ENGINEERING MECHANICS 2009
National Conference with International Participation
Svratka, Czech Republic, May 11 – 14, 2009
pp. 757–765
Paper #136

MODELLING OF THE KNEE JOINT ARTHROPLASTY

J. Křen*, J. Pokorný*, K. Koudela**

Summary: *From the point of view of the knee joint mathematical modelling, the interest has to be focused to kinematic and geometric relations of the link between femur and tibia (relative motion), static and dynamic loading of this complex (especially the contact force) and tribilogical relations of the artificial knee joint replacement. Application for the synovial fluid flow modelling in the total knee alloplastic is presented. The model is simplified as a planar model and the pressure distribution due to the interaction between femur and tibia in the synovial fluid is computed. The investigated area is defined by the articular cavity between femoral and tibial condyles. The pressure distribution in the total knee replacement is presented at the end of this article*

1. Úvod

Rovnice popisující proudění nenewtonské kapaliny jsou odvozeny ze stejných principů mechaniky jako proudění Newtonovy kapaliny. Pro izotermické proudění se jedná o Navierovu-Stokesovu rovnici a rovnici kontinuity. Typ nenewtonské kapaliny je potom vyjádřen příslušným konstitutivním vztahem. Systém rovnic musí být obecně doplněn odpovídajícími počátečními a okrajovými podmínkami. Pro zjednodušení budeme uvažovat izotermické, laminární a nestacionární proudění nestlačitelné nenewtonské kapaliny.

Základní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice a rovnice kontinuity píšeme ve tvaru (Křen a kol. 2001)

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

kde ρ je hustotu kapaliny, v_i jsou složky vektoru rychlosti, f_i složky měrné vnější síly, τ_{ij} je tenzor napjatosti a Ω je zkoumaná oblast vyplněná kapalinou. Dále je nutné znát konstitutivní vztah uvažované konkrétní nenewtonské kapaliny. Tento vztah může být obecně zapsán ve tvaru

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}, \tag{2}$$

* Prof. Ing. Jiří Křen, CSc., Ing. Jiří Pokorný, Katedra mechaniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 326 00 Plzeň; tel.: +420 377 632 301, fax: +420 377 632 302; e-mail: kren@kme.zcu.cz

**.Prof. MUDr. Karel Koudela, CSc., Lékařská fakulta UK v Plzni a Fakultní nemocnice, Alej Svobody 80, 304 60, Plzeň, tel.: +420 377 103 953, fax: +420 377 103 955; e-mail: koudela@fnplzen.cz

kde $T_{ij} = T_{ij}(v_i)$ je disipativní část tenzoru napjatosti a tento tenzor je funkcí smykové rychlosti. Řešení je závislé na volbě nelineárního konstitutivního vztahu, tj. na volbě vztahu $T_{ij} = T_{ij}(v_i)$. Zde je vhodné použít formálně stejný konstitutivní vztah jako pro Newtonovu kapalinu. Pak se hovoří o zobecněné nenewtonské kapalině, jejíž nelineární konstitutivní vztah je uvažován ve tvaru (Křen a kol. 2001)

$$T_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma})D_{ij}. \tag{3}$$

V tomto vztahu $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ je tensor rychlosti deformace a $\dot{\gamma}$ smyková rychlost kapaliny. Důležitou složkou tohoto konstitutivního vztahu je znalost funkce viskozity $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, která se určuje na základě experimentálního měření pomocí viskozimetrů.

Dále se omezíme na řešení stacionárního, izotermického a laminárního proudění nestlačitelné vazké nenewtonské kapaliny. Po dosazení konstitutivního vztahu (2) do pohybové rovnice (1) získáme následující systém rovnic a okrajových podmínek:

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad x \in \Omega; \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Okrajové podmínky mají potom tvar

$$v_i(x) = \hat{v}_i(x), \quad x \in \partial\Omega_1; \qquad \tau_{ij} n_j = \left(-p\delta_{ij} + T_{ij}\right)n_j = \hat{\sigma}_i, \quad x \in \partial\Omega_2. \tag{5}$$

V tomto zápisu stříška značí dané hodnoty a $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ jsou disjunktní části hranice $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ oblasti Ω. Řešíme sdruženou úlohu, tj. řešíme současně složky rychlosti $v_i(x)$ a tlak $p(x)$.

Za výše uvedených předpokladů můžeme s využitím Galerkinovy metody a Greenovy věty vyjádřit slabé řešení proudění nenewtonovských kapalin ve tvaru integrálních identit. Platí (Křen & Hynčík 2005)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}\delta v_i dx + \int_\Omega \rho v_j^* \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta v_i dx - \int_\Omega p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \eta(\dot{\gamma}^*)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\ &= \int_\Omega \rho f_i \delta v_i dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx; \qquad \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\delta p \, dx = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Provedeme-li dále prostorovou diskretizaci pomocí MKP a pokud volíme izoparametrické prvky, jsou složky vektoru rychlosti $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w$ a tlak p aproximovány vztahy

$$\begin{aligned} &u(\xi,\eta,\zeta) = \mathbf{N}^T(\xi,\eta,\zeta)\mathbf{u}; \qquad v(\xi,\eta,\zeta) = \mathbf{N}^T(\xi,\eta,\zeta)\mathbf{v}, \\ &w(\xi,\eta,\zeta) = \mathbf{N}^T(\xi,\eta,\zeta)\mathbf{w}; \qquad p(\xi,\eta,\xi) = \mathbf{H}^T(\xi,\eta,\xi)\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{7}$$

Vztahy (6) potom vedou na soustavu nelineárních algebraických rovnic, kterou řešíme např. Newtonovou-Raphsonovou metodou. Při komprimovaném zápisu

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f} \tag{8}$$

je iterační proces řízen vztahy

$$\mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{J}_{(r)}^{-1}\mathbf{R}^{(r)} \ ; \qquad \mathbf{R}^{(r)} = \mathbf{K}^{(r)}\mathbf{x}^{(r)} - \mathbf{f} \ . \tag{9}$$

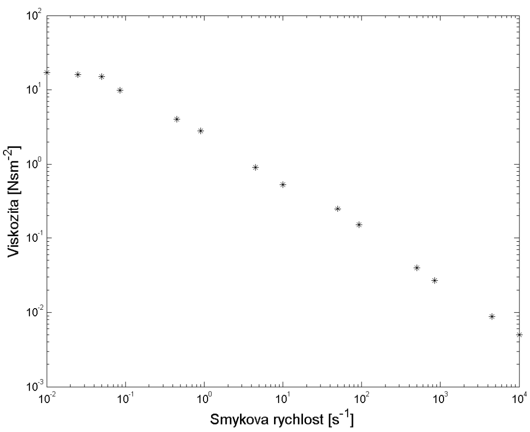
Zde $\mathbf{J}$, resp. $\mathbf{R}$, je Jacobiova funkcionální matice, resp. reziduální vektor (viz Křen & Hynčík 2005).

2. Synoviální kapalina

Kolenní kloub je obklopen membránou (synovie), která produkuje malé množství husté kapaliny - synoviální kapalina. Synoviální kapalina pomáhá vyživovat chrupavku a udržovat její hladký a kluzký povrch. Tato kapalina reprezentuje tekutou složku kloubních spojení. Z biomechanického pohledu se jedná o filtrát krevní plazmy obsahující variabilní množství komplexu protein-hyaluronové kyseliny. Přestože funkce synoviální kapaliny nebyla doposud dostatečně objasněna, všeobecně se předpokládá, že hyaluronová kyselina představuje základní složku mazání kloubů.

Reologie považuje synoviální kapalinu za nenewtonskou kapalinu s výrazným viskoelastickým chováním. Viskoelasticita synoviální kapaliny závisí na pH a iontovém složení roztoku. Synoviální kapalina, stejně jako ostatní biologické kapaliny, obsahuje velké množství organických a anorganických látek.

Viskoelastické chování synoviální kapaliny, je pozorováno při malých deformacích a při malých smykových rychlostech. Pro napjatost Newtonovy kapaliny (lineární viskozita, nestlačitelnost) obecně platí lineární vztah mezi tenzorem napjatosti a tenzorem rychlosti deformace. V mechanice nenewtonských kapalin je tento vztah nelineární a viskozita je funkcí smykové rychlosti. Hodnota viskozity závisí na množství hyaluronové kyseliny, hodnotě pH, iontovém složení roztoku a na patologickém stavu kloubu. Poškození synoviální kapaliny vede k prudkému poklesu viskozity. Viskozita také klesá s rostoucí smykovou rychlostí. Na obr. 1 jsou zobrazeny experimentální hodnoty viskozity synoviální kapaliny (Fung 1993). Rozsáhlá oblast lineární závislosti dovoluje aproximovat závislost dynamické viskozity na smykové rychlosti pomocí čtyřparametrického modelu - Carreauův a Crossův model.



Obr. 1 Experimentální hodnoty viskozity synoviální kapaliny

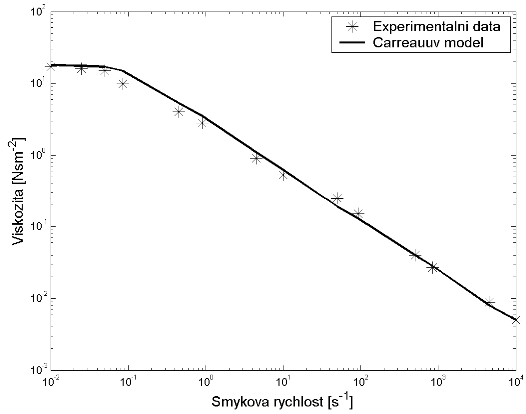
Parametry $\eta_\infty, \eta_0, \dot{\mu}$ a m jsou vybrány tak, aby co nejlépe aproximovaly experimentální hodnoty. Parametry η_∞ a η_0 představují limitní chování kapaliny pro velmi vysoké a velmi nízké smykové rychlosti. Experimetální hodnoty synoviální kapaliny nevykazují limitní chování pro vysoké smykové rychlosti ($10^4 s^{-1}$). Obr. 2 ukazuje průběh dynamické viskozity pro Carreaův model ($\eta_\infty = 0,\ \eta_0 = 35 Nsm^{-2},\ \dot{\mu}_C = 0{,}09\, s^{-1}, m = 0{,}35$ - Křen & Hynčík 2005) a na obr. 3 je uveden průběh viskozity jako funkce smykové rychlosti pro Crossův model ($\eta_\infty = 0,\ \eta_0 = 24 Nsm^{-2},\ \dot{\mu}_C = 0{,}05\, s^{-1}, m = 0{,}7$ - Křen & Hynčík 2005).

Carreaův model

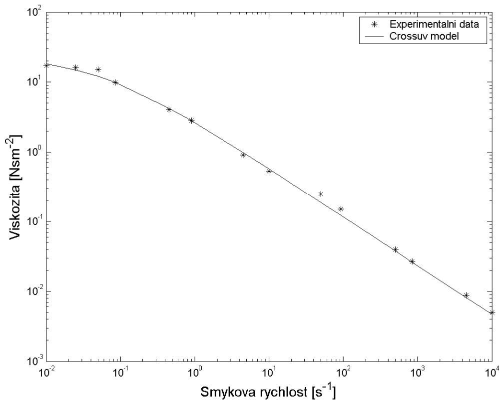
$$\eta = \eta_\infty + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty)}{\left(1 + \left(\frac{\dot{\mu}}{\dot{\mu}_C}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}}}$$

Grossův model

$$\eta = \eta_\infty + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty)}{1 + \left(\frac{\dot{\mu}}{\dot{\mu}_C}\right)^m} \qquad (10)$$



Obr. 2 Carreaův model

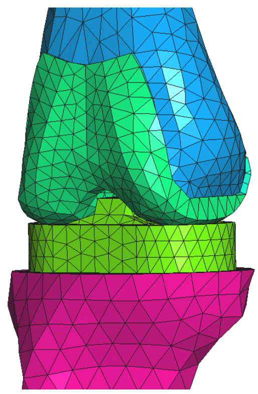


Obr. 3 Crossův model

3. Aloplastika kolenního kloubu

Aloplastika, totální náhrada kolenního kloubu, je metoda léčby těžce destruovaných kolenních kloubů. Nejčastějšími indikacemi pro implantaci totální náhrady je pokročilá artróza, destrukce kolenního kloubu při revmatoidní artritidě, tumoru, posttraumatických stavech atd.

Obr. 4 Aloplastika kolenního kloubu

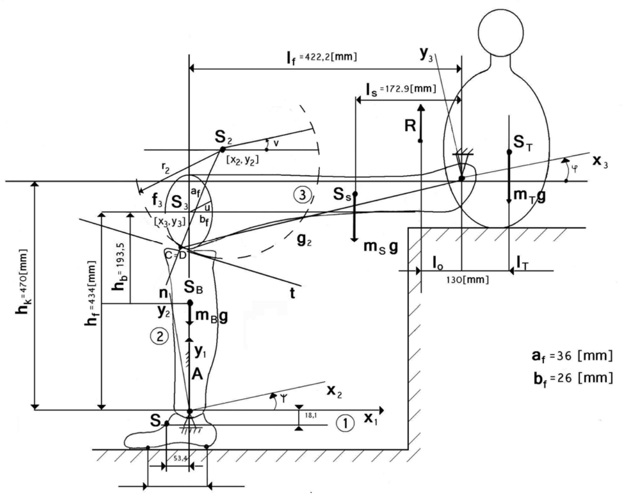


Obr. 5 MKP model náhradního kloubu

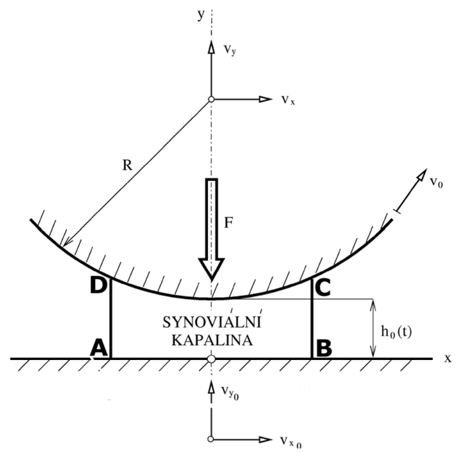
Pro zjištění tribologických vztahů totální náhrady kolenního kloubu je možné v prvním přiblížení uvažovat rovinný model kolenního kloubu (obr. 6 a 7). Tento model představuje problém kontaktu dvou válců, který je převeden (při zachování relativní křivosti) na model kontaktu mezi válcem a pevnou podložkou. Model poměrně dobře aproximuje kontakt mezi laterálními kondyly femuru a tibie. Pro rozložení tloušťky filmu synoviální kapaliny platí vztah (Křen & Hynčík 2005)

$$h(x,t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R} + \frac{4}{\pi E}\int_a^b p(\xi,t)\ln\frac{2\bar{b}}{|x-\xi|}d\xi\,. \tag{11}$$

Zde R, resp. E, je redukovaný poloměr křivosti, resp. redukovaný modul pružnosti totální náhrady kolena.

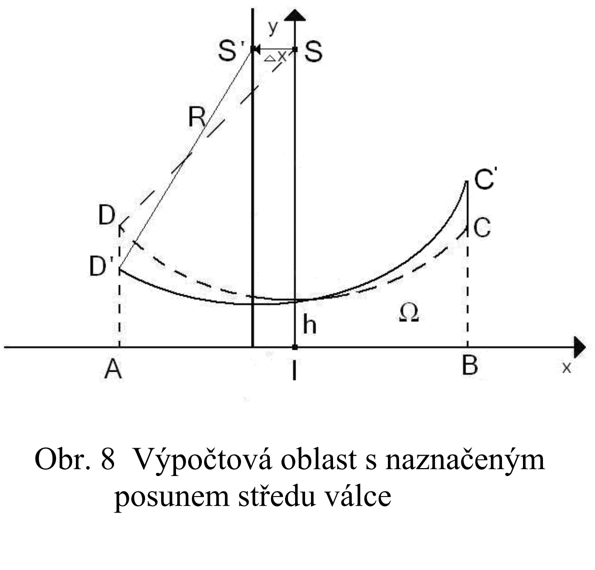


Obr. 6 Model kolenního kloubu v sagitální rovině (Křen & Hynčík 2005)

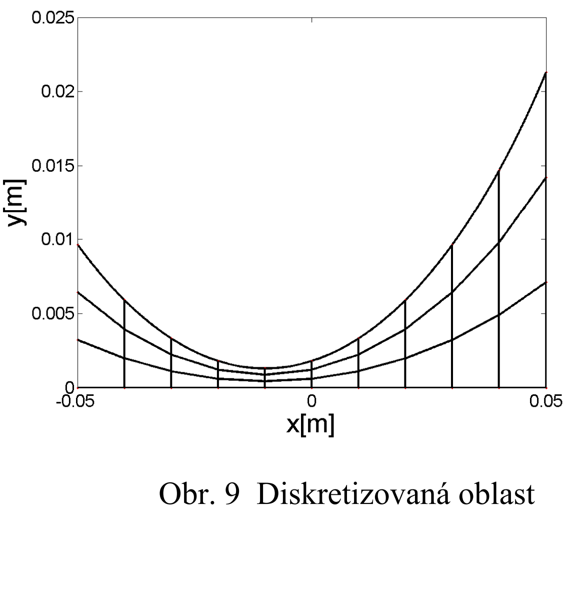


Obr. 7 Zjednodušený rovinný model kolenního kloubu

4. Testovací výsledky



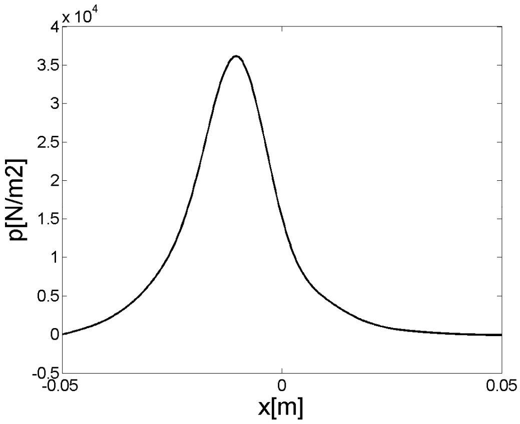
Obr. 8 Výpočtová oblast s naznačeným posunem středu válce



Obr. 9 Diskretizovaná oblast

Metodou konečných prvků bylo modelováno stacionární tlakové pole synoviální kapaliny proudící v kontaktní oblasti kolenního kloubu. Zkoumaná oblast (obr. 7) je ohraničena hranicí $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, kde $\partial\Omega_1$ je část hranice představující tibiální kondyl - AB, $\partial\Omega_2$ je výstup z oblasti - BC, $\partial\Omega_3$ je pohyblivá část hranice - CD a $\partial\Omega_4$ tvoří vstup - DA. Poloměr válce je R = 0.1 [m], délka výpočtové oblasti l = 0.1 [m] a úhlová rychlost otáčení ω = 3 [rad/s] (Forsterviczová 2005). Hodnota tlaku na vstupní $\partial\Omega_4$ a výstupní části $\partial\Omega_2$ hranice je nulová. Na výstupu z oblati $\partial\Omega_2$ je dále nulová parciální derivace tlaku $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Splnění okrajových podmínek pro tlak dosáhneme nalezením vhodné polohy válce (resp. kružnice, schematicky znázorněno na obr. 8).

Rozložení tlaku v synoviální kapalině je znázorněno na obr. 10 (Carreauův model). Crossův model vykazuje podobné závislosti.



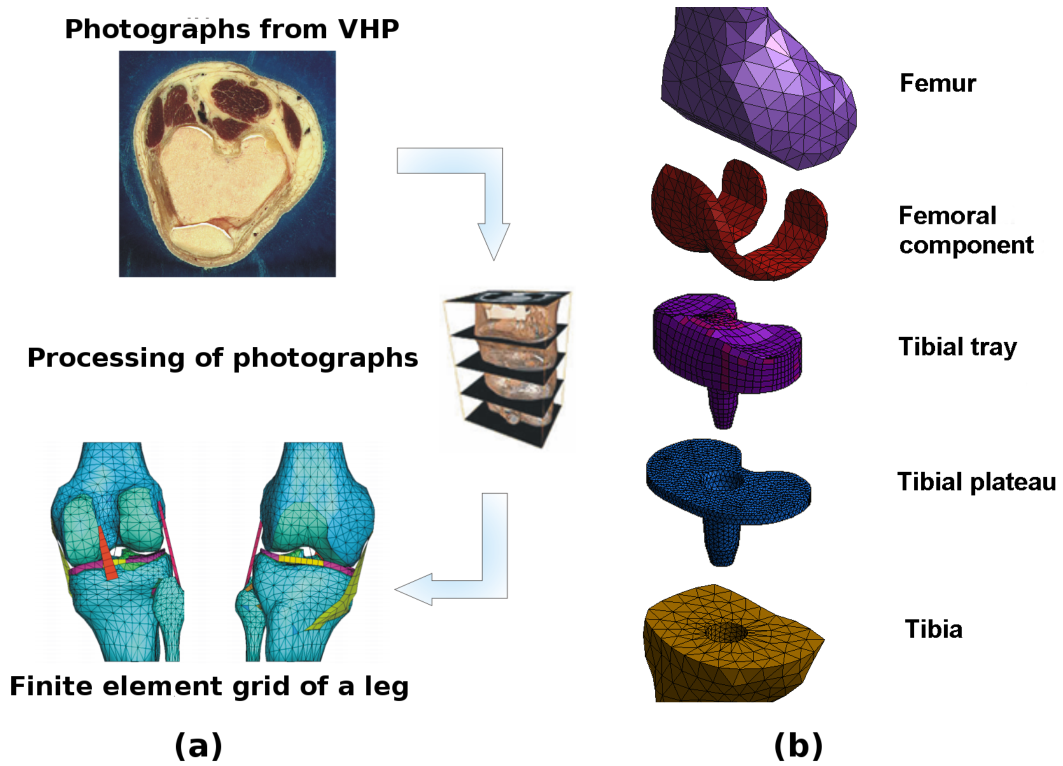
Obr. 10 Rozložení tlakového pole
(Carreauův model)

5. Patelofemorální komplikace

Patelofemorální komplikace spojené s aloplastikou kolenního kloubu jsou poměrně časté *10-30%* (Berger & Crosett 1998, Scott 2006). Tyto komplikace se objevují v případě náhrady čéšky i v případě, kdy se čéška nenahrazuje. Patelofemorální potíže jsou způsobené poruchou pohybu čéšky v trochleárním žlábku femorální komponenty. Toto může vést k patelární subluxaci, laterální dislokaci a k bolestem v patelární oblasti. Příčin vzniku tohoto onemocnění je několik - valgózní, varózní postavení femorální komponenty, zbytkové valgózní postavení dolní končetiny po aloplastice, tloušťka čéšky, nevhodné nastavení rotace femorální a tibiální komponenty atd. Hodnota CTA úhlu (Condylar Twist Angel) je individuální a mění se s postupující deformitou kolenního kloubu během artrózy. V případě velkých deformací se CTA úhel může měnit od *-3°* do *+9°*.

Cílem této práce je přispět k hledání optimální rotace femorální a tibiální komponenty totální náhrady kolenního kloubu bez náhrady čéšky tak, aby se minimalizovaly patelární komplikace.

Biomechanický model dolní končetiny, vytvořený Kocková & Jansová 2004, je založen na CT a RTG snímcích z projektu Visible Human. Tyto snímky byly zpracovány speciálním softwarem a byla vygenerována objemová síť jednotlivých kostí (obr. 11a). Síť byla upravena pro biomechanické simulace. Následně byl začleněn model totální náhrady kolenního kloubu do modelu dolní končetiny (obr. 11b).



Obr. 11 Tvorba biomechanického modelu dolní končetiny

6. Materiálové a mechanické vlastnosti tkání

Kosti jsou tkáně, které mají vlastnosti kompozitního materiálu. Pouze kompaktní kost může být přibližně modelována jako homogenní kontinuum. Kosti vykazují lineární elastické chování pro fyziologické zatěžování. Orientační hodnoty elastického modulu jsou shrnuty v tabulce 1.

Tab. 1 Mechanické vlastnosti stehenní a lýtkové kosti

	Elastický modul v tahu *[GPa]*	Elastický modul v tlaku *[GPa]*	Mez pevnosti v tahu *[MPa]*	Mezní smykové napětí *[MPa]*
Stehenní kost (femur)	17,6	4,5	124	58,2
Holenní kost (tibie)	18,4	5,1	143	-

Šlachy spojují svaly s kostmi a jsou silně namáhány na tah. Mechanické vlastnosti patelární šlachy jsou uvedeny v tabulce 2.

Tab. 2 Mechanické vlastnosti patelární šlachy

Autoři	Elastický modul E *[GPa]*	Poissonova konstanta υ
Johnson	0,66±0,266	0,4
Woo	0,58	0,4

Tibiální a femorální komponenta totální náhrady jsou vyrobeny z kovové slitiny – *CoCr-Mo*. Společně s polyetylenovou vložkou jsou modelovány jako elastický materiál (Tabulka 3 – mechanické vlastnosti náhrady kolenního kloubu).

Tab. 3 Mechanické vlastnosti elementů totální náhrady kolenního kloubu

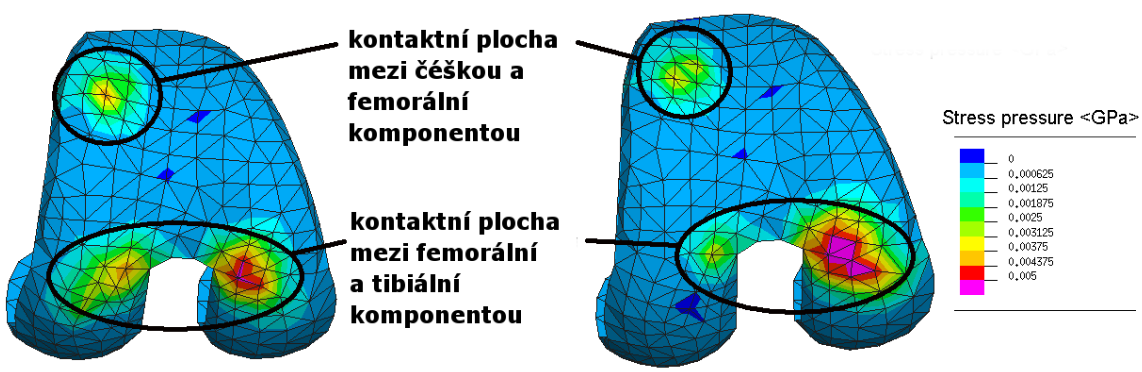
Materiál	Elastický modul E *[GPa]*	Poissonova konstanta υ	Hustota ρ $[kgm^{-3}]$
Polyetylen	1,16	0,2	$9{,}37e^{-7}$
Slitina *CoCrMo*	210	0,3	$1{,}0e^{-5}$

7. Závěr

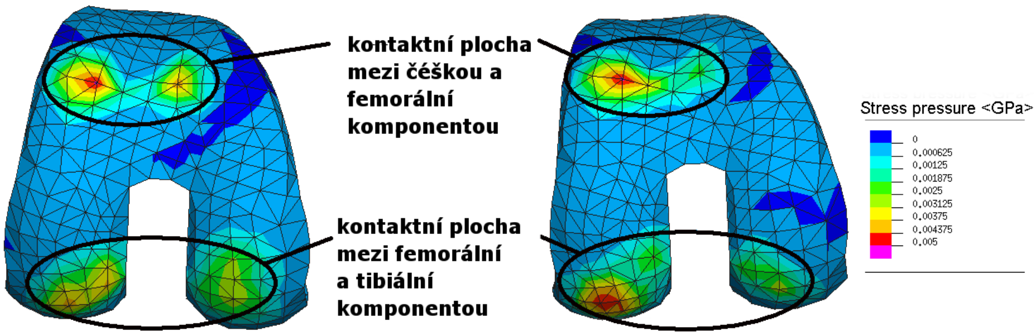
Byl vytvořen model dolní končetiny, který umožňuje simulovat chování čéšky při různých úhlech flexe, Q-úhlu a CTA úhlu. Výsledky ukazují polohu maximálního tlaku a velikost kontaktní síly mezi femorální komponentou a čéškou. V obrázcích je také patrná kontaktní plocha mezi femorální a tibiální komponentou.

Bylo provedeno několik simulací pro úhly flexe *0°, 30°* a *60°*. Pro každý úhel flexe byl vytvořen statický model pro různé Q-úhly (*10°, 14°*) a pro CTA úhly (*0°* a *5°*).

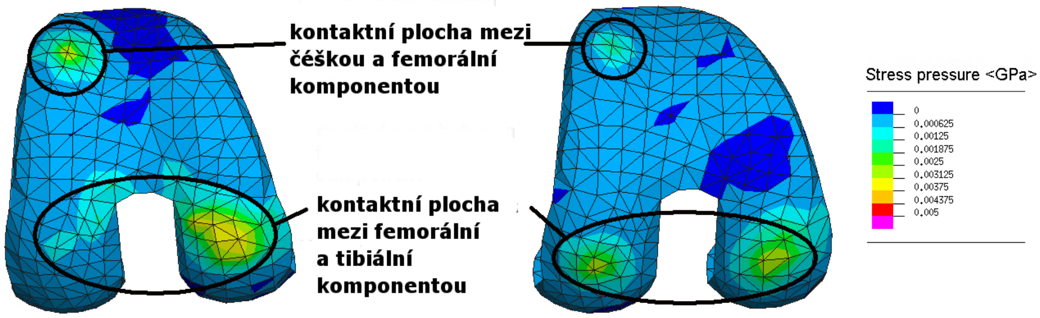
Na obr. 12, 13 a 14 je možno vidět změnu kontaktní plochy mezi čéškou a femorální komponentou totální náhrady kolenního kloubu. Pro CTA úhel *5°* je kontaktní plocha umístěna více laterálně. Statický tlak je pro CTA *5°* vyšší. To může znamenat větší bolest pro pacienta.



Obr. 12 Kontury statického tlaku pro úhel flexe 0°, Q-úhel 10°, CTA úhel 0° (vlevo) a pro CTA úhel 5° (vpravo)



Obr. 13 Kontury statického tlaku pro úhel flexe 30°, Q-úhel 10°, CTA úhel 0° (vlevo) a pro CTA úhel 5° (vpravo)



Obr. 14 Kontury statického tlaku pro úhel flexe 0°, Q-úhel 14°, CTA úhel 0° (vlevo) a pro CTA úhel 5° (vpravo)

8. Poděkování

Tato práce je podporována MŠMT ČR, výzkumný záměr MSM 4977751303 a MZ ČR, interní grantový projekt NS9726-4/2008.

9. Literatura

Berger, R.A., Crosett, L.S. et al. (1998) Malrotation causing patellofemoral complications after total knee arthroplasty. *Clinical orthopedaedics and related research.* 356, pp. 144-153.

Forsterviczová, J. (2005) *Tribologie kolenního kloubu. Diplomová práce. Plzeň.*

Fung, Y.C. (1993)*Biomechanics – Mechanical Properties of Living Tissues.* Springer – Verlag. New York, USA.

Kocková, H. & Jansová, M. (2004) Model dolních končetin se zaměřením na kolenní kloub, *Proceeding to Computational Mechanics,* pp. 213-216.

Křen, J. & Hynčík, L. (2005) Modelling of non-Newtonian fluids. *Mathematics and Computers in Simulation,* vol. 76, i. 1-3, pp. 116-123.

Křen, J., Rosenberg, J. & Janíček, P. (2001) *Biomechanika.* Zapadočeská univerzita v Plzni.

Scott, R.D. (2006) Total knee arthroplasty. *Saunders Elsevier.*