

KINEMATIC EXCITED VIBRATION OF BLADED DISK

J. Kellner, V. Zeman¹

Summary: *The work introduces the methodology of modelling a steam turbine bladed disk vibration. A decomposition method of complex system into components – blades, blade packets connected by shroud and disk, in which the blades are fixed – is used. After the investigation of blade rim connected with the rigid disk and bladed disk modal properties, the forced vibration due to aerodynamic excitation is computed as well as stress analysis. The bladed disk model is completed by kinematic excitation, which is caused by rotor forced vibration.*

1. Úvod

Dynamika olopatkovaných disků parních turbín je stále aktuálním problémem. Přes rozvoj výpočetních technik (zejména MKP softwarů) stále dochází k poruchám lopatek, které jsou z hlediska vysocyklového namáhání nejvíce exponovanou součástí. Požadavek na maximální účinnost přenášeného výkonu může vést k nevhodnému dynamickému chování. Obecně se uvažuje zatížení olopatkovaného disku aerodynamickými silami z CFD výpočtů a odladění vlastních frekvencí lopatek od nižších násobků otáčkové frekvence a od budící frekvence rozváděcích lopatek.

V tomto příspěvku je zmíněno aerodynamické buzení lopatek silami z CFD výpočtů a detailně modelováno kinematické buzení olopatkovaných disků, které se získá z kmitání celé rotorové soustavy uložené v ložiskách (kmitání je způsobeno zbytkovou nevyvážeností). Je zde porovnáváno vynucené kmitání olopatkovaného disku a napjatost na olopatkování pro aerodynamické a kinematické buzení.

2. Matematický model olopatkovaného disku

Metodika modelování olopatkovaného disku je založena na dekompozici na lopatky B_j (viz obr. 1), svazky lopatek P_s provázaných bandáží S a na disk D , ve kterém jsou lopatky uloženy. Lopatky i bandáž jsou uvažovány jako jednodimenzionální kontinua, disk jako 3D kontinuum. Je zohledněno vyztužení lopatek vlivem odstředivé síly. Lopatky jsou s diskem v reálném případě spojeny pomocí kolíku a v modelu pomocí pružin vyjadřujících tuhost kolíků.

¹ Ing. Josef Kellner, Prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc., Fakulta aplikovaných věd, ZČU, 316 00 Pilsen, tel. +420 732 55 68 38, e-mail kennyk@kme.zcu.cz

2.1. Model disku

Uzly matematického modelu disku jsou vytvořeny s ohledem na jeho šířku, výšku a umístění závěsů lopatek do disku, viz obr. 1 a 2. Pro vypočtení matic tuhosti, hmotnosti a gyroskopických účinků použijeme postup publikovaný v Kellner (2009) a v Šašek (2008). Obecně vypočteme kinetickou a potenciální energii elementu disku, z ekvivalence Lagrangeových rovnic a sumací všech elementů získáme pohybovou rovnici rotujícího disku (spodní index D - *Disk*) v maticové formě

$$\mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D(t) + \omega \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{q}}_D(t) + (\mathbf{K}_{sD} - \omega^2 \mathbf{K}_{dD}) \mathbf{q}_D(t) = \omega^2 \mathbf{f}_{\omega D}, \quad (1)$$

kde $\omega \mathbf{G}_D$ je matice gyroskopických účinků, $\mathbf{M}_D$ je matice hmotnosti, $\mathbf{K}_{sD}$ (resp. $\mathbf{K}_{dD}$) je matice statické tuhosti (resp. dynamické tuhosti) a $\mathbf{f}_{\omega D}$ je vektor odstředivých sil působících na elementy disku v uzlech, $\mathbf{q}_D$ je vektor všech zobecněných výchylek uzlů disku ve směrech rotujících souřadnicových os x , y , z

$$\mathbf{q}_D = [\dots u_i, v_i, w_i, \dots]^T, i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2)$$

N je počet uzlů modelu disku.

2.2. Model olopatkování

Lopatku (spodní index B - *Blade*) uvažujeme jako jednodimenzionální kontinuum, kterou rozdělíme uzly na lopatkové prvky. Postupem rozepsaným detailně v Kellner & Zeman (2006)

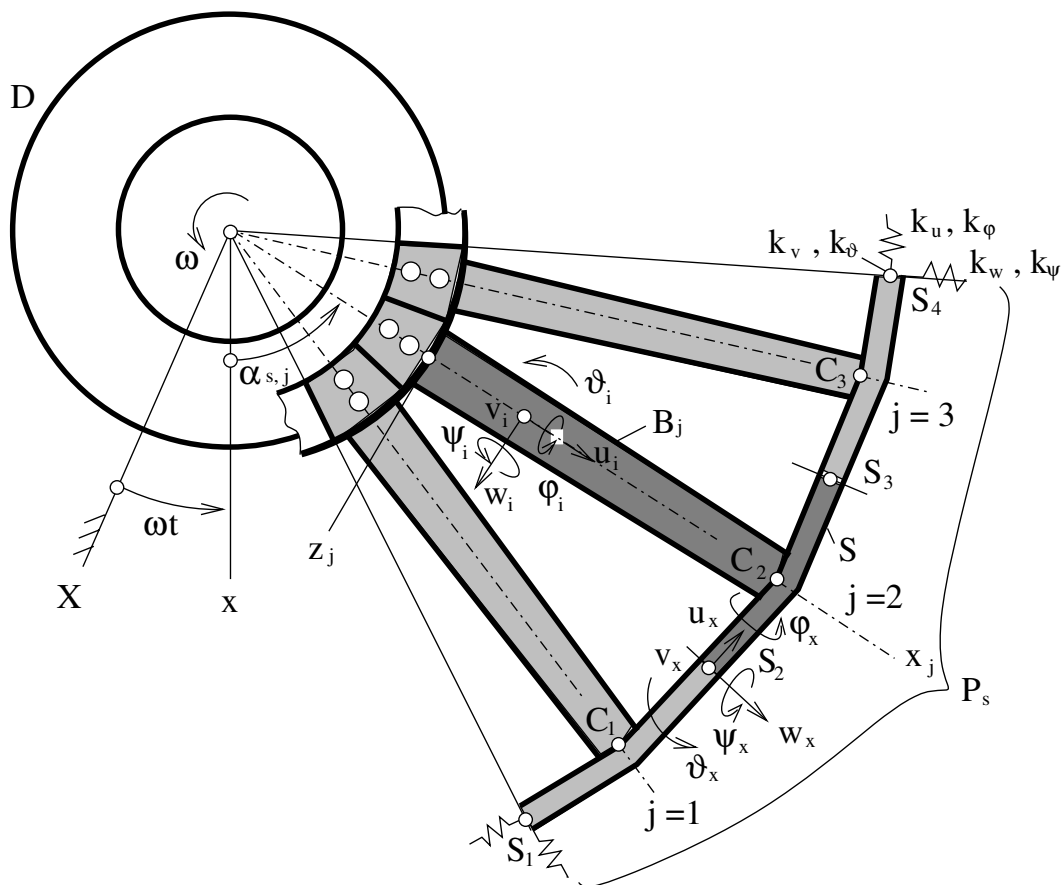


Figure 1: Schéma disku se svazkem lopatek.

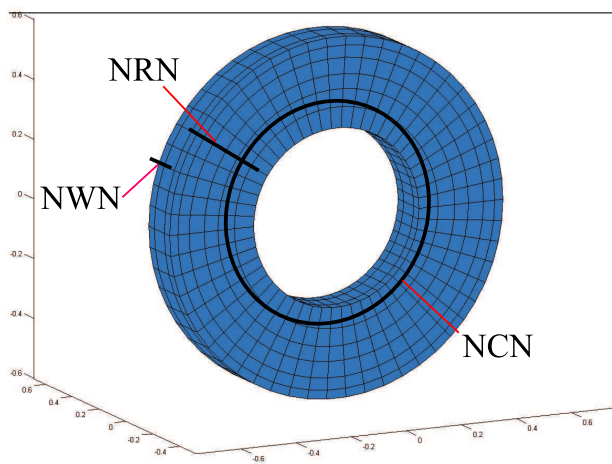


Figure 2: Dělení disku podle vstupních parametrů.

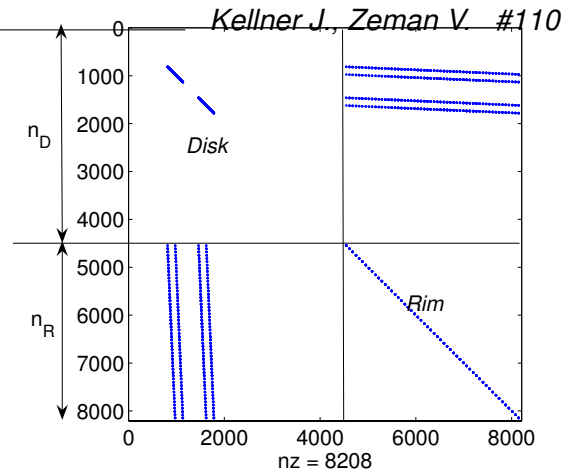


Figure 3: Matice tuhosti vazeb mezi diskem a lopatkami-schématické znázornění polohy nenulových prvků.

získáme pohybovou rovnici lopatky v lokálním rotujícím souřadnicovém systému x_j, y_j, z_j každé lopatky

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_B + \omega_0 \mathbf{G}_B \dot{\mathbf{q}}_B + (\mathbf{K}_{sB} - \omega_0^2 \mathbf{K}_{dB} + \omega_0^2 \mathbf{K}_{\omega B}) \mathbf{q}_B = \omega^2 \mathbf{f}_{\omega B}, \quad (3)$$

kde $\mathbf{q}_B = [\dots, u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i, \dots]^T$, $\mathbf{K}_{\omega B}$ je matice vyztužení vlivem odstředivých sil, ostatní matice mají podobný význam jako u pohybové rovnice disku (1).

Lopatky jsou pomocí bandáže (spodní index S - *Shroud*) propojeny do svazků. Bandáž opět uvažujeme jako jednodimenzionální kontinuum. Složením všech svazků dostaneme olopatkování disku (spodní index R - *Rim*). Svazky mohou být navzájem provázány v bandáži, viz na obr. 1 pružiny v bodech S_1 a S_4 . Výsledná pohybová rovnice olopatkování disku v maticovém tvaru je

$$\mathbf{M}_R \ddot{\mathbf{q}}_R(t) + \omega \mathbf{G}_R \dot{\mathbf{q}}_R(t) + (\mathbf{K}_{sR} - \omega^2 \mathbf{K}_{dR} + \omega^2 \mathbf{K}_{\omega R}) \mathbf{q}_R(t) = \omega^2 \mathbf{f}_{\omega R}, \quad (4)$$

kde $\mathbf{q}_R$ je vektor všech zobecněných výchylek olopatkování (uzlů lopatek i bandáže).

2.3. Modální vlastnosti olopatkovaného disku

Uložení lopatek do disku je možno provést více způsoby. Pro modelovou úlohu byl zvolen vidličkový závěs, kdy vlastní uložení je tvořeno kolíky procházejí skrz disk a nožku lopatky. V matematickém modelu je kolík nahrazen pružinami, jejichž tuhost byla vypočtena z podmínky zachování ohybových rotačních tuhostí zjištěných experimentálně. Matice $\mathbf{K}_{s,j}^C$ reprezentující tuhosti v uložení lopatky do disku může být vypočtena v globálním souřadnicovém systému olopatkovaného disku

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_D^T, \mathbf{q}_R^T]^T \quad (5)$$

z potenciální (vazební) energie $E_{s,j}^C$ mezi lopatkou a diskem (Kellner (2009)).

Doplněním matic vazeb uložení všech lopatek v disku do pohybových rovnic disku (1) a lopatkového okruží (4) se získá model olopatkovaného disku v globálním souřadnicovém

systému v maticové formě

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_D(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_R(t) \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_D(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_R(t) \end{bmatrix} + \\ & + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_D(\omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_R(\omega) \end{bmatrix} + \sum_{s=1}^p \sum_{j=1}^b \mathbf{K}_{s,j}^C \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_D(t) \\ \mathbf{q}_R(t) \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\omega D} \\ \mathbf{f}_{\omega R} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pro jednodušší matematické úpravy je zavedena celková matice tuhosti disku

$$\mathbf{K}_D(\omega) = \mathbf{K}_{sD} - \omega^2 \mathbf{K}_{dD} \in \mathcal{R}^{n_D, n_D} \quad (7)$$

a celková matice tuhosti olopatkování

$$\mathbf{K}_R(\omega) = \mathbf{K}_{sR} + \omega^2 (\mathbf{K}_{\omega R} - \mathbf{K}_{dR}) \in \mathcal{R}^{n_R, n_R}, \quad (8)$$

kde $\mathbf{K}_{sR}$ je matice statické tuhosti olopatkování se zahrnutím vazeb mezi svazky lopatek. Pro lepší vizuální představu je matice vazeb disk-nožky lopatek graficky znázorněna na obr. 3.

Na základě uvedené metody je modelován olopatkovaný disk s následujícími parametry	
vnitřní/vnější poloměr disku	0,300/0,605 m
šířka disku	0,155 m
šířka/tloušťka bandáže obdélníkového průřezu	0,1005/0,014 m
počet stupňů volnosti disku n_D	4536
počet stupňů volnosti olopatkování n_R	3672
Youngův modul pružnosti E	$2 \cdot 10^{11}$ Pa
Poissonovo číslo ν	0,3
hustota ρ	7800 kg.m ⁻³

Prvním výsledkem výpočtového modelu jsou vlastní frekvence, v tab. 1 jsou pro oba subsystémy – nerotující disk, olopatkování pružně spojené s nerotujícím tuhým diskem – i celý olopatkovaný disk, kdy se řeší homogenní konzervativní úloha pro rovnice (1), (4), (6). Vlastní tvar kmitání příslušné frekvence je charakterizován počtem uzlových průměrů d_D a počtem uzlových kružnic d_R .

2.4. Aerodynamicky vybuze kmitání olopatkovaného disku

Aerodynamické síly jsou harmonického průběhu v čase $\mathbf{f}_R(t) = \mathbf{f}_R e^{i\omega_k t}$, působící na rotující lopatky. Tyto síly jsou získány z CFD analýzy, tj. proudového výpočtu páry při průchodu rozváděcími (statorovými) lopatkami, ve tvaru použitým např. v Míšek (2007). Neuvažuje se působení konstantní odstředivé síly $\omega^2 \mathbf{f}_{\omega R}$ v (4).

Aerodynamické síly mají všechny tři složky v prostoru. V cylindrickém souřadném systému, kdy osa y je ztotožněna s osou rotoru, je v radiálním směru (tj. podél radiály lopatky) hodnota působící síly zanedbatelná. Největší složka síly od proudící páry působí na lopatku v tangenciálním směru z_j a udává rotoru kinetickou energii. Musí se však vzít v úvahu i axiální složka síly působící ve směru osy rotoru. Uvažuje se tedy axiální a tangenciální složka aerodynamicky působící síly na lopatku. Tato síla je rovnoměrně rozdělena na uzly lopatky i , $i = 1, \dots, N$. Jelikož působící síla má harmonický průběh (viz Míšek (2007)), je vytvořen vektor budících sil v komplexním tvaru $\mathbf{f}_R(t) = \mathbf{f}_R e^{i\omega_k t}$, kde ω_k je budící frekvence odpovídající násobku počtu rozváděcích lopatek a otáčkové frekvence.

Table 1: Vlastní frekvence $f_\nu(\omega)$ v Hz subsystémů a celého systému olopatkovaného disku pro $\omega = 0$ a $\omega = 3000 \text{ ot/min}$.

Vetknutý disk			Olopatkování			Vetknutý olopatkovaný disk				
ν	$f_\nu(0)$	d_D	ν	$f_\nu(0)$	d_R	ν	$f_\nu(0)$	$f_\nu(3000)$	d_D	d_R
1,2	1171	1	1	429,5	0	1	293,1	301,0	0	0
3	1189	0	2,3	456,8	1	2,3	357,3	360,0 371,2	1	1
4,5	1213	2	4,5	466,6	2	4	376	389,0	0	0s
6,7	1490	3	6,7	484,6	3	5,6	387,1	393,0 403,6	2	2
8	1647	0t	8,9	541,5	4	7,8	405,8	416,0 417,4	3	3
9,10	2024	4	10	593,5	?	9,10	475,4	483,6 485,8	4	4
11,12	2190	1t	11,12	655,2	5	11,12	485,9	488,0 491,8	5	5
13,14	2721	5	13,14	732,6	1t	13,14	597,7	603,8 606,5	0	0t
15,16	3207	2t	15,16	827,1	6	15,16	743,6	750,3 770,1	6	6
17,18	3501	6	17,18	1048	7	17,18	772,1	776,0 779,0	1	1
19,20	3988	3t	19,20	1053	2t	19	889,1	893,7	0	0

*t - tangenciální (okolo osy y) kmity. *s - dominantně kmitá bandáž.Vektor sil působících na uzly j -té lopatky s -tého svazku má tedy tvar

$$\mathbf{f}_{j,s}(t) = [\dots; F_{iy} \cos \varphi_{j,s} + iF_{iy} \sin \varphi_{j,s}; F_{iz} \cos \psi_{j,s} + iF_{iz} \sin \psi_{j,s}; \dots]^T e^{i\omega_k t}. \quad (9)$$

Úhel $\varphi_{j,s}$ je fázový úhel aerodynamické síly působící na zmíněnou lopatku v axiálním směru a $\psi_{j,s}$ je fázový úhel síly v tangenciálním směru na stejnou lopatku. Tyto fázové úhly, vyjadřující fázové posunutí budící síly od rozváděcích lopatek na celý disk v jednom okamžiku, lze vyjádřit ve tvaru

$$\varphi_{j,s} = [j - 1 + (s - 1) * 3] 2\pi \frac{p_{SB}}{p_{MB}}, \quad \psi_{j,s} = \varphi_{j,s} - \varphi, \quad (10)$$

kde φ je relativní úhel zpoždění mezi axiální a tangenciální aerodynamickou silou, p_{SB} , resp. p_{MB} je počet satorových, resp. oběžných lopatek. Vektor aerodynamických sil působících na celé olopatkování je tedy ve tvaru

$$\mathbf{f}_R(t) = [\mathbf{f}_{1,1}^T, \mathbf{f}_{2,1}^T, \mathbf{f}_{3,1}^T, \dots, \mathbf{f}_{b,p}^T]^T. \quad (11)$$

Dosazením předchozího vztahu do pravé strany rovnice (6) místo vektoru odstředivých sil (neuvažujeme nyní vliv statické odstředivé síly pro konstantní otáčky) získáme rovnici pro vynucené kmitání olopatkovaného disku. Získané výchylky jsou pro čas $t = 0 \text{ s}$ zobrazeny na obr. 4. Použitím vztahů uvedených v Kellner (2009) se získá napětí na olopatkování. Největší hodnota redukováného napětí podle HMM napěťové hypotézy nastane v čase $t_{max} = 0,0038 \text{ s}$. Toto napětí je zobrazeno na obr. 5.

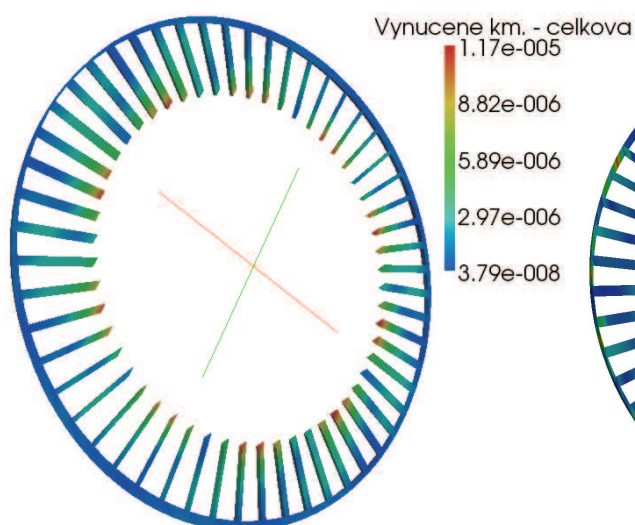


Figure 4: Celkové výchylky olopatkování v čase $t = 0$ s.

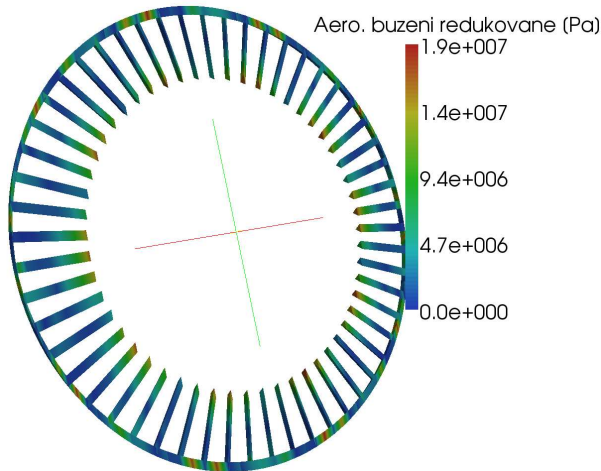


Figure 5: Redukované napětí HMM olopatkování v čase $t = t_{max}$.

3. Vytvoření matematického modelu rotorové soustavy

Rotorová soustava (spodní index S - *Shaft*) je modelována hřídelovými prvky (1D kontinuum) s uvažováním nasazených tuhých olopatkovaných disků, koeficientem vyztužení proti ohybu v místě nasazení disků aj. Rotorová soustava složená ze čtyř rotorových dílů je uložena v reálných ložiskách, viz Kellner (2009).

Rotující hřídel je rozdělena na prismatické hřídelové prvky. Sumací potenciální a kinetické energie všech hřídelových prvků a s využitím podmínky ekvivalence levých stran Lagrangeových rovnic se nakonec dostane pohybová rovnice hřídele v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{q}}_S(t) + (\mathbf{B}_S + \mathbf{B}_L + \omega_0 \mathbf{G}_S) \dot{\mathbf{q}}_S(t) + (\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_L) \mathbf{q}_S(t) = \mathbf{f}_S(t), \quad (12)$$

kde $\mathbf{X}_L$ jsou matice tuhosti (resp. tlumení) ložisek v globálním systému rotorové soustavy $\mathbf{q}_S$, $\mathbf{K}_S$ je matice statické tuhosti, ostatní matice mají význam jako v (1).

Schéma rotorové soustavy, složené z vysokotlakého dílu, tří nízkotlakých dílů a generátoru uložené v desíti ložiskách je na obr. 6. Podobné uspořádání rotorů v praxi je na obr. 7.

Protože modelovaný disk se nachází na začátku rotorové soustavy, je pro získání reálného vynuceného kmitání soustavy uvažována maximální zbytková nevyváženost vysokotlakého dílu podle ČSN ISO 10814. Z vynuceného kmitání rot. soustavy jsou získány výchylky, rychlosti a zrychlení v místě daného olopatkovaného disku, které lze transformovat na uzly vnitřní válcové plochy disku a tím získat kinematické buzení olopatkovaného disku. Výsledné amplitudy výchylek vynuceného kmitání rotorové soustavy ve vertikálním a horizontálním směru jsou zobrazeny na obr. 8 a 9.

3.1. Kinematicky vybuzené kmitání a napjatostní analýza olopatkovaného disku

Vektor zobecněných výchylek disku (dolní index D) v rotujícím souřadnicovém systému x, y, z rozdělíme na vektor zobecněných výchylek uzlů na vnitřním poloměru disku, které odpovídají napojení na hřídel rotoru $\mathbf{q}_D^E$ (*Externí*), a na vektor zobecněných výchylek ostatních "vnitřních"

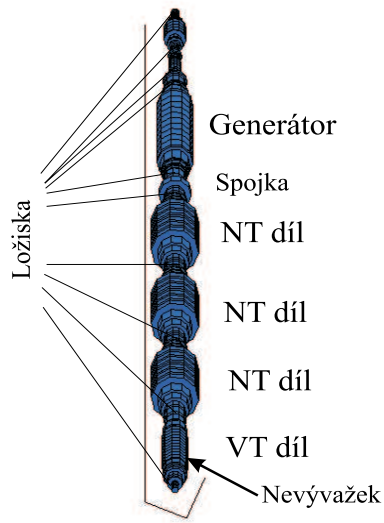
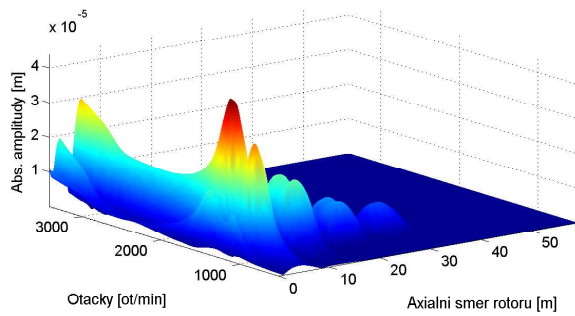
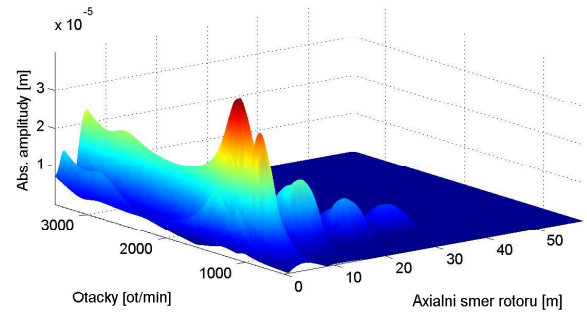


Figure 6: Schéma rotorového soustrojí.



Figure 7: Příklad obdobného rotorového soustrojí v praxi, v popředí VT díl.

Figure 8: Amplitudy rotoru v_i ve vertikálním směru.Figure 9: Amplitudy rotoru w_i v horizontálním směru.

(*Inner*) uzlů disku q_D^I :

$$\mathbf{q}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_D^E \\ \mathbf{q}_D^I \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Výchyvky i -tého uzlu hřídele (horní index (S)) na obr. 10 jsou definovány vektorem čtyř zobecněných souřadnic v rotujícím souřadnicovém systému xyz :

$$\mathbf{q}_i^{(S)} = \begin{bmatrix} v_i^{(S)} \\ w_i^{(S)} \\ \vartheta_i^{(S)} \\ \psi_i^{(S)} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Transformační vztah mezi výchyvkami i -tého uzlu hřídele, který odpovídá místu připojení

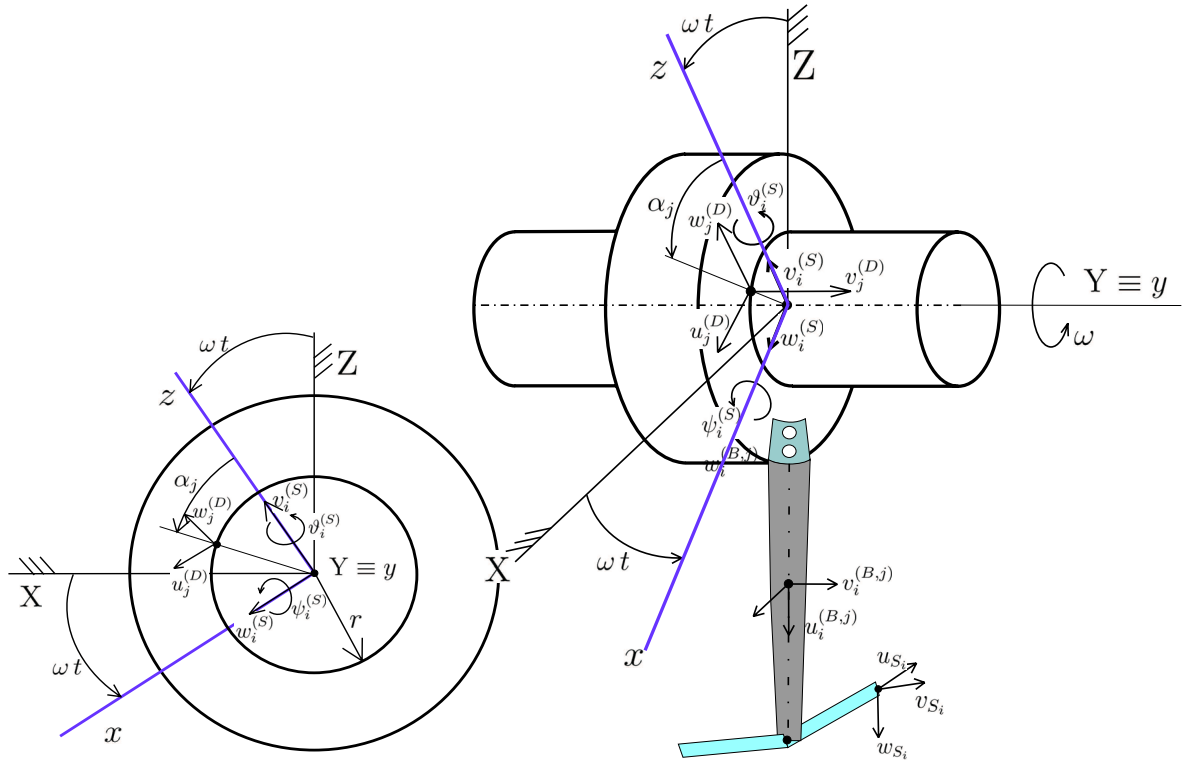


Figure 10: Závislost výchylek uzlů na vnitřní válcové ploše disku na výchylkách uzlu na ose hřídele ve stejném průřezu kolmém na osu rotace.

disku na hřídel (obr. 10), a j -tého uzlu disku na vnitřním poloměru (poloha uzlu je definována úhlem α_j a vnitřním poloměrem disku r) je

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_j^{(D)} \\ v_j^{(D)} \\ w_j^{(D)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_j^{(D)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \sin \alpha_j & -r \cos \alpha_j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{j,i}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_i^{(S)} \\ w_i^{(S)} \\ \vartheta_i^{(S)} \\ \psi_i^{(S)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_i^{(S)}}. \quad (15)$$

Transformační matice pro výchylky všech uzlů disk-hřídel v i -té dotykové kružnici na poloměru r je

$$\mathbf{T}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1,i} \\ \mathbf{T}_{2,i} \\ \mathbf{T}_{3,i} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{NCN,i} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3NCN,4}, \quad (16)$$

kde $\mathbf{T}_{j,i}$ je definováno v (15) a NCN je počet uzlů disku na dotykové kružnici. Transformační matice pro všechny uzly připojené k hřídeli na počtu NWN dotykových kružnic může být vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{q}_D^E = \mathbf{T}_{D,S} \mathbf{q}_S(t), \quad (17)$$

kde

$$\mathbf{T}_{D,S} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_D & & & \\ & \mathbf{T}_D & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_D \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3.NWN.NCN,4NWN}. \quad (18)$$

Vektor výchylek uzlů hřídele odpovídajících dotykovým kružnicím disku s hřídelem je

$$\mathbf{q}_S = \left[\mathbf{q}_1^{(S)^T} \mathbf{q}_2^{(S)^T} \dots \mathbf{q}_{NWN}^{(S)^T} \right]^T. \quad (19)$$

Použije-li se rozdělení výchylek disku podle (13) v pohybové rovnici olopatkovaného disku (6), je maticové vyjádření pohybové rovnice olopatkovaného disku ve tvaru

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_D^E & \mathbf{M}_D^{E,I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_D^{I,E} & \mathbf{M}_D^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_D^E \\ \ddot{\mathbf{q}}_D^I \\ \ddot{\mathbf{q}}_R \end{bmatrix} + \\ & + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{PP}^C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_s \sum_j \mathbf{B}_{s,j}^C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_D^E & \mathbf{G}_D^{E,I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_D^{I,E} & \mathbf{G}_D^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_D^E \\ \dot{\mathbf{q}}_D^I \\ \dot{\mathbf{q}}_R \end{bmatrix} + (20) \\ & + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_s \sum_j \mathbf{K}_{s,j}^C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_D^E(\omega) & \mathbf{K}_D^{E,I}(\omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_D^{I,E}(\omega) & \mathbf{K}_D^I(\omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_R(\omega) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_D^E \\ \mathbf{q}_D^I \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \\ & = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\omega D}^E \\ \mathbf{f}_{\omega D}^I \\ \mathbf{f}_{\omega R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_R(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

kde $\sum_s \sum_j \mathbf{B}_{s,j}^C$ je matice tlumení vazeb disk-lopátka, $\sum_s \sum_j \mathbf{K}_{s,j}^C$ matice tuhosti vazeb disk-lopátka, $\mathbf{B}_{PP}^C$ je matice tlumení mezi lopátkami v kontaktní ploše na koncích bandáže mezi sousedními svazky a $\mathbf{K}_D$ představuje součet statické a dynamické matice tuhosti disku.

Je-li vypočten pohyb hřídele rotoru z rovnice (12), s využitím (17) se 2. a 3. blokový řádek rovnice (20) může přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_D^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_D^I \\ \ddot{\mathbf{q}}_R \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{PP}^C \end{bmatrix} + \sum_s \sum_j \mathbf{B}_{s,j}^C + \omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_D^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_D^I \\ \dot{\mathbf{q}}_R \end{bmatrix} + \\ & + \left(\sum_s \sum_j \mathbf{K}_{s,j}^C + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_D^I(\omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_R(\omega) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_D^I \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t), \quad (21) \end{aligned}$$

kde vektor buzení je

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_D^{I,E} \mathbf{T}_{D,S} \ddot{\mathbf{q}}_S(t) - \omega \mathbf{G}_D^{I,E} \mathbf{T}_{D,S} \dot{\mathbf{q}}_S(t) - \mathbf{K}_D^{I,E}(\omega) \mathbf{T}_{D,S} \mathbf{q}_S(t) + \omega^2 \mathbf{f}_{\omega D}^I \\ \omega^2 \mathbf{f}_{\omega R} + \mathbf{f}_R(t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Tento vektor buzení zahrnuje následující zdroje buzení:

- kinematické buzení uzlů disku na vnitřní válcové ploše vlivem vynuceného kmitání rotoru $\mathbf{q}_S(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_S(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}_S(t)$

- buzení vlivem odstředivé síly působící na lopatky a na disk $\omega^2 \mathbf{f}_{\omega R}, \omega^2 \mathbf{f}_{\omega D}^I$,
- aerodynamické síly vlivem proudící páry působící na lopatky $\mathbf{f}_R(t)$.

Tato práce je založena na lineárním přístupu, tj. je výhodné dynamickou odezvu v ustáleném stavu na jednotlivé zdroje buzení modelovat samostatně. K samostatnému zhodnocení kmitání od jednotlivých zdrojů buzení přispívá i rozdílná frekvence aerodynamického a kinematického buzení. Při aerodynamickém buzení od počtu p_{SB} rozváděcích lopatek se jedná o p_{SB} period buzení na lopatku za jedno otočení, tj. za jednu periodu kinematického buzení disku.

Na následujících obrázcích jsou znázorněny výsledky pro vynucené kmitání jen vlivem kinematického buzení pro lepší posouzení, který vliv buzení má větší příspěvek, zda aerodynamické nebo kinematické buzení. Na obr. 11 jsou zobrazeny axiální výchylky olopatkovaného disku v čase $t = 0$ s, opakující se po jedné periodě buzení, tj. po jedné otáčce, na obr. 12 celkové výchylky.

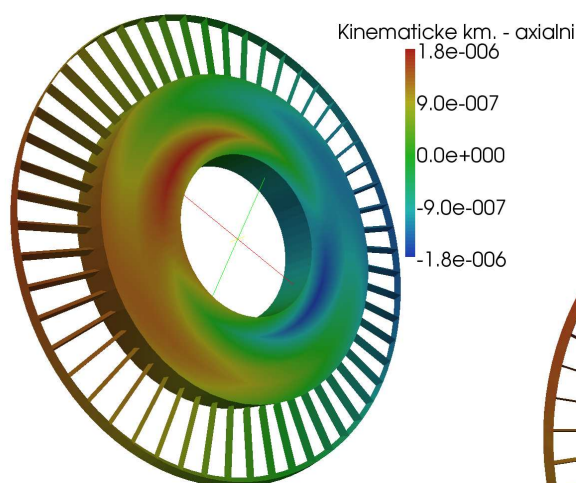


Figure 11: Axiální výchylky olopatkovaného disku v m vlivem kinematického buzení v čase $t = 0$ s.

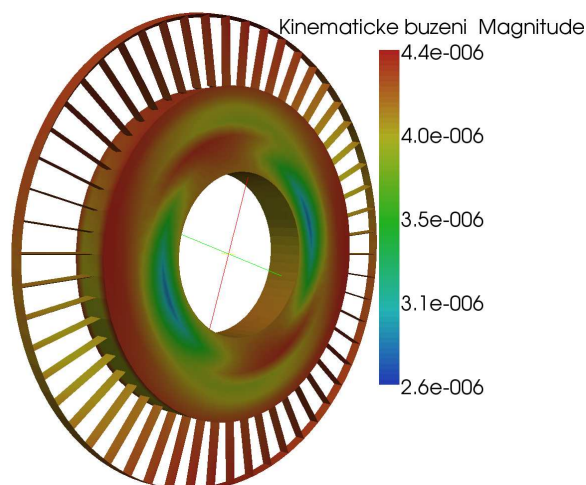


Figure 12: Celkové výchylky olopatkovaného disku v m v čase $t = 0$ s.

Stejný přístup jako pro zjištění napjatosti olopatkování při vynuceném kmitání aerodynamickými silami je použit i v případě kinematického buzení. Zde napětí dosahuje největší hodnoty v čase $t_{max} = 0.0013075$ s. Radiální a redukované napětí olopatkování v tomto čase jsou zobrazena na obr. 13 a 14.

Vykreslení průběhu složky vektoru napětí s největší hodnotou na olopatkování, tj. σ_ξ , na profilu lopatky je na obr. 15. Jedná se o profil v desátém svazku, první lopatce svazku a na devátém lopatkovém prvku.

Porovnáním s výsledky aerodynamického buzení je vidět, že hodnoty napětí při vynuceném kmitání jak aerodynamickým, tak kinematickým buzením se řádově neliší. V uvedené modelové úloze však kinematické buzení bylo voleno na horní hranici přípustnosti nevyváženosti rotoru, proto lze předpokládat, že ve skutečnosti nevyváženost a tím i napjatost vyvolaná kinematickým buzením bude menší. Místa s minimálním a maximálním napětím jsou v případě

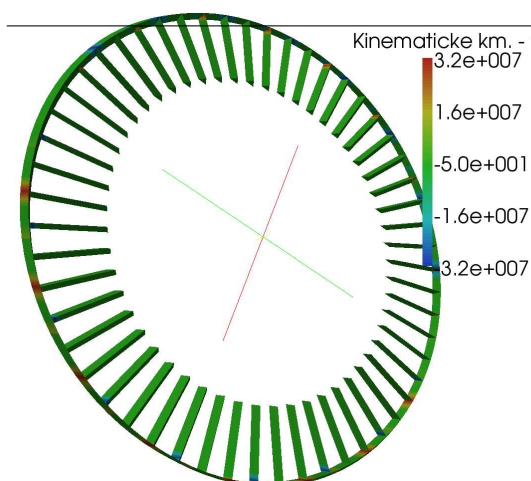


Figure 13: Radiální napětí olopatkování v Pa v čase $t = t_{max}$.

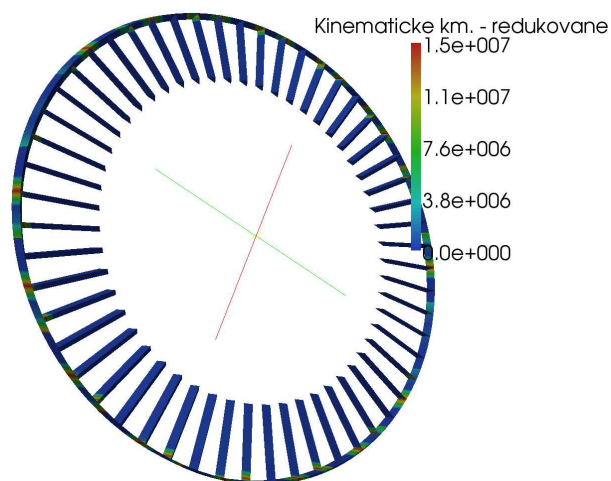


Figure 14: Redukované napětí HMM olopatkování v Pa v čase $t = t_{max}$.

aerodynamického buzení výrazně blíže než v případě kinematického buzení, tj. lze předpokládat větší riziko pro aerodynamické kmitání.

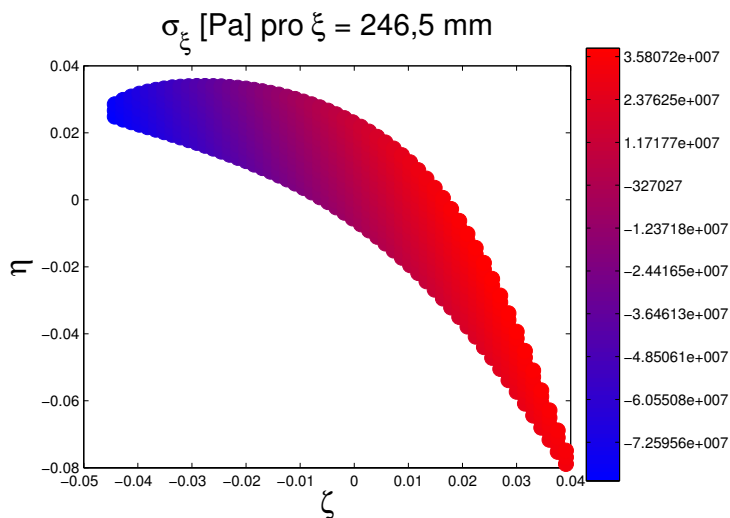


Figure 15: Normálové (radiální) napětí $\sigma_\xi(0.246, \eta, \zeta, t_{max})$ na devátém lopatkovém prvku pro $s = 10, j = 1$ – špička lopatky.

4. Závěr

Na vytvořeném matematickém modelu rotorové soustavy jsou z vynuceného kmitání zbytkovou nevyvážeností vypočteny výchylky v místě nasazení disku. Olopatkovaný disk je zatížen aerodynamickými silami (resp. kinematickým buzením od rotoru) a vypočteno vynucené kmitání a napjatostní analýza. Pro oba typy buzení jsou porovnány deformace a napjatost lopatek.

5. Poděkování

Tento příspěvek byl vytvořen za podpory GA ČR 101/09/1166.

6. Literatura

- Kellner, J., Zeman, V. (2006) Analýza vlivu dynamické tuhosti, odstředivých sil a uložení na modální vlastnosti lopatky, in *Proc. 8th Applied Mechanics*(K. Slavíková), UWB Plzeň, pp. 47-48. (plný text na CD-ROM). ISBN 80 - 7043 - 441 - 4.
- Kellner, J., Zeman, V. (2008) Modelling and modal characteristics of rotating bladed disk, in *Proc. 10th Applied Mechanics*. Wisla, Katedra Mechaniki Stosowanej, pp. 35-36, full text on CD-ROM. ISBN 978 - 83 - 60102 - 49 - 7.
- Kellner, J. (2009) *Kmitání turbínových lopatek a olopatkovaných disků*. Disertační práce. Plzeň: ZČU, Fakulta aplikovaných věd, 130 st.
- Misek, T., Tetiva, A., Prchlik, L., Duchek, K. (2007) Prediction of High Cycle Fatigue Life of Steam Turbine Blading Based on Unsteady CFD and FEM Forced Response Calculation, in *Proc. ASME Turbo Expo 2007*, Montreal.
- Šašek, J. (2008) *Vybrané problémy dynamiky rotorů*. Písemná práce ke státní doktorské zkoušce. Západočeská universita, Plzeň.