ENGINEERING MECHANICS 2009
National Conference with International Participation
Svratka, Czech Republic, May 11 – 14, 2009
pp. 453–468
Paper #188

NON-PROPORTIONAL DAMPING EFFECT ON DYNAMIC RESPONSE OF FOOTBRIDGES

S. Hračov, J. Náprstek, S. Pospíšil*

Summary: *Presented article deals with dynamic response of a footbridge equipped with tuned mass dampers (TMD) on vertical harmonic excitation. The installation of absorbers against undesired vibrations significantly changes the damping distribution on such type of structures. Commonly used presumption of proportional damping in mathematical models is sufficient, especially for approximative assessments of pedestrian discomfort. However taking the non-proportional damping into account results in more accurate solution of response. The differences in solution methods and in results for both types of damping are presented.*

1. Úvod

U statického i dynamickém posouzení lávek pro pěší musí posuzovatel díla uvažovat nejen mezní stavu únosnosti, ale i mezní stav použitelnosti. Mezní stav použitelnosti se vztahuje jak na konstrukci samotnou, tak i na komfort chodce při přechodu lávky. Současné lávky jsou velmi často navrhovány jako štíhlé lehké konstrukce vyznačující se nízkým konstrukčním útlumem. Vlastní frekvence těchto lávek leží mnohdy ve frekvenčním pásmu lidské chůze, což vede k dynamické odezvě o nepřípustné hladině vibrací, které jsou pociťovány chodci. V evropské normě (CEN, 2001) jsou proto definována maximální přípustná zrychlení nosníku lávky od normového zatížení, které reprezentuje zatížení od pěších. V případě překročení předepsaných limitů je nutné konstrukci ztužit nebo zvětšit útlum instalací tlumících prvků či pohlcovačů kmitání. Zvýšením tuhosti docílíme odladění konstrukce mimo frekvenční pásmo zatížení. Provedení ztužení je však odvislé od dispozičního řešení lávky a architektonických požadavků a ne vždy je realizovatelné. Další možností snížení nežádoucích vibrací je instalace pohlcovačů kmitů. Ty jsou představovány např. hmotou kmitající na pružině s přídavným tlumícím prvkem. Instalací pohlcovačů se výrazně změní celkové rozložení útlumu v konstrukci. Popsat matematicky reálný mechanismus tlumení pro účely teoretického výpočtu takovéto konstrukce je vždy problematické. Všeobecně užívaný proporcionální (klasický) útlum přináší relativně výhodné a jednoduché matematické řešení odezvy. Předpokládá však rozložení tlumení úměrné rozložení tuhostních a hmotnostních charakteristik systému. Uvedený předpoklad je však přibližně platný jen pro konstrukce bez přídavných tlumících prvků. V případě jako je lávka s pohlcovači kmitů opatřenými viskózními tlumiči už je tato hypotéza neplatná. I přes výpočetně náročnější řešení odezvy, docílíme přesnějších výsledků užitím neproporcionálního (neklasického) vyjádření tlumení.

*Ing. Stanislav Hračov, Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ing. Stanislav Pospíšil, PhD.: Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, Prosecká 76; 190 00 Praha 9; tel.: +420.286882121; e-mail: hracov@itam.cas.cz

Cílem autorů předkládaného článku bylo ukázat rozdílnosti v obecném řešení a ve výsledcích odezvy lineárních soustav s oběma typy viskózního útlumu na harmonické zatížení. Diference jsou stanoveny a porovnány na modelu reálné lávky pro pěší s instalovanými pohlcovači kmitů zatížené harmonickým normovým svislým zatížení od chodců.

2. Teoretické řešení ustálené odezvy lávky na harmonické buzení

K vyřešení odezvy lineárního diskrétního systému popsaného diferenciální rovnicí:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{q}(t)=\mathbf{P}e^{i\omega t} \tag{1}$$

kterým můžeme výpočtově modelovat např. zmíněnou lávku pro pěší, lze obecně užít přímého řešení v oboru komplexních čísel. Pro detailnější rozbor odezvy je však výhodnější aplikovat metodu rozvoje do vlastních tvarů. Při uvažování dostatečného počtu vlastních tvarů, docílíme velmi přesných výsledků a navíc můžeme stanovit podíl jednotlivých tvarů na celkové odezvě. Ve speciálním případě tvaru matice tlumení **C**, tzv. proporcionálním, lze všechny strukturální matice v rovnici (1) diagonalizovat reálnými vlastními tvary. Soustava (1) se pak rozpadne na řešení nezávislých diferenciálních rovnic, které popisují kmitání ve vlastních tvarech systému. V obecném tvaru matice **C** je však nutné stanovit vlastní tvary tlumeného systému. Složky těchto tvarů jsou komplexní čísla lišící v Gaussově rovině nejen absolutní velikostí ale i fází. Pro jejich výpočet byla pro náš případ použita metoda komplexní iterace podprostoru (Fischer P., 2000). Výhoda této metody spočívá v nenutnosti provádět iteraci na systému o dvojnásobném řádu než je základního soustava. Komplexní vlastní čísla a vektory vstupující do iteračního cyklu jsou sice v jednotlivých krocích určovány na soustavě o dvojnásobné dimenzi, ale o velikosti dvojnásobku počtu iteračních vektorů. Před vyčíslením komplexních modálních charakteristik ze systému strukturálních matic se totiž provede jejich kondenzace komplexními vektory z předchozího iteračního kroku.

Vlastní analytické řešení systému (1) je odvozeno na soustavě dvojnásobného řádu (3), kdy se k rovnici (1) přidá maticová identita:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t)-\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{0} \tag{2}$$

a získáme:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t)+\mathbf{B}\mathbf{y}(t)=\mathbf{f}(t) \tag{3}$$

kde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{M}\\ \mathbf{M} & \mathbf{C}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}(t)\\ \mathbf{q}(t)\end{pmatrix}\qquad \mathbf{f}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{P}\end{pmatrix}e^{i\omega t}=\mathbf{F}e^{i\omega t} \tag{4}$$

V knize Hurton & Rubinstein (1982) je dokázáno, že komplexní vlastní tvary $\mathbf{Y}_r$ resp. $\mathbf{Y}_s$ tlumeného systému jsou ortogonální s váhou matic **A** a **B**:

$$\mathbf{Y}_r^T\mathbf{A}\mathbf{Y}_s=0 \qquad \mathbf{Y}_r^T\mathbf{B}\mathbf{Y}_s=0 \qquad \text{pro } s\neq r \tag{5}$$

Komplexními vlastními tvary rozumíme vektory složené z vektorů komplexních modálních rychlostí a komplexních modálních přemístění či natočení:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ortogonality (5) využijeme k rozkladu systému (3) na soustavu nezávislých diferenciálních rovnic druhého řádu, které popisují kmitání v jednotlivých tvarech tlumeného systému. Po dosazení řešení :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}\mathbf{z}(t) \tag{7}$$

do rovnice (3) a vynásobení maticí transponovaných komplexních vlastních vektorů obdržíme:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{A}\mathbf{Y}\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{z}(t) = \mathbf{Y}^T\mathbf{f}(t) \tag{8}$$

Uplatněním ortogonality (5) se soustava rozpadne na nezávislé pro podkritický útlum komplexně sdružené rovnice. Pro r-tou rovnici platí:

$$\alpha_r \dot{z}_r(t) + \beta_r z_r(t) = \mathbf{Y}_r^T \mathbf{F} e^{i\omega t} \tag{9}$$

Hledáme-li řešení této rovnice ve tvaru:

$$z_r(t) = Z_r e^{i\omega t} \tag{10}$$

obdržíme po matematických úpravách komplexní amplitudu Z_r:

$$Z_r = \frac{\mathbf{Y}_r^T \mathbf{F}}{\alpha_r \omega \cdot i + \beta_r} = \frac{\mathbf{Y}_r^T \mathbf{F}}{\alpha_r(\omega \cdot i - \lambda_r)} \tag{11}$$

Z řešení (11) vyplývá, že se na odezvě podílí všechny tvary, které nejsou ortogonální k vektoru zatížení. Dalším faktorem ovlivňujícím velikost příspěvku tvaru na celkovou odezvu je imaginární hodnota komplexního vlastního čísla ve vztahu k budící frekvenci. Zatímco reálná část vlastního čísla vypovídá o velikosti utlumení příslušného komplexního vlastního tvaru, imaginární část vypovídá o kruhové útlumové frekvenci. Čím blíže je tato kruhová frekvence budící frekvenci, tím menší je jmenovatel výrazu (11). Celkový podíl nepřetlumeného vlastního komplexního tvaru z odezvy je po-té roven součtu řešení dvou komplexně sdružených rovnic:

$$\mathbf{Y}\mathbf{c}_r(t) = \left[\mathbf{Y}_r \frac{\mathbf{Y}_r^T \mathbf{F}}{\alpha_r \omega \cdot i + \beta_r} + \mathbf{Y}_r^* \frac{\mathbf{Y}_r^{*T} \mathbf{F}}{\alpha_r^* \omega \cdot i + \beta_r^*} \right] e^{i\omega t} \tag{12}$$

Celkovou komplexní odezvu v zobecněných souřadnicích lze pak vyjádřit výrazem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^{2n} \mathbf{Y}_r \frac{\mathbf{Y}_r^T \mathbf{F}}{\alpha_r(\omega \cdot i - \lambda_r)} \; e^{i\omega t} \tag{13}$$

V případě klasického proporcionálního útlumu, kdy matice tlumení splňuje tzv. Caugheyho tvar:

$$\mathbf{C} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \cdot \mathbf{M} \cdot \left(\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K}\right)^j \tag{14}$$

není nutno vyčíslit komplexní vlastní tvary tlumeného systému. Všechny složky komplexního vlastního vektoru mají stejnou nebo opačnou fázi a jsou shodné s vlastními tvary netlumeného systému. Tyto vlastní reálné tvary přímo diagonalizují nejen matici hmotnosti a tuhosti, ale i matici tlumení. V následující numerické analýze použitý speciální typ klasické matice tlumení (14) je tzv. Rayleighova matice:

$$\mathbf{C} = \beta_0 \mathbf{M} + \beta_1 \mathbf{K} \tag{15}$$

Koeficienty β_0 a β_1 se nejčastěji stanoví z poměrného útlumu příslušející k vlastním kruhovým frekvencím konstrukce:

$$\xi_i = \frac{\beta_0}{2\omega_i} + \frac{\beta_1 \omega_i}{2} \tag{16}$$

Postup řešení ustálené odezvy takovéto soustavy na harmonické zatížení je uveden např. v Brepta et. al. (1994). Rovnice (17) a (18) jsou speciálními tvary rovnic (11) resp. (13) a uvádějí komplexní příspěvky netlumených vlastních tvarů resp. celkovou odezvu na harmonické buzení:

$$X_r = \frac{\mathbf{Q}_r^T \mathbf{P}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_r\omega \cdot i} \tag{17}$$

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{r=1}^{p} \mathbf{Q}_r \frac{\mathbf{Q}_r^T \mathbf{P}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2\xi\omega_r\omega \cdot i} \quad e^{i\omega t} \tag{18}$$

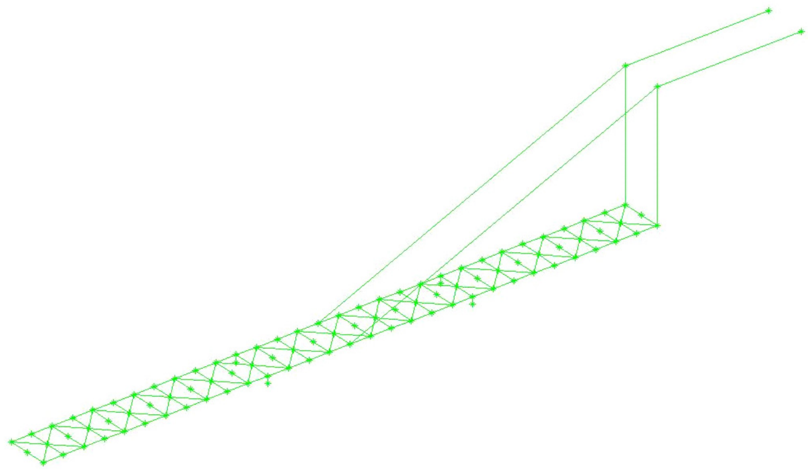
3. Konstrukce lávky pro pěší a její matematický model

Analyzovaná lávka pro pěší je ze statického hlediska tvořena nosníkem o jednom poli, který je v polovině 45 m rozpětí zavěšen táhlem na přilehlou vyhlídkovou věž. Závěs na věži je ve výšce 9 m. Šířka mostovky je rovna 3 m a je po celé délce lávky konstantní. Všechny hlavní nosné prvky jsou vyrobeny z oceli a jsou spojeny svary. Hlavní nosníky mostovky jsou navrženy z profilu HEB. Příčnou tuhost mostovky zajišťují ocelové příčníky na nichž jsou uloženy podélníky (oba prvky - I profil) a dřevěné fošny, které tvoří pochůznou vrstvu. Z důvodu nadměrné dynamické odezvy na svislé normové zatížení, viz. Obrázek. 3, byli z hlediska hygienických předpisů navrženy pohlcovače kmitů. Čtveřice pohlcovačů byla naladěna s ohledem na jejich efektivní působení na vibrace s frekvencí blízkou první a druhé vertikální vlastní frekvenci. Umístění pohlcovačů bylo zvoleno v blízkosti kmiten obou vlastních tvarů, souměrně podle osy mostovky. Dynamické parametry pohlcovačů byli výpočtem stanoveny hodnotami: hmotnost 315 kg, tuhost pružin 65785 N/m, součinitel tlumení 1365 Ns/m.

Matematický výpočtový model lávky byl vytvořen v trojrozměrném prostoru z prutových prvků. K výpočtu byl použit otevřený program CALFEM, který tvoří aplikační knihovnu funkcí programovacího jazyka MATLAB pro výpočty metodou konečných prvků. Model byl sestaven pomocí prvků beam3d (prvek typu Bernoulliho nosníku) a bar3e (tahový prvek). Hmotnost hlavních nosných prvků je zahrnuta přímo v lokálních maticích hmotnosti. Hmotnost doplňkových konstrukcí a dřevěných fošen mostovky je rozložena do jednotlivých uzlů. Okrajové podmínky byly zvolený následovně: Na obou koncích jsou umístěny klouby, na levém okraji je kloub posuvný. Věž je modelována pomocí ekvivalentních pružin jejichž tuhosti byly stanoveny ze statického výpočtu. Pohlcovače byly modelovány jako hmoty zavěšené na elastických pružinách a opatřené viskózními tlumiči. Matice útlumu základního systému bez tlumičů byla zvolena klasického Rayleighova typu tj. přímo úměrná kombinaci matice hmotnosti a tuhosti. Poměrný útlum byl zvolen vzhledem k ocelové svařované konstrukci nízkou hodnotou 0,5 % pro první dva vlastní tvary. Vyšší tvary mají vzhledem k úměrnosti matice tlumení k matici tuhosti poměrný útlum vyšší. Svislé normové zatížení bylo definováno harmonickou silou:

$$F_v(t)=280\cdot\kappa_v\cdot\sin\left(\omega_v t\right) \tag{19}$$

κ_v je součinitel závislý na vlastní frekvenci podle normy (0,5 - 3.0). Síla reprezentuje zatížení lávky skupinou osmi až patnácti chodců, ale může též modelovat např. zatížení elektromagnetickým budičem. Síla byla rozdělena na dvojici stejně velkých sil působících na hlavní nosníky mostovky v místě kmitny prvního i blízko kmitny druhého vlastního tvaru ve vzdálenosti rovné ¼ rozpětí (měřeno od věže). Hmotnost skupiny chodců (800 kg) byla souměrně umístěna do uzlů, v kterých působí zatížení a uzlů jim přilehlých. Přidání hmoty chodců předepisuje norma v případě, že se vlastní frekvence lávky navýšením motnosti více přiblíží k frekvenčnímu pásmu 1,5 – 2,5 Hz,



Obrázek 1: Matematický výpočtový model lávky pro pěší

4. Výsledky numerické analýzy modelů lávky pro pěší s různými typy viskózního útlumu

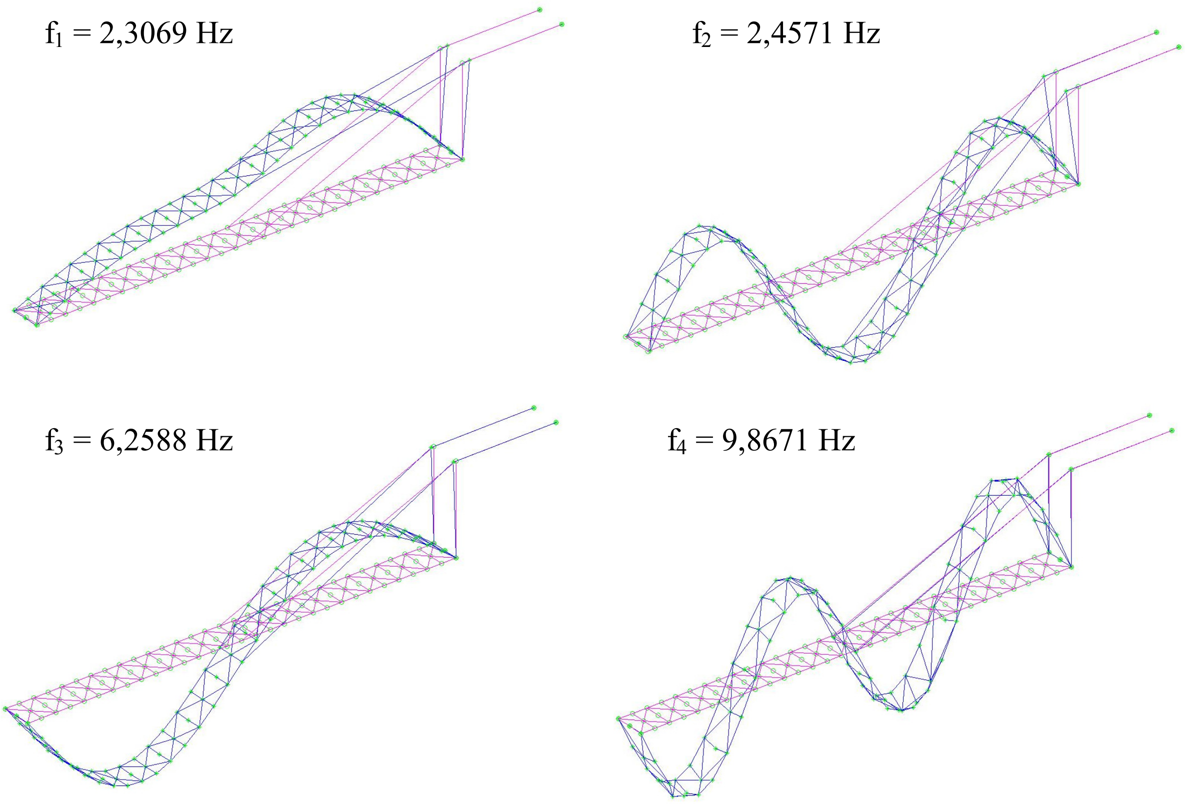
Teoreticky odvozené postupy a závěry byly aplikovány resp. ověřeny na diskrétním modelu z předchozí kapitoly. Byly porovnány výsledky dvou proporcionálně a jednoho neproporcionálně tlumeného systému. Nejprve byla určena pro všechny modelované případy amplitudová charakteristika pro zrychlení v místě buzení. Pro frekvence příslušející prvním dvěma špičkám této křivky byla dále odezva analyzována metodou rozvoje do komplexních vlastních tvarů.

4.1. Proporcionálně tlumené soustavy

Prvním případem klasicky tlumené soustavy (KTS I) je systém lávky se zaaretovanými tlumiči, kdy je do modelu lávky přidána jen hmota pohlcovačů. Modální analýzou konstrukce byly stanoveny vlastní vertikální frekvence a tvary uvedené v Tabulce 1 resp. na Obrázku 2.

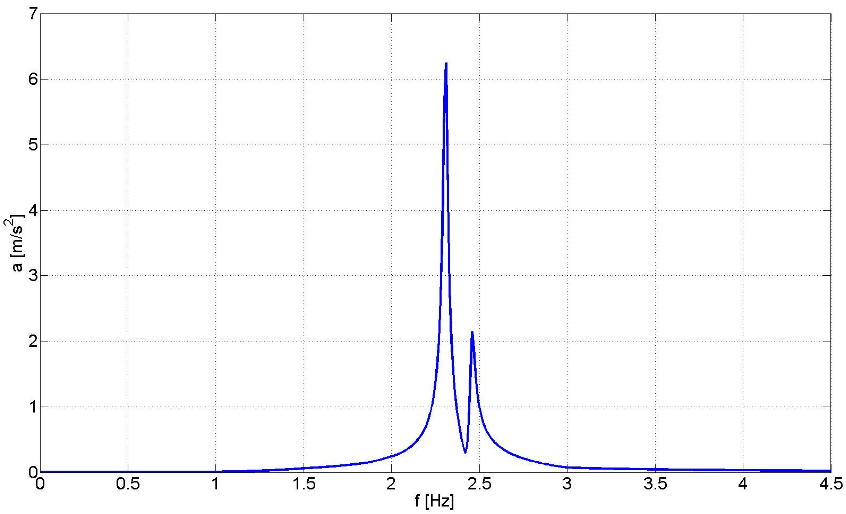
Tabulka 1. – Prvních osm nejnižších vertikálních vlastních frekvencí lávky

n	f [Hz]	n	f [Hz]
1	2,3069	5	14,76
2	2,4571	6	17,4177
3	6,2588	7	22,0936
4	9,8671	8	24,3121



Obrázek 2: První čtyři vertikální vlastní tvary lávky se zaaretovanými pohlcovači (KTS I)

Přímým řešením byla stanovena odezva na normové zatížení pro frekvenční spektrum 0 - 4,5 Hz. Amplitudová charakteristika zrychlení systému je uvedena na Obrázku 3. Největšího zrychlení bylo dosaženo pro rezonanční frekvence f_1 = 2,31 Hz a f_2 = 2,46 Hz.



Obrázek 3: Odezva proporcionálně tlumené lávky na buzení skupinou chodců (KTS I)

Zjištěné hodnoty zrychlení výrazně přesahují přípustnou normovou hodnotu 0,7ms^{-2}, z čehož vyplývá oprávněnost instalace pohlcovačů kmitů. Metodou komplexní iterace podprostoru byly zjištěny komplexní vlastní čísla, útlumové frekvence a poměrné útlumy, vyčíslené z poměrů reálných složek ku absolutní hodnotě vlastních čísel, viz Tabulka.2. V Tabulce 2 jsou také uvedeny absolutní hodnoty součinů vektoru zatížení a vlastních vektorů, které jsou jedním z faktorů ovlivňujícím velikosti příspěvků tvarů na celkovou odezvu.

Tabulka 2. – Vlastní čísla λ, útlumové frekvence f_d a poměrné útlumy ξ pro nejnižší vertikální komplexní vlastní tvary a absolutní hodnota skalárních součinů vl.tvarů a vektoru zatížení (KTS I)

n	λ	f_d	ξ	$\lvert \mathbf{Y}_n^T \mathbf{F} \rvert$
	[/]·10^2	[Hz]	[/]	[/]
1	-0,0007 + 0,1449i	2,3068	0,0050	1,9470
2	-0,0008 + 0,1544i	2,4571	0,0050	1,0438
3	-0,0029 + 0,3932i	6,2587	0,0073	0,1395
4	-0,0065 + 0,6199i	9,8666	0,0106	0,4396
5	-0,0142 + 0,9273i	14,7583	0,0153	0,4440
6	-0,0196 + 1,0942i	17,4149	0,0179	0,4242
7	-0,0313 + 1,3878i	22,0880	0,0225	0,2563

Metodou rozvoje do vlastních tvarů byli vyčísleny podíly prvních 30 komplexních vlastních tvarů na celkovém vertikálním přemístění dvou bodů konstrukce na svislé harmonické zatížení o budící frekvenci rovné první resp. druhé špičce amplitudové charakteristiky. Bod B leží v místě buzení tj. v ¼ rozpětí lávky (měřeno od věže), bod A ve ¾ rozpětí. Oba body přísluší jednomu hlavnímu nosníku mostovky. V Tabulkách 3 a 4 jsou vyčísleny společně s absolutními hodnotami příspěvků tvarů pro obě rezonanční frekvence i jejich fázové posuny vůči vektoru zatížení.

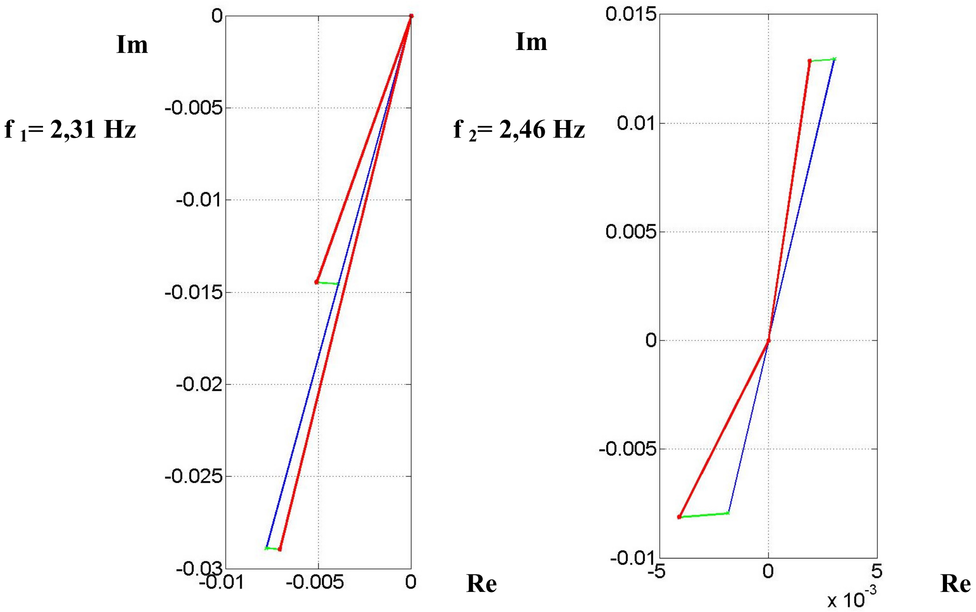
Tabulka 3. – Amplitudy a fáze příspěvků nejnižších vertikálních vlastních tvarů na celkovou odezvu - harmonické buzení o frekvenci : f = 2,31 Hz (KTS I)

n	Bod A		Bod B	
	$\lvert Yc_n\rvert$ [m]	φ [°]	$\lvert Yc_n\rvert$ [m]	φ [°]
1	0,0150760	254,9	0,0299348	254,9
2	0,0011721	175,4	0,0007200	-4,6
3	0,0000024	179,6	0,0000007	-0,4
4	0,0000070	179,7	0,0000039	-0,3
5	0,0000022	-0,3	0,0000026	-0,3
6	0,0000004	-0,3	0,0000020	-0,3
7	0,0000006	-0,3	0,0000006	-0,3
Σ	0,0153348	250,6	0,0298100	256,3

Tabulka 4. – Amplitudy a fáze příspěvků nejnižších vertikálních vlastních tvarů na celkovou odezvu - harmonické buzení o frekvenci: f = 2,46 (KTS I)

n	Bod A		Bod B	
	$\lvert Yc_n\rvert$ [m]	φ [°]	$\lvert Yc_n\rvert$ [m]	φ [°]
1	0,0011394	184,6	0,0022624	184,6
2	0,0132886	76,8	0,0081628	256,8
3	0,0000025	179,6	0,0000007	-0,4
4	0,0000070	179,7	0,0000040	-0,3
5	0,0000022	-0,3	0,0000026	-0,3
6	0,0000004	-0,3	0,0000020	-0,3
7	0,0000006	-0,3	0,0000006	-0,3
Σ	0,0129918	81,6	0,0090956	243,2

Z výsledků analýzy proporcionálního systému vyplývá, že příspěvky tvarů v obou bodech mají stejnou nebo opačnou fázi. To potvrzuje shodnost komplexních vlastních tvarů klasicky tlumeného systému s reálnými vlastními tvary netlumeného systému. Na ustálené odezvě se podílí více vlastních tvarů, přičemž jeden tvar je dominantní. Vliv ostatních vlastních tvarů způsobí nejen menší amplitudovou změnu, ale změní i vzájemný fázový posun složek odezvy obou zkoumaných bodů. Ten byl vyčíslen hodnotou 5,7 ° pro buzení v první špičce amplitudové charakteristiky (f = 2,31 Hz), kde byl dominantní první vlastní tvar. Pro druhou špičku f= 2,46 Hz byl stanoven fázový rozdíl 161,6°, což značí změnu fáze mezi oběma body oproti fázi v dominantním druhém tvaru o 18,4°. Graficky je fázový posun společně s příspěvky dominantních a ostatních tvarů patrný na Obrázku 4.

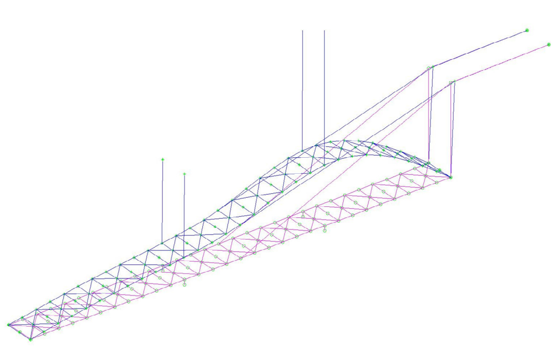


Obrázek 4.: Zobrazení vertikálních složek odezvy bodů A a B jako rotujících vektorů v Gaussově rovině komplexních čísel (červeně –výsledný vektor, modře – příspěvek dominantního tvaru, zeleně – příspěvek ostatních tvarů) (KTS I)

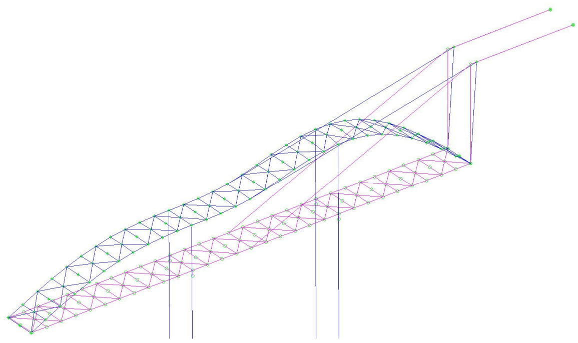
Druhým případem klasicky tlumené soustavy (KTS II) je model lávky pro pěší s již nainstalovanými pohlcovači. Reálná neklasická matice útlumu soustavy byla nejdříve zkondenzována reálnými vlastními tvary. Mimodiagonální členy zkondenzované matice byli po-té zanedbány. Výsledná proporcionální matice vznikla zpětnou transformací zkondenzované matice pomocí reálných vlastních tvarů systému. Umístěním pohlcovačů kmitů na konstrukci se změnily i modální vlastnosti netlumené soustavy. Díky frekvenčnímu naladění pohlcovačů pro působení při kmitání v prvém a ve druhém vlastním tvaru lávky, vznikly k těmto tvarům ekvivalentní dvojice nových vlastních tvarů. Ty jsou si tvarově podobné, liší se vzájemnou fází složek příslušných tlumičům a složek bodů jejich připojení. Pro nižší z dvojice tvarů jsou ve fázi, pro vyšší v protifázi, viz. Obrázek 5. Výpis vlastních frekvencí nové soustavy je uveden v Tabulce 5.

Tabulka 5. – Osm nejnižších vertikálních vlastních frekvencí lávky s pohlcovači kmitů

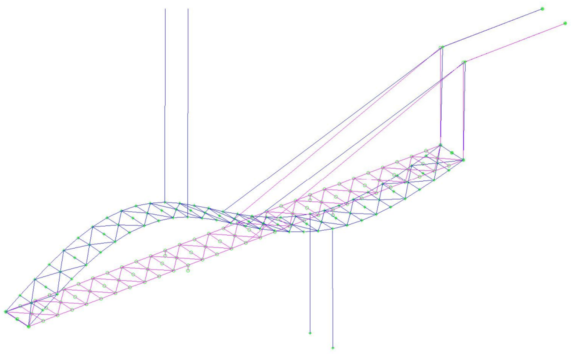
n	f [Hz]	n	f [Hz]
1	2,0537	5	6,2938
2	2,1285	6	10,1051
3	2,64	7	14,9366
4	2,7198	8	17,5398



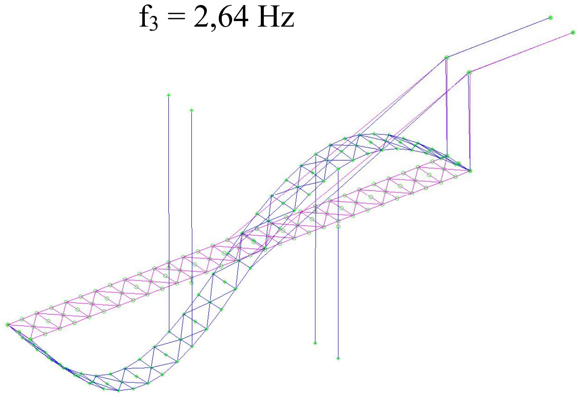
f_1 = 2,0537 Hz



f_3 = 2,64 Hz



f_2 = 2,1285 Hz



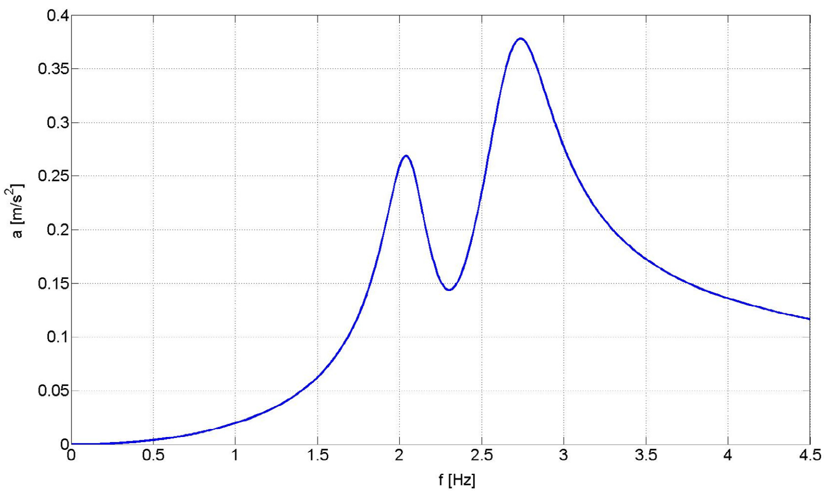
f_4 = 2,7198 Hz

Obrázek 5: První čtyři nejnižší vertikální vlastní tvary lávky s pohlcovači

Stejně jako v předchozím případě klasicky tlumené soustavy byly stanoveny vlastní čísla, útlumové frekvence, poměrné útlumy tvarů a vektorový součin vektoru zatížení a vlastních tvarů tlumeného systému, viz Tabulka 6. Z amplitud zrychlení, vybuzených zatížením pro frekvenční spektrum do 4,5 Hz, byla stanovena dvojice rezonačních frekvencí, viz. Obrázek 6.

Tabulka 6. – Vlastní čísla λ, útlumové frekvence f_d a poměrné útlumy ξ pro nejnižší vertikální komplexní vl. tvary a absolutní hodnota skalárních součinů vl.tvarů a vektoru zatížení (KTS II)

n	λ	f_d	ξ	$\|\mathbf{Y}_n^T\mathbf{F}\|$
	$[/]\cdot 10^2$	[Hz]	[/]	[/]
1	-0,0088 + 0,1287i	2,0490	0,0680	1,3945
2	-0,0120 + 0,1332i	2,1199	0,0897	0,4080
3	-0,0148 + 0,1652i	2,6295	0,0894	1,3367
4	-0,0116 + 0,1705i	2,7135	0,0681	1,0184
5	-0,0036 + 0,3954i	6,2936	0,0091	0,1412
6	-0,0092 + 0,6349i	10,1040	0,0145	0,4745
7	-0,0177 + 0,9383i	14,9340	0,0188	0,4280
8	-0,0239 + 1,1018i	17,5357	0,0217	0,4566



Obrázek 6: Odezva proporcionálně tlumené lávky s pohlcovači kmitů na buzení skupinou chodců (KTS II)

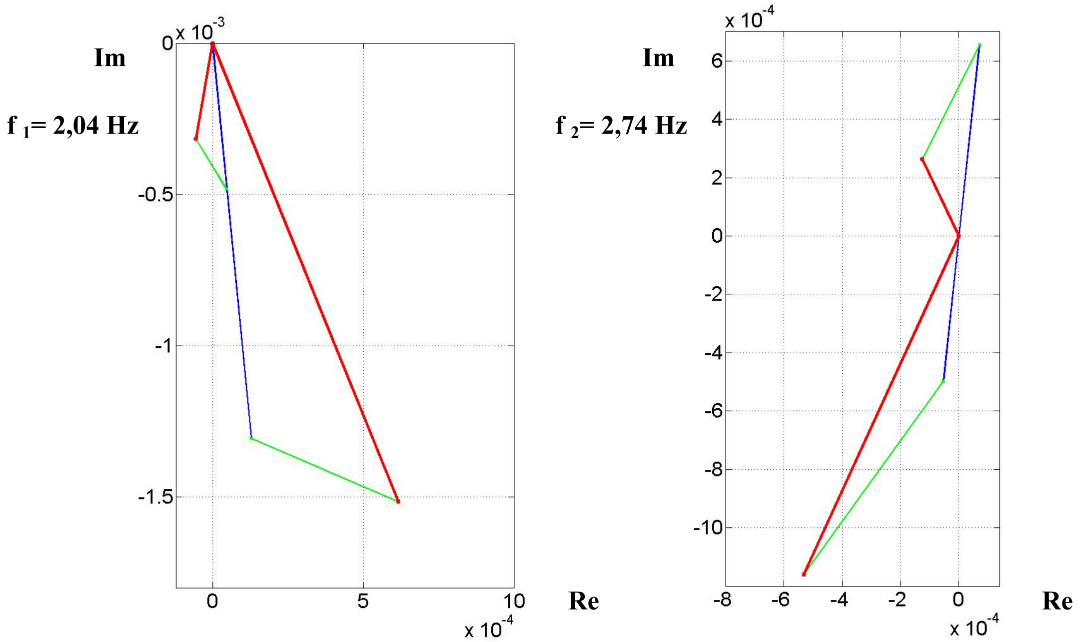
V následujících Tabulkách 7. a 8. jsou uvedeny podíly komplexních vlastních tvarů na celkové vertikální odezvě v bodech A a B pro obě rezonanční frekvence. Opět je patrný příspěvek více tvarů, což má za následek vzájemný fázový posun složek přemístění. Vlivem většího útlumu díky instalovaným tlumičům kmitů došlo k zvětšení fázového posunu a to na hodnotu 31,9 ° pro první rezonanci a snížení fáze na hodnotu 129,9 ° pro druhou rezonanci. Fázový posun též vyjadřuje skutečnost, že uzly kmitání nejsou při harmonickém buzení v rezonanci stacionární, ale mohou se pohybovat. Graficky je fázový posun znázorněn na Obrázku 7.

Tabulka 7. – Amplitudy a fáze příspěvků nejnižších vertikálních komplexních vlastních tvarů na celkovou odezvu - harmonické buzení o frekvenci: f = 2,04 Hz (KTS II)

n	Bod A		Bod B	
	$\lvert Yc_n \rvert$ [m]	φ [°]	$\lvert Yc_n \rvert$ [m]	φ [°]
1	0,0004852	-84,4	0,0013137	-84,4
2	0,0002046	115,3	0,0000808	-64,7
3	0,0001996	-18,9	0,0003087	-18,9
4	0,0002024	166,9	0,0001540	-13,1
5	0,0000025	179,6	0,0000007	-0,4
6	0,0000078	179,6	0,0000044	-0,4
7	0,0000022	-0,3	0,0000024	-0,3
8	0,0000004	-0,3	0,0000023	-0,3
Σ	0,0003212	260,2	0,0016358	-67,9

Tabulka 8. – Amplitudy a fáze příspěvků nejnižších vertikálních komplexních vlastních tvarů na celkovou odezvu - harmonické buzení o frekvenci: f = 2,74 Hz (KTS II)

n	Bod A		Bod B	
	$\lvert Yc_n \rvert$ [m]	φ [°]	$\lvert Yc_n \rvert$ [m]	φ [°]
1	0,0000823	193,1	0,0002228	193,1
2	0,0000559	19,4	0,0000221	199,4
3	0,0004232	247,4	0,0006545	247,4
4	0,0006587	83,8	0,0005011	263,8
5	0,0000027	179,5	0,0000007	-0,5
6	0,0000081	179,5	0,0000046	-0,4
7	0,0000022	-0,4	0,0000024	-0,4
8	0,0000004	-0,4	0,0000023	-0,4
Σ	0,0002923	115,5	0,0012764	245,4



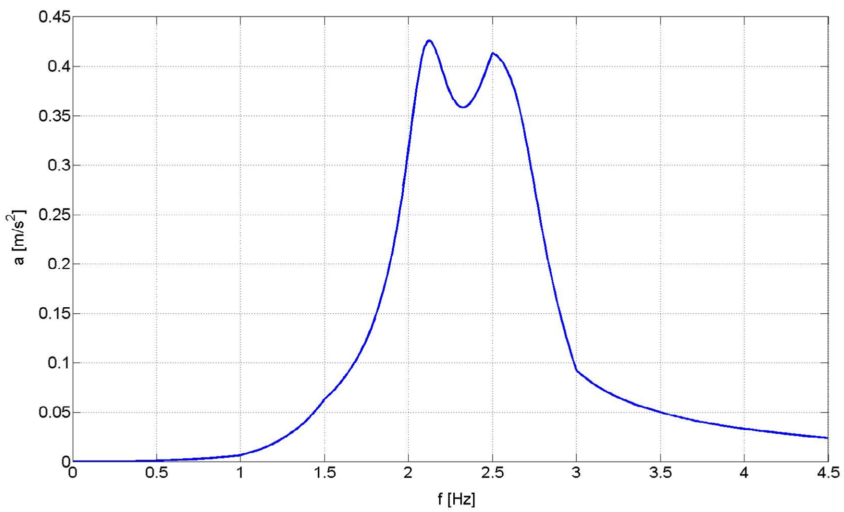
Obrázek 7. Zobrazení složek odezvy bodů A a B jako rotujících vektorů v Gaussově rovině komplexních čísel (červeně –výsledný vektor, modře – příspěvek dominantního tvaru, zeleně – příspěvek ostatních tvarů) (KTS II)

4.2. Neproporcionálně tlumená soustava

Neklasicky tlumený systém (NKTS) tvoří výpočtový model lávky s pohlcovači s reálným rozložením tlumících prvků v konstrukci. Opět byly spočteny komplexní modální charakteristiky soustavy metodou komplexní iterace podprostoru, viz. Tabulka 9. Vlastní frekvence neklasického systému pro první dva tvary jsou vyšší než jim odpovídající frekvence netlumeného systému. Tento případ nemůže při proporcionálně tlumené soustavě nikdy nastat. Z amplitudové charakteristiky pro zrychlení byli stanoveny rezonanční frekvence $f_1 = 2{,}12$ Hz a $f_2 = 2{,}5$ Hz, které se významně liší od druhého řešeného typu proporcionálního systému a nejsou tak výrazné, viz Obrázek 8. Můžeme také konstatovat, že tvar křivky amplitudové charakteristiky pro zrychlení má více zploštělý charakter.

Tabulka 9. – Vlastní čísla λ, útlumové frekvence f_d a poměrné útlumy ξ pro nejnižší vertikální komplexní vlastní tvary a absolutní hodnoty skalárních součinů vl.tvarů a vektoru zatížení (NKTS)

n	λ	f_d	ξ	$\lvert \mathbf{Y}_n^T \mathbf{F} \rvert$
	$[/]\cdot 10^2$	[Hz]	[/]	[/]
1	-0,0087 + 0,1318i	2,0974	0,0657	1,5992
2	-0,0127 + 0,1364i	2,1703	0,0925	0,4725
3	-0,0149 + 0,1615i	2,5697	0,0922	1,5349
4	-0,0109 + 0,1655i	2,6501	0,0655	1,0066
5	-0,0036 + 0,3954i	6,2930	0,0091	0,1412
6	-0,0092 + 0,6349i	10,1025	0,0145	0,4744
7	-0,0177 + 0,9383i	14,9335	0,0188	0,4280
8	-0,0239 + 1,1018i	17,5354	0,0216	0,4566



Obrázek 8: Odezva neproporcionálně tlumené lávky na buzení skupinou chodců (NKTS)

V Tabulkách 10 a 11 jsou vypsány příspěvky komplexních vlastních tvarů na celkovou odezvu pro dva body konstrukce. Je z nich patrno, že pro stejný vlastní tvar mají příspěvky tohoto tvaru v různých bodech odlišný fázový posun. To potvrzuje skutečnost, že složky vlastních tvarů obecně tlumené soustavy mají různou fázi. Graficky je to znázorněno na Obrázku 9.

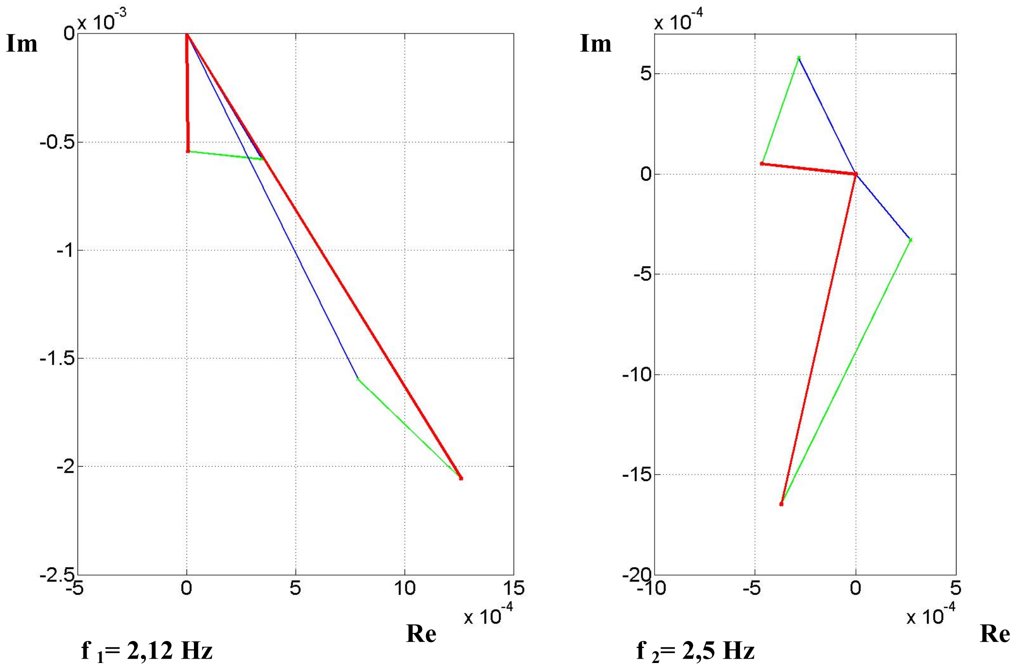
Tabulka 10. – Amplitudy a fáze příspěvků nejnižších vertikálních komplexních vlastních tvarů na celkovou odezvu - harmonické buzení o frekvenci: f = 2,12 Hz (NKTS)

n	Bod A		Bod B	
	$\|Yc_n\|$[m]	φ [°]	$\|Yc_n\|$ [m]	φ [°]
1	0,0006738	-59,3	0,0017788	-63,8
2	0,0002630	162,6	0,0001045	-9,9
3	0,0002467	-48,4	0,0004198	-64,8
4	0,0002831	149,6	0,0001901	-18,8
5	0,0000025	179,7	0,0000007	-0,3
6	0,0000078	179,8	0,0000044	-0,2
7	0,0000022	-0,3	0,0000024	-0,4
8	0,0000004	-0,3	0,0000023	-0,3
Σ	0,00054222	-89,4	0,0024093	-58,5

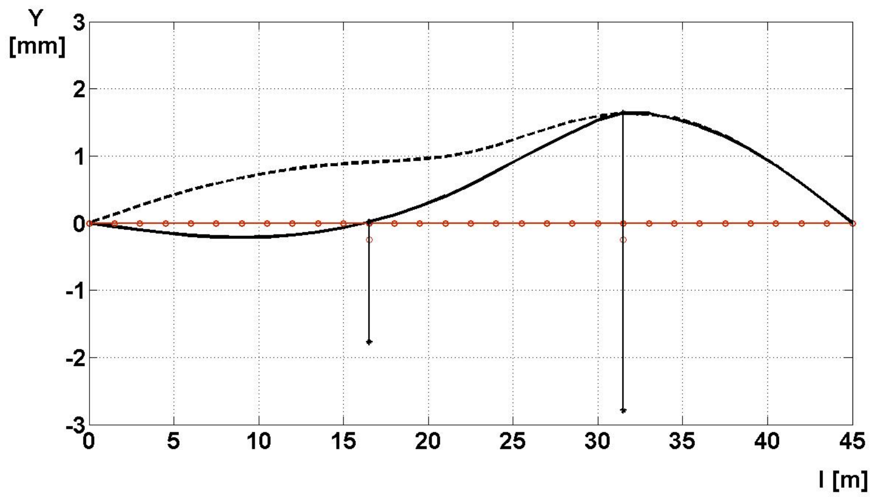
Tabulka 11. – Amplitudy a fáze příspěvků nejnižších vertikálních komplexních vlastních tvarů na celkovou odezvu - harmonické buzení o frekvenci: f = 2,5 Hz (NKTS)

n	Bod A		Bod B	
	$\|Yc_n\|$ [m]	φ [°]	$\|Yc_n\|$ [m]	φ [°]
1	0,0002179	243,5	0, 0005680	238,8
2	0, 0001463	94,1	0, 0000591	-79,1
3	0, 0004827	261,9	0, 0008585	244,5
4	0, 0006443	116	0, 0004279	-50,4
5	0, 0000026	179,7	0, 0000007	-0,3
6	0, 0000078	179,7	0, 0000045	-0,3
7	0, 0000022	-0,4	0, 0000024	-0,4
8	0, 0000004	-0,3	0, 0000023	-0,3
Σ	0, 0004679	173,6	0, 0016892	257,4

Výsledných fázový posun mezi odezvou v bodě A a B byl určen hodnotou 30,9° pro první rezonanční frekvenci. To je, až na rozdílný fázový posun odezvy bodů vůči zatížení, téměř shodné s proporcionální soustavou s tlumiči (31,9°). Naproti tomu pro druhou rezonanční frekvenci činil vzájemný fázový rozdíl bodu 83,8° oproti „proporcionálním“ 129,9°. V tomto případě vybuzený tvar jen vzdáleně připomíná původní druhý vertikální tvar lávky bez tlumiče. Pohyb uzlů kmitání resp. jejich vznik a zánik bude patrný nejen v oblastech malých výchylek kolem rovnovážné polohy, kdy příspěvek dominantního tvaru bude minimalizován, ale i při větších přemístěních, viz Obrázek 10.



Obrázek 9. Zobrazení složek odezvy bodů A a B jako rotujících vektorů v Gaussově rovině komplexních čísel – neproporcionální případ (červeně –výsledný vektor, modře – příspěvek dominantního tvaru, zeleně – příspěvek ostatních tvarů) (NKTS)



Obrázek 10. Přemístění hlavního nosníku mostovky a pohlcovačů kmitů neklasicky tlumené lávky na harmonické buzení v první rezonanční frekvenci (60% maximální amplitudy v místě buzení) (čárkovaná čára – vlastní tvar netlumené lávky bez pohlcovačů kmitů) (NKTS)

5. Závěr

Reálné tlumící charakteristiky stavebních konstrukcí jsou velmi obtížně matematicky popsatelné. Útlum se např. velmi liší v závislosti na výchylkách kmitání. Od nízkých hodnot materiálového útlumu při malých výchylkách po vyšší hodnoty konstrukčního útlumu (tření ve spojích) při vyšších amplitudách. Přes tyto těžce modelovatelné fakta je užití neproporcionálního tlumení zcela jistě přiblížením se k realitě. Klasický útlum je pro základní posouzení konstrukce, která není nijak významně či bodově tlumena, dostatečný. Avšak pro detailnější rozbor je zejména u speciálně tlumených konstrukcí již nevyhovující. V článku byla rozdílnost obou klasicky i neklasicky tlumených systémů prezentována na lávce pro pěší s instalovanými pohlcovači kmitů. Modální analýza neproporcionálního systému, provedená komplexní iterací podprostoru, ukázala fázovou rozdílnost složek vlastních komplexních tvarů oproti stejné fázi složek vlastních tvarů proporcionálně tlumené soustavy. Taktéž imaginární části některých vlastních čísel neklasického systému dosahovala větších hodnot než jejich odpovídající netlumené vlastní čísla, což není u klasicky tlumené soustavy možné. Bylo teoreticky odvozeno řešení odezvy neproporcionálně tlumené soustavy na harmonické kmitání rozvojem do vlastních komplexních tvarů a oba typy tlumení byly podrobeny analýze. Z ní vyplynulo, že se pro oba typy tlumení podílejí na odezvě všechny vlastní tvary, které nejsou ortogonální k vektoru zatížení a které nemají v místech budících sil absolutní hodnoty složek rovny nule. Při porovnání dvou ekvivalentních soustav proporcionálně a neproporcionálně tlumených se ukázalo, že se výsledky odezvy v jednotlivých bodech konstrukce liší jak fázově, tak amplitudově. To je způsobeno zejména vlivem různých fází a amplitud příspěvků jednotlivých tvarů. Oba systémy měli různé rezonanční frekvence a tvary amplitudových křivek pro zrychlení. U obou systémů docházelo při harmonickém kmitání ke vzniku, pohybu a zániku uzlů kmitání v oblastech minimalizace vlivu dominantního tvaru. Jednalo zejména o oblasti rovnovážné polohy a malých výchylek, avšak pro případ buzení v druhé rezonanční frekvenci neklasicky tlumeného systému se jev projevil i u vyšších výkmitů. Z analýzy obou typů vyjádření útlumu se ukázalo, že jejich dynamické charakteristiky jsou pro potřeby přesnějších výpočtů odlišné a v případě rozboru chování lávky s pohlcovači kmitů opatřených viskózními tlumiči je vhodnější užití neproporcionálního útlumu.

6. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantů 103/09/0094, 103/07/J060, A200710902, Grant DFG 476 TSE 113/52/0-1 a výzkumného plánu AV 0720710524.

7. References

prEN 1991-2 Eurocode 1- Actions on Structures Part 2: General Actions – Traffic Loads on Bridges, CEN, 2001

Fischer P. (2000).: Eigensolution of nonclassically damped structures by complex subspace iteration, *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, Volume 189, Issue 1, pp.149-166.

Hurty W.C, Rubinstein M.F. (1982).: *Dynamics of structures*, J.Wiley

Brepta R., Půst L., Turek F. (1994).: *Mechanické kmitání*, Technický průvodce 71, Sabotáles, Praha