznikne nová triangulace splňující Delaunayovskou vlastnost. Po přidání všech bodů do triangulace jsou pak bounding-box a všechny strany směřující od jeho vrcholů do triangulace vymazány.

Tab.1 Schéma algoritmu

1. vytvoř *bounding-box*, zahrnující všechny body p
2. dokud nejsou vloženy všechny body p
   (a) vlož bod p do triangulace
   (b) najdi všechny opsané kružnice s příslušnými trojúhelníky obsahující bod p
   (c) smaž tyto trojúhelníky $\rightarrow$ vkládací polygon
   (d) vytvoř triangulaci vkládacího polygonu spojením jeho vrcholů s bodem p
3. odstraň *bounding-box*

Výhodou tohoto algoritmu je snadná rozšiřitelnost z roviny do prostoru. Na místo trojúhelníkům opsaných kružnic jsou hledány dotčené koule opsané čtyřstěnům. Nedelaunayovské čtyřstěny jsou pak smazány, čímž vznikne „dutý” vkládací mnohostěn obsahující pouze vkládaný bod. Výsledkem jeho spojení s vrcholy vkládacího mnohostěnu je opět triangulace splňující předpoklady.

Nevýhoda tohoto algoritmu spočívá v možnosti vzniku defektní sítě vlivem zaokrouhlovací chyby. Při hledání trojúhelníků, které mají být mazány, může touto cestou dojít k opomenutí některého z dotčených a tím pádem není vkládací polygon prázdný. Aby bylo možno dosáhnout robustní implementace, je potřeba použít zvláštní algoritmus k přesnému určení vkládacího polygonu jako je například depth-first hledání.



Obr.2 Vkládání bodů

Další z nevýhod, kterou je nutno zmínit, souvisí s „kvalitou" vzniklých trojúhelníků jakožto prvků pro výpočet metodou konečných prvků. Obecně lze říct, že Delaunayovská síť je kvalitní, ale existenci nekvalitních prvků nelze vyloučit. Jedná se především o trojúhelníky na hranici oblasti, případně trojúhelníky, jejichž středy opsaných kružnic se nacházejí v nepatrné vzdálenosti a jejichž poloměry se sobě také blíží. Ve většině generátorů sítí se takovéto prvky „napravují" vložením dalších bodů do těžiště nebo jejich vymazáním a vložením bodu do těžiště jejich opsané kružnice. Eventuálně je možné použít kombinaci s metodou postupné fronty.

4. Rozšířené Delaunayovo mozaikování

Z hlediska metody PFEM se nejproblematičtějšími jeví případy, kdy může docházet k zaokrouhlovací chybě, tzn. více, než tři body mají jednu společnou kružnici, případně se tomuto stavu blíží, což znamená, že každé trojici z dotčených bodů lze opsat několik kružnic, avšak tyto se příliš neliší co do polohy středu ani co do velikosti poloměru. V rozšířeném Delaunayově mozaikování (*extended Delaunay tessellation*) se zavádí parametr δ, který určuje minimální možnou vzdálenost opsaných kružnic. Je-li skutečná vzdálenost menší, potom se body považují za kocirkulární a nevzniká trojúhelník nýbrž obecně mnohoúhelník. Z toho důvodu se již nehovoří o triangulaci, ale o mozaikování. Takto vzniklé prvky ovšem vyžadují zvláštní bázové funkce (Idelsohn at al., 1999).

5. Alpha shape koncept

Důležitým aspektem Delaunayovy triangulace a obecně všech úloh generování sítí konečných prvků je také nutnost zachovávat původní hranici domény. V případě její značné členitosti, může dojít k situaci, že vypočtená triangulace hranici nerespektuje a prvky zabírají neexistující plochu. Většině přístupů snažícím se tomuto stavu zamezit je společné, že definovanou hranici rozdělí na více segmentů, čímž se zajistí dostatečně jemná síť na okrajích domény.

Uvažujeme-li Lagrangeovské úlohy proudění, nemáme jako v jiných variantách MKP hranici domény explicitně definovanou. Jak již bylo zmíněno, aktuální konfigurace částic v prostoru je výsledkem předcházejícího kroku řešení. Vyvstává tím pádem potřeba algoritmu schopného jak určit „obálku" částic, tak rozpoznat, zde nedošlo k oddělení dílčí subdomény.

Variantou takového algoritmu je *Alpha Shape* koncept (Edelsbrunner and Mücke, 1994) vycházející z Voronoiova diagramu duálního k Delaunayovské triangulaci. Pracuje s funkcí minimálních vzdálenosti jednotlivých bodů $h(x)$ přenásobenou koeficientem α. Uvažuje, že je-li kružnice o poloměru daným součinem $\alpha h(x)$opsaná dvěma sousedním bodům prázdná, body leží na hranici. Tím je jednoznačně určeno kritérium hranice.

6. Závěr

Cílem tohoto článku je představení a popis metody Delaunayovy triangulace a techniky Alpha Shape, které budou po implementaci sloužit během řešení problému interakce kapaliny s konstrukcí k obnovování sítě konečných prvků a detekci hranice v každém časovém kroku. Uzly sítě budou tvořeny materiálovými body – částicemi. V případě Delaunayovské triangulace se tedy nejedná se o typický generátor sítě na dané doméně, ale o nástroj sloužící k vytvoření numericky vhodné sítě prvků z materiálových bodů, jejichž poloha je určená buďto jejich úvodní konfigurací případně jako výsledek předcházejícího kroku řešení.

7. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory interního grantu Českého vysokého učení technického v Praze IGS.

8. Reference

Bowyer, A. 1981: Computing Dirichlet tessellations. *The Computer Journal* Vol. 24, 162-166

Edelsbrunner, H., Mücke E.P. 1994: Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transaction on Graphics* 13, 43-72

Idelsohn, S.R., Calvo, N., Oñate, E. 1999: Polyhedrization of an arbitrary 3D point set. *Computer methods in applied mechanics and engineering* Vol. 192, 2649-2667

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Del Pin, F., Aubry, R. 2007: The particle finite element method. An overview. *International Journal of Computational Method* Vol. 1, 267-307

Patzák, B. 2000: OOFEM project homepage *http://www.oofem.org*

Shewchuck, J.R. 1999: *Lecture notes on Delaunay mesh generation*

Watson, D.F. 1981: Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *The Computer Journal* Vol. 24, 167-172