ENGINEERING MECHANICS 2009
National Conference with International Participation
Svratka, Czech Republic, May 11 – 14, 2009

pp. 435–452
Paper **#178**

DAMPING INFLUENCE ON IMPACT EFFECTS WITH PRESTRESS IN THE CLASS OF NON-LINEAR TIME HETERONOMOUS PSEUDOPLANETARY SYSTEMS

M. Hortel*, A. Škuderová*

Summary: *The analysis of the influence of linear, non-linear – quadratic and cubic as well as combined damping in one branch of the pseudoplanetary system by the normal gear mesh and by the teeth profiles contact bounces i.e. impact effects in the gear mesh of the kinematic pair on the internal dynamics.*

1. Úvod

Současný světový vývoj vysoce namáhaných lehkých a vysokootáčkových převodových systémů o minimálních dimenzích a hmotnostech vede na planetové diferenciální a pseudoplanetové soustavy s větvenými toky výkonů.

Pro zajištění spolehlivosti těchto strojních systémů je obecně zapotřebí v prvé řadě dokonalá jejich dynamická analýza. U převodových soustav s kinematickými vazbami je především nutná analýza vnitřní dynamiky těchto časově heteronomních slabě a silně nelineárních systémů.

2. Matematicko-fyzikální model a metodika řešení

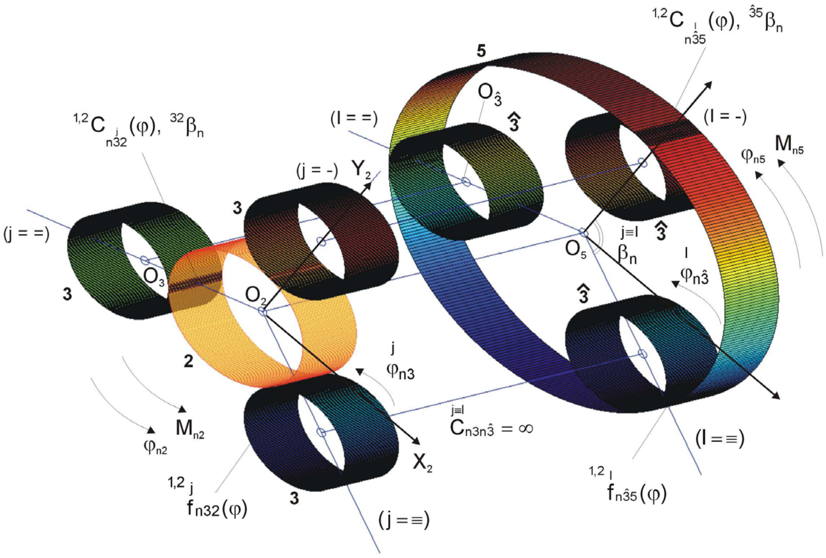
Pro analýzu pohybu a stability chodu při vyšetřování vnitřní dynamiky záběru satelitů s centrálním a korunovým kolem pseudoplanetové soustavy s větveným tokem výkonu byl vypracován matematicko-fyzikální model se třemi $j \equiv I = 3$ po obvodu centrálního kola 2 a korunového kola 5 rovnoměrně rozloženými dvojnásobnými satelity o sedmi stupních volnosti. Tato slabě a silně nelineární v tuhostech záběru ozubení časově heteronomní soustava tvoří zvláštní případ dynamické analýzy regulárních a iregulárních – chaotických pohybů v planetových řetězovitě větvených diferenciálních soustavách.

Takové soustavy mohou vykazovat mnohostranná dynamická chování, kde se v jistých senzibilních oblastech naladění objevují nové, mnohdy až nečekané jevy jako zákonitosti víceznačností řešení, bifurkace, štěpení a větvení amplitudo-frekvenčních charakteristik, přechody pohybů regulárních v iregulární až deterministického chaotického charakteru apod.

Pro analýzu výsledného pohybu centrálního kola 2 při jeho elastickém, tuhém, resp. plovoucím – volném uložení byl pro předpoklad hmotnostní diskretizace sestaven matematicko-fyzikální model a pohybové rovnice pseudoplanetové soustavy s $j \equiv I = 3$ satelity o sedmi

* Ing. Milan Hortel, DrSc., Ing. Alena Škuderová, Ph.D.: Ústav termomechaniky AVČR, v.v.i.; Dolejškova 5; 182 00 Praha 8; tel.: +420.266 053 803, fax: +420.286 584 695; e-mail: hortel@it.cas.cz

stupních volnosti, viz obr.1, jako další předstupeň analytického a numerického řešení obecné diferenciální soustavy s $j \equiv I > 1$ dvojnásobnými satelity.



Obr.1 – Kinematické schéma matematicko-fyzikálního modelu s čelním přímým a šikmým ozubením. (${}^{1,2}C_{\substack{j\\ n32}}(\varphi)$, ${}^{1,2}C_{\substack{I\\ n\hat{3}5}}(\varphi)$ … výsledná tuhost ozubení v záběru, ${}^{3,2}\beta_n$, ${}^{\hat{3},5}\beta_n$ … úhel sklonu ozubení, ${}^{1,2}\overset{j}{f}_{n32}(\varphi)$, ${}^{1,2}\overset{I}{f}_{n\hat{3}5}(\varphi)$ … výsledné odchylky od ideálního evolventního tvaru ozubení, $\overset{j\equiv I}{C}_{n3n\hat{3}}$ … torzní tuhost hřídelů satelitů).

Schéma v obr.1 představuje kinematický náčrt navrhovaného modelu s čelním přímým a šikmým ozubením.

Navržený matematicko-fyzikální model převodové soustavy s $j \equiv I = 3$ dvojnásobnými satelity $3, \hat{3}$ umožňuje analýzu pohybu centrálního kola 2 s tuhostním uložením $C_{21} \in (0;\infty)$ a s vlivem technologických přesností ${}^{1,2}f(\varphi)$ boků zubů kol v jednotlivých záběrech a příslušných sekcích soustavy. Ty mohou zásadně ovlivňovat rázové jevy a vlastnosti pohybů jak v normálním, tak i v inverzním záběru či v průběhu boční zubové mezery – vůli, a to jak v konzervativní, tak i nekonzervativní soustavě.

Pro torzní pohyby $\varphi_2(t)$ centrálního kola 2, pohyby v uložení $X_{21}(t), Y_{21}(t)$ kola 2, torzní pohyby satelitů $3, \hat{3}$, tj. $\overset{j\equiv I}{\varphi}_{3,\hat{3}}(t)$ a torzní pohyb $\varphi_5(t)$ korunového kola 5 při axiálních pohybech $Z_{21}(t) = Z_{51}(t) = Z_{3,\hat{3}}(t) = 0$ a při torzních tuhostech $\overset{j\equiv I}{C}_{n3n\hat{3}} \to \infty$ hřídelů satelitů $3, \hat{3}$, axiálních tuhostech $C_{Z2} \to \infty$ centrálního kola 2 a $C_{Z5} \to \infty$ korunového kola 5, byla, s ohledem na uvažované fáze odskoků – rázů, odvozena soustava rovnic pro relativní pohyby centrálního kola 2 vůči satelitům 3 a korunového kola 5 vůči satelitům $\hat{3}$ pseudoplanetové soustavy ve tvaru

$$y''_{\substack{j\\32}}(\tau)+\overset{j}{y}''_{2res}(\tau)+\sum_{n=1}^{j}H(y_{\substack{n\\32}}(\tau))A_{jn}y'_{\substack{n\\32}}(\tau)-H(y_{\substack{j\\\hat{3}5}}(\tau))B_j y'_{\substack{j\\\hat{3}5}}(\tau)+\sum_{n=1}^{j}H(y_{\substack{n\\32}}(\tau))C_{jn}(\tau)y_{\substack{n\\32}}(\tau)$$

$$-H(y_{\substack{j\\\hat{3}5}}(\tau))D_j(\tau)y_{\substack{j\\\hat{3}5}}(\tau)=G_j(H(y_{\substack{j\\32}}(\tau)),\tau), \qquad \dots \quad (1,2,\dots,j)$$

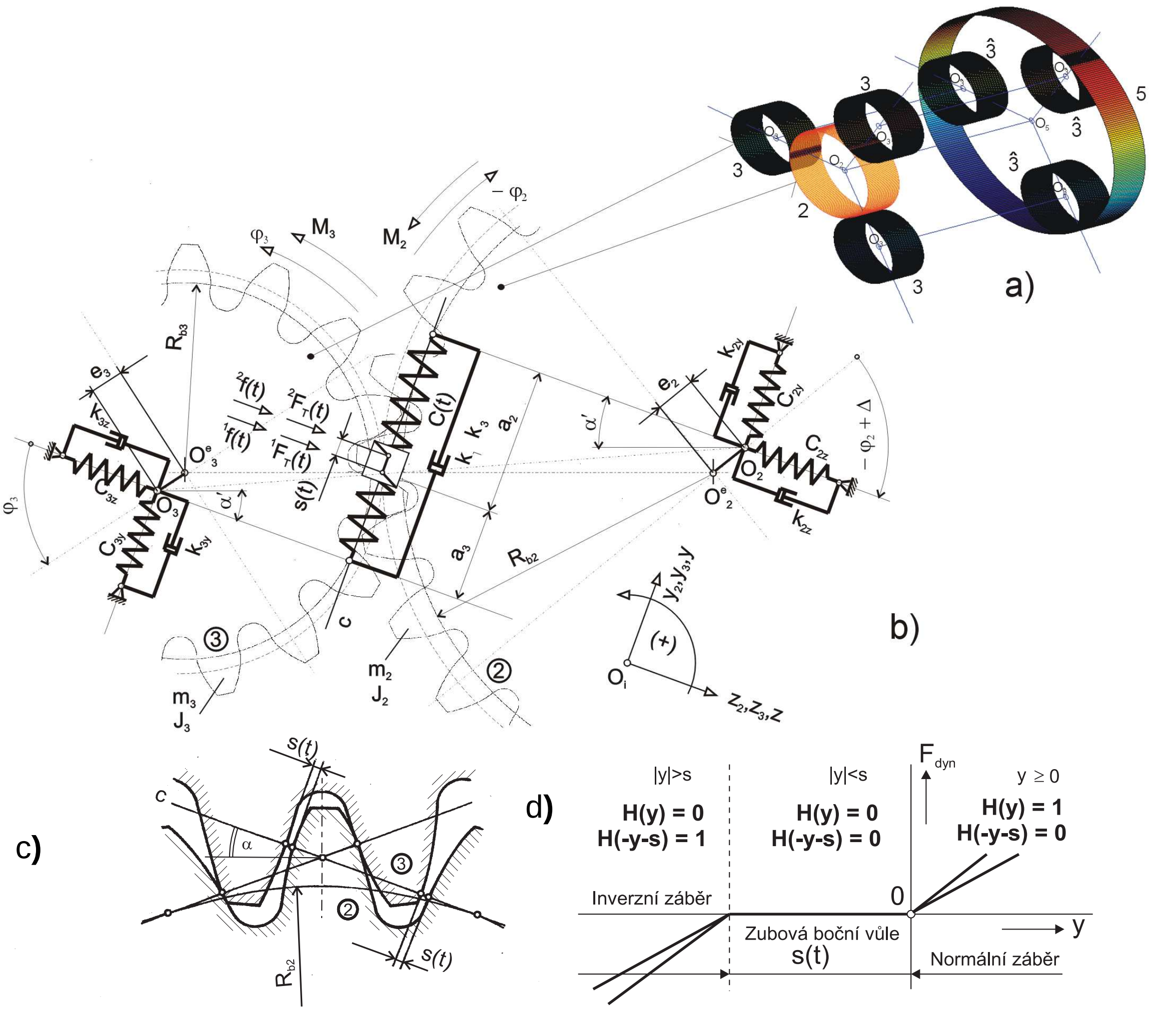
$$y''_{\substack{j\\\hat{3}5}}(\tau)+\sum_{n=1}^{j}H(y_{\substack{n\\\hat{3}5}}(\tau))H_{jn}y'_{\substack{n\\\hat{3}5}}(\tau)-H(y_{\substack{j\\32}}(\tau))I_j y'_{\substack{j\\32}}(\tau)+\sum_{n=1}^{j}H(y_{\substack{n\\\ddot{3}5}}(\tau))J_{jn}(\tau)y_{\substack{n\\\hat{3}5}}(\tau)$$

$$-H(y_{\substack{j\\32}}(\tau))K_j(\tau)y_{\substack{j\\32}}(\tau)=L_j(H(y_{\substack{j\\\hat{3}5}}(\tau)), \qquad \dots \quad (j+1,\dots,2j)$$

a pro pohyb centrálního kola 2 vůči rámu 1 (uložení)

$$\overset{j}{y}''_{21}(\tau)+U_j\,\overset{j}{y}'_{21}(\tau)-H(y_{\substack{j\\32}}(\tau))V_j y'_{\substack{j\\32}}(\tau)+W_j\,\overset{j}{y}_{21}(\tau)-H(y_{\substack{j\\32}}(\tau))Q_j y'_{\substack{j\\32}}(\tau)=0$$

$$\dots \quad (2j+1,\dots,3j).$$



Obr.2 – Náhradní matematicko-fyzikální model páru ozubených kol (b) jedné větve pseudoplanetové soustavy s dvojnásobnými satelity (a), technologická boční zubová vůle *s(t)* (c) a hodnoty Heavisideových funkcí *H* v oblastech zubového záběru s vůlemi (d).

Přitom $\tau = \omega_c t$ … bezdimenzionální čas, (ω_c... záběrová frekvence) a koeficienty $A_{jn}, B_j, C_{jn}, D_j, G_j$, jakož i $H_{jn}, I_j, J_{jn}, K_j, L_j$ a U_j, V_j, W_j, Q_j v rovnicích pro výpočet relativních pohybů $y_{\substack{j\\32}}(\tau)$, $y_{\substack{j\\35}}(\tau)$ a pohybů v uložení centrálního kola $\overset{j}{y}_{21}(\tau)$ příslušných větví toků výkonu jsou složité výrazy naladění a parametrů sledované soustavy [1],[2].

Rovnice popisují pohyb kolem rovnovážné polohy ve všech třech záběrech kinematických dvojic a to jak v záběrech centrálního kola 2 a satelitů *j*, tak i v záběrech korunového kola 5 a satelitů $j \equiv I$. $\overset{j}{y}_{2res}(\tau) = f\left({}^{32}\alpha_{XZ}, \overset{j}{y}_{21}(\tau) \right)$ je výsledný pohyb středu kola 2 ve směru záběrové přímky příslušné větve *j*-tého satelitu. Pro čelní úhel záběru ${}^{32}\alpha_{XY}$ (normální úhel záběru $\alpha = {}^{32}\alpha_{XY}$ pro úhel sklonu zubů $\beta = 0$) a třísatelitový převodový systém ($j = 3$) jsou tyto výsledné pohyby v jednotlivých větvích této sekce dány výrazy

$$\begin{aligned}\overset{-}{y}_{2res}(\tau) = \overset{-}{y}_{21}(\tau) &+ \left[\overset{=}{y}_{21}(\tau)\cos\left(\frac{13\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) + \overset{\equiv}{y}_{21}(\tau)\cos\left(\frac{17\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \right] \cos\left(\frac{3\pi}{2} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \\ &+ \left[\overset{=}{y}_{21}(\tau)\sin\left(\frac{13\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) + \overset{\equiv}{y}_{21}(\tau)\sin\left(\frac{17\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \right] \sin\left(\frac{3\pi}{2} - {}^{32}\alpha_{XY}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{=}{y}_{2res}(\tau) = \overset{=}{y}_{21}(\tau) &+ \left[\overset{-}{y}_{21}(\tau)cos\left(\frac{3\pi}{2} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) + \overset{\equiv}{y}_{21}(\tau)cos\left(\frac{17\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \right] cos\left(\frac{13\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \\ &+ \left[\overset{-}{y}_{21}(\tau)sin\left(\frac{3\pi}{2} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) + \overset{\equiv}{y}_{21}(\tau)sin\left(\frac{17\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \right] sin\left(\frac{13\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\equiv}{y}_{2res}(\tau) = \overset{\equiv}{y}_{21}(\tau) &+ \left[\overset{-}{y}_{21}(\tau)cos\left(\frac{3\pi}{2} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) + \overset{=}{y}_{21}(\tau)cos\left(\frac{13\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \right] cos\left(\frac{17\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \\ &+ \left[\overset{-}{y}_{21}(\tau)sin\left(\frac{3\pi}{2} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) + \overset{=}{y}_{21}(\tau)sin\left(\frac{13\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right) \right] sin\left(\frac{17\pi}{6} - {}^{32}\alpha_{XY}\right).\end{aligned}$$

Dříve než přistoupíme k dalšímu výzkumu této problematiky, podívejme se v návaznost na dosavadní studie [2],[3],[4] ještě na analýzu kvantitativního vlivu lineárního, nelineárního a kombinovaného tlumení v jedné větvi záběru ozubení matematicko-fyzikálního modelu dle obr.2.

Jde především, jak již bylo řečeno, o kvantitativní hledisko tlumících vlastností při rázových jevech s předpětím, tj. při existenci normálního záběru, odskoku boků zubů a při záběru inverzním. Všechny tyto fáze se mohou u vysokootáčkových soustav vyskytovat a tak značně ovlivňovat životnost a účinnost převodových mechanismů.

Analýza vlivu lineárního a nelineárního tlumení na vnitřní dynamiku je zde prováděna numericky pomocí simulačního modelu soustavy v prostředí MATLAB/Simulink [5].

3. Ukázky analýzy kvantitativního vlivu tlumení na rezonanční charakteristiky soustavy

Pohyb v jedné větvi výkonového toku pseudoplanetové soustavy, obr.2, tj. dvojice ozubených kol s čelními přímými zuby o šesti stupních volnosti popisuje při hmotnostní diskretizaci soustava obyčejných slabě a silně nelineárních časově heteronomních diferenciálních rovnic [3] tvaru

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}\mathbf{v}'' + {}_1\mathbf{K}(\beta,\delta_i,H)\mathbf{v}' + \sum_{K_1>1} {}_{K_1}\mathbf{K}(D,D_i,H)\left|\mathbf{w}'(\mathbf{v}')\right|^{K_1}\operatorname{sgn}(\mathbf{w}'(\mathbf{v}'))\\ &\quad + {}_1\mathbf{C}(\varepsilon,\kappa,Y_n,U_n,V_n,H,\tau)\mathbf{v} + \sum_{K>1} {}_K\mathbf{C}(\varepsilon,\kappa,I_n,H,\tau)\mathbf{w}^K(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(a_n,b_n,\overline{\varphi},H,\tau),\end{aligned} \tag{1}$$

kde $\mathbf{v}$ představuje obecně m-dimenzionální vektor pohybu soustavy, $\mathbf{w}^K(\mathbf{v})$ je K-tá mocnina vektoru $\mathbf{v}$, která je definovaná vztahem $\mathbf{w}^K(\mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{w}(\mathbf{v})\mathbf{w}^{K-1}(\mathbf{v}))$, přičemž $\mathbf{D}(\mathbf{w}(\mathbf{v})$ je diagonální matice, ve které jsou prvky na hlavní diagonále tvořeny prvky vektoru $\mathbf{w}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}$. Dále je $\mathbf{M}$ matice hmotnostních a setrvačných sil, ${}_1\mathbf{K}$ a ${}_{K_1}\mathbf{K}$ jsou maticemi lineárních, příp. nelineárních tlumících sil, ${}_1\mathbf{C}$ a ${}_K\mathbf{C}$ pak maticemi kvazilineárních resp. nelineárních vratných sil a $\mathbf{F}(\tau)$ je vektorem nepotenciálního vnějšího buzení s budícími koeficienty a_n, b_n a $\overline{\varphi}$ fázový úhel. H je Heavisideova funkce, která umožňuje v kompaktním tvaru řešit pohyby – rázy jako důsledek silných neanalytických nelinearit vlivem existence technologických bočních vůlí $s(\tau)$ ozubení. Příslušné lineární resp. nelineární tlumící součinitelé jsou označeny β,δ_i resp. D, D_i, lineární parametrické funkce symboly Y_n,U_n,V_n a nelineární parametrické funkce tzv. parametrické nelinearity symbolem I_n. ε a κ představují součinitele trvání záběru a amplitudovou modulaci výsledné tuhostní funkce v ozubení ${}_1\mathbf{C}(\tau)$. Derivace podle bezdimenzionálního času τ jsou značeny čárkami, $\tau = \omega_c t$, přičemž $\omega_c \ldots$ záběrová frekvence, $t \ldots$ čas.

Pro obecnou elasticky uloženou soustavu ozubených kol 3,2 (viz obr.2) s pohyby podpor $\{y_{32}; z_{32}\}$, při respektování výrobních nepřesností – odchylek od ideální evolventy ${}^{1,2}f(\tau)$ a tzv. házivosti roztečných kružnic, které jsou modelovány výstřednostmi $e_{3,2}$, lze relativní pohyb, jako míru dynamické síly $F_{dyn} = {}_1\mathbf{C}(\tau)y(\tau)$ v záběru ozubení, napsat ve tvaru [3]

$$y(\tau) = R_{b3}\varphi_3 + R_{b2}\varphi_2 + y_3 - y_2 + e_3\sin\varphi_3 - e_2\sin(\Delta - \varphi_2) + {}^{1,2}f(\tau)\,, \tag{2}$$

kde Δ je fázový úhel natočení mezi výstřednostmi $e_{3,2}$ kol, $R_{b3,2}$ jsou poloměry základních kružnic a $\varphi_{3,2}$ jsou úhly natočení kol 3,2. ${}_1\mathbf{C}(\tau)$ je výsledná parametrická funkce čelního přímého ozubení v záběru, viz [3].

Analýza dynamického chování některých vlastností vnitřní dynamiky řešeného případu obecné nelineární parametrické, tj. homogenní ($\mathbf{F}(a_n,b_n,\overline{\varphi},H,\tau) = 0$) časově heteronomní soustavy s kinematickými vazbami – čelními ozubenými koly s přímými zuby – je v příspěvku zaměřena na vyšetřování příčin tvarů amplitudo-frekvenčních charakteristik daného matematicko-fyzikálního modelu jak u

a) konzervativního systému v záběru ozubení[1],

b) nekonzervativního systému.

Protože dosud nejsou v tak tvarově složitých částech převodových systémů např. ve fázi záběru ozubení valení – smyk známé ani přibližné údaje o tlumících vlastnostech či zákonitostech tlumení jak v samotném ozubení, tak i ve spojení s vetknutím do věnců a disků včetně nábojů kol jako celku, bude tlumení zde v systému pohybových rovnic (1) simulováno pomocí funkcionálních závislostí členů

$$ {}_1\mathbf{K}(\beta,\delta_i,H)\mathbf{v}' + \sum_{K_1>1} {}_{K_1}\mathbf{K}(D,D_i,H)\left|\mathbf{w}'(\mathbf{v}')\right|^{K_1} \operatorname{sgn}\left(\mathbf{w}'(\mathbf{v}')\right) \ \text{pro}\ K_1 = 2{,}3 \qquad (3) $$

z rovnice (1) a jednotlivé kombinace lineárních a nelineárních tlumení ozubení v záběru a v zubové vůli $s(\tau)$ při rázových jevech dle Tab.l.

Tab.1. Kombinace tlumení v záběru ozubení

	konzerv. systém v záběru	lineární tlumení v záběru - L			kvadratické tlumení v záběru - Kv			kubické tlumení v záběru - Ku			kombinace tlumení v záběru											
											L + Kv			L + Ku			L + Kv + Ku			Kv + Ku		
k_1	0	×		×							×		×	×		×	×		×			
k_2	0				×		×				×		×				×		×	×		×
k_3	0							×		×				×		×	×		×	×		×
k_{1m}	0		×	×								×	×		×	×		×	×			
k_{2m}	0					×	×					×	×					×	×		×	×
k_{3m}	0								×	×					×	×		×	×		×	×
Symbol označení řešení v obrázcích	○	č	●	×	č	●	×	č	●	×	č	●	×	č	●	×	č	●	×	č	●	×
Varianta	a	b			c			d			e			f			g			h		

Pozn.: $k_{1,2,3}\ldots$ materiálové tlumení ozubení; $k_{1m,2m,3m}\ldots$ tlumení mazacího prostředí v zubové mezeře - vůli; 1 – lineární, 2 – kvadratické, 3 – kubické

Studie navazuje na dosud řešené práce, viz např. [3],[4]. A protože dosud nejsou známé jak teoreticky, tak i experimentálně, *obecné* zákonitosti tlumení kmitání zubů v záběrech kinematických dvojic, byly do soustavy rovnic (1) zavedeny pro útlum kmitání v záběru ozubení vztahy (3) a pro kvalitativní a kvantitativní analýzu pak varianty tlumení (a) … (h) s jejich kombinacemi ve fázích záběru (○), (□), (•), (×), dle Tab.1. Pro konzervativní soustavu, tj.

[1] Pod pojmem “konzervativní systém“ **zde** budeme rozumět soustavu zobrazenou matematicko-fyzikálním modelem v obr.2 a popsanou systémem pohybových rovnic (1) bez členů obsažených v rovnici (3), které popisují lineární a nelineární síly. Třecí síly v záběru ozubení představují určitou vnitřní budící složku soustavy. V práci jsou vyjádřeny rovnicí pro Coulombovo tření [5] a způsobují rovněž jistou disipaci energie v rámci definice konzervativního systému. Přesto je v práci ponecháváme, neboť způsobují střídání – změny smyslu tření dané nejen geometrií záběru ozubení při průchodu záběru centrálním bodem na záběrové dráze, ale i při každé změně relativních pohybů elasticky uložených podpor kol.

variantu (a) jde pak o jedinou „kombinaci“ ve fázích záběru (○), tj. v záběru normálním, při rázových jevech v záběru s odlehnutím, tj. odskoky boků zubů a při záběru inverzním s $k, k_m = 0$. V nekonzervativních soustavách se jedná o tlumení $k_{1,2,3}$ materiálové a $k_{1m,2m,3m}$ viskózní v zubové mezeře. Indexy 1,2,3 značí postupně 1 – lineární, 2 – kvadratické, 3 – kubické tlumení.

Předmětem této studie je kvantitativní analýza vlivu tlumení na dynamické vlastnosti soustavy. Pro možnost kvalitativního i kvantitativního porovnání výsledků řešení jsou všechny rezonanční charakteristiky $\{\nu_s; y(\tau)\}$ řešeny pro parametry $\varepsilon = 1.569; \kappa = 0.5879$; $C_{\max} = 4.10^5$ [Nmm^{-1}] funkce ${}_1\mathbf{C}(\tau)$ resp. modifikované funkce výsledné tuhosti ${}_1\mathbf{C}(\tau)(H1+H2)$ zubů v záběru, $m_{red} = 0.003123$ [kg]. Budou uvažovány tři stejné hodnoty materiálového $k \equiv k_{1,2,3}$ a viskózního tlumení $k_m \equiv k_{1m,2m,3m}$, tj.

I.) $k = k_m = 3{,}95$ [Nmm^{-1}s], což odpovídá v soustavě rovnic (1) poměrným tlumením $\beta, \beta_m, D, D_m = 0.062$. Toto tlumení budeme označovat za ***základní***.

II.) Dále budeme uvažovat varianty s tlumením 10x větším, tj. $k = k_m = 39{,}5$ [Nmm^{-1}s] a $\beta, \beta_m, D, D_m = 0.62$.

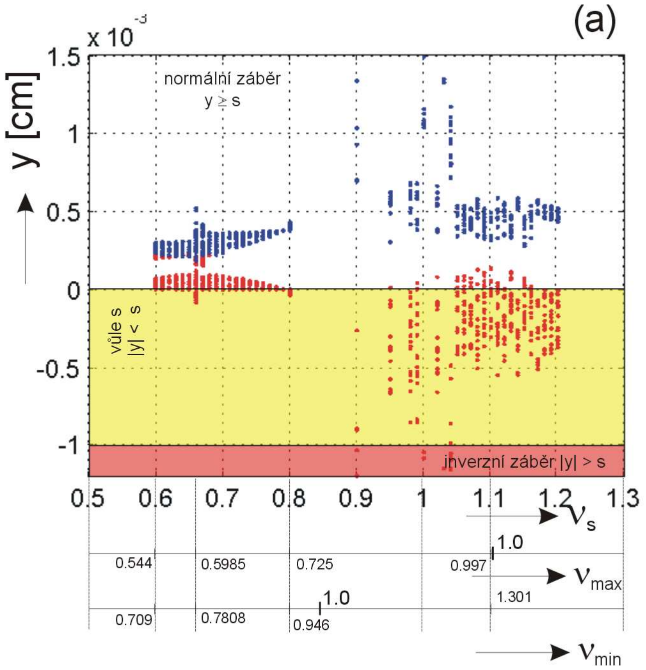
III.) Tlumení vzhledem ad I.) 10x menším, tj. $k = k_m = 0{,}395$ [Nmm^{-1}s] a $\beta, \beta_m, D, D_m = 0.0062$.

Protože soustava rovnic (1) pro systém z obr.2 vede zde pro všechny v Tab.1 uvedené varianty kombinačního tlumení (b) … (h) na „ustálené“ kmitání již při páté otáčce soukolí a koeficientech k resp. viskózního olejového tlumení k_m v zubové mezeře, dle obecné rovnice pro tlumící síly F_k

$$\ldots + k_1 y'(t) + \frac{3}{2} k_2 y'^2(t)\, sign(y'(t)) + 2k_3 y'^3(t) + \ldots$$
$$+ k_{1m} y'(t) + \frac{3}{2} k_{2m} y'^2(t)\, sign(y'(t)) + 2k_{3m} y'^3(t) + \ldots,$$

jsou všechny dále uvedené amplitudo-frekvenční charakteristiky vyneseny pro tuto pátou otáčku. U varianty (a), tj. dle zde definovaného konzervativního systému, je soustava v okolí páté otáčky „kvaziustálená“, s rostoucím počtem otáček při parametrickém buzení však dále rychle diverguje, viz [3].

Obrázek obr.3 představuje bifurkační rezonanční charakteristiky relativního pohybu *y(t)* v záběru ozubení konzervativní soustavy s rázovými jevy ve frekvenční oblasti $\nu_s \in \langle 0.6;1.2 \rangle$, kde bílá plocha představuje oblast normálního, tj. $y(t) \geq 0$, pohybu – záběru, žlutou barvou je vyznačena oblast pohybu v zubové vůli, tj. $|y(t)| < s(t)$ a červenou barvou pak oblast s inverzním záběrem protiboků zubů, tj. $|y(t)| > s(t)$. Průběhy horních bifurkačních *maxim* jsou vyznačeny barvou modrou, dolních *minim* barvou červenou. Na x-ové ose jsou mimo stupnici frekvenčního naladění ν_s střední výsledné zubové tuhosti C_s v záběru vyneseny ještě stupnice naladění $\nu_{\max}$ tuhostní hladiny $C_{\max}$ výsledné tuhosti $C(t)$ resp. modifikované tuhosti $C(t)(H1+H2)$ ozubení v záběru. Analogické to je u stupnice $\nu_{\min}$.



Obr.3 – Rezonanční bifurkační charakteristiky relativního pohybu $y(t)$ variantního řešení (a) s kombinacemi tlumení v záběru (○), tj. konzervativní soustavy, viz Tab.1.

Z celkového pohledu je patrné, že po počátečním spojitém průběhu v oblasti $\nu_s \in \langle 0.6; 0.655 \rangle$, tj. v oblasti normálního záběru ozubení, vykazuje bifurkační charakteristika první ostrou, lokálně velmi úzkou nespojitost průběhu v intervalu $\nu_s \in \langle 0.656; 0.672 \rangle$ s překmitem relativního pohybu $y(t) < 0$ do oblasti vůle $s(t)$ s rázovými jevy, dále pak v intervalu $\nu_s \in \langle 0.673; 0.788 \rangle$ vykazuje průběh opět pouze záběr normální s □ s mírně divergentním zužujícím se bifurkačním charakterem.

Druhá velká skoková nespojitost vzniká od hodnoty $\nu_s \approx 0.789$ s velkým rozkmitem amplitudy relativního pohybu $y(t) \geq 0$ i $y(t) \leq 0$, tj. s typickými odskoky boků zubů v záběru se nacházejícího ozubení do zubové vůle, obecně $s(t)$, až do inverzního záběru. Tento amplitudový rozkmit pak s rostoucím $\nu_s \to 1.2$ konverguje s neustáleným *chaotickým* průběhem.

Příčiny vzniku těchto míst nespojitostí v rezonančních bifurkačních charakteristikách, doprovázených odskoky boků zubů $y(t) < 0$ s rázovými jevy konzervativní soustavy, tj. s nulovým tlumením, spočívají, jak je např. patrno z kapitoly 10 [3],

- na daném frekvenčním naladění vůči tuhostním hladinám C_{max}, C_{min} funkce tuhosti $C(t)$ resp. modifikované funkci $C(t)(H1+H2)$,
- na době trvání záběru na příslušných tuhostních hladinách funkce $C(t)$ s možností rozvinutí amplitudy kmitání relativního pohybu $y(t)$,
- na fázovém posuvu relativního pohybu $y(t)$ v normálním resp. inverzním záběru vůči výsledné tuhostní funkci $C(t)$ v záběru zubů, resp. modifikované funkci $C(t)(H1+H2)$, v našem případě zde, tj. v „konzervativní“ soustavě a její definici, viz poznámka pod čarou této studie, vlivem tlumícího účinku třecích sil $F_T(t)$ v záběru ozubení soustavy – např. při uvažování zjednodušeného tvaru ve formě Coulombova tření [1],[5]

$$F_T(t) = -f_T\{y(t)H1 + [y(t)+s(t)]H2\}C(t)\gamma(t) sign\{\delta^0_{e_2+e_3}$$
$$+[e_3\dot{\varphi}_3 \sin\varphi_3 - e_2\dot{\varphi}_2 \sin(\Delta-\varphi_2)]\} sign[\delta^0_{e_2+e_3} + (\dot{z}_3 - \dot{z}_2)],$$

kde f_T … součinitel suchého tření a $\delta^0_{e_2+e_3}$ … Kroneckerův symbol. K takovému fázovému posuvu pak dále dochází i v oblastech odskoků záběrů zubů a inverzních záběrů vůči modifikovaným tuhostem $C(t)(H1+H2)$.

Podobně tomu je zde i v okolí naladění $\nu_s \approx 0.8$, kde jsou $\nu_{\max} = 0.725$ a $\nu_{\min} = 0.946$, jenže vlivem $\nu_{\min} \to 1$ s větším rozkmitem amplitudy $y(t)$ v této oblasti.

Po překročení hranice $y(t) < 0$ pak soustava pracuje se třemi potenciálními hladinami $C_{\max}$, $C_{\min}$ a $C(t) = 0$. V těchto okamžicích, tj. případ $C(t) = 0$, soustava pohybových rovnic (1) přechází do tvaru $\mathbf{Mv}'' = 0$.

Všechna další vyobrazení se již budou týkat dle Tab.1 pouze *nekonzervativních* soustav s lineárním a nelineárním, tj. kvadratickým a kubickým tlumením, včetně jejich variant a to jak již bylo uvedeno pro

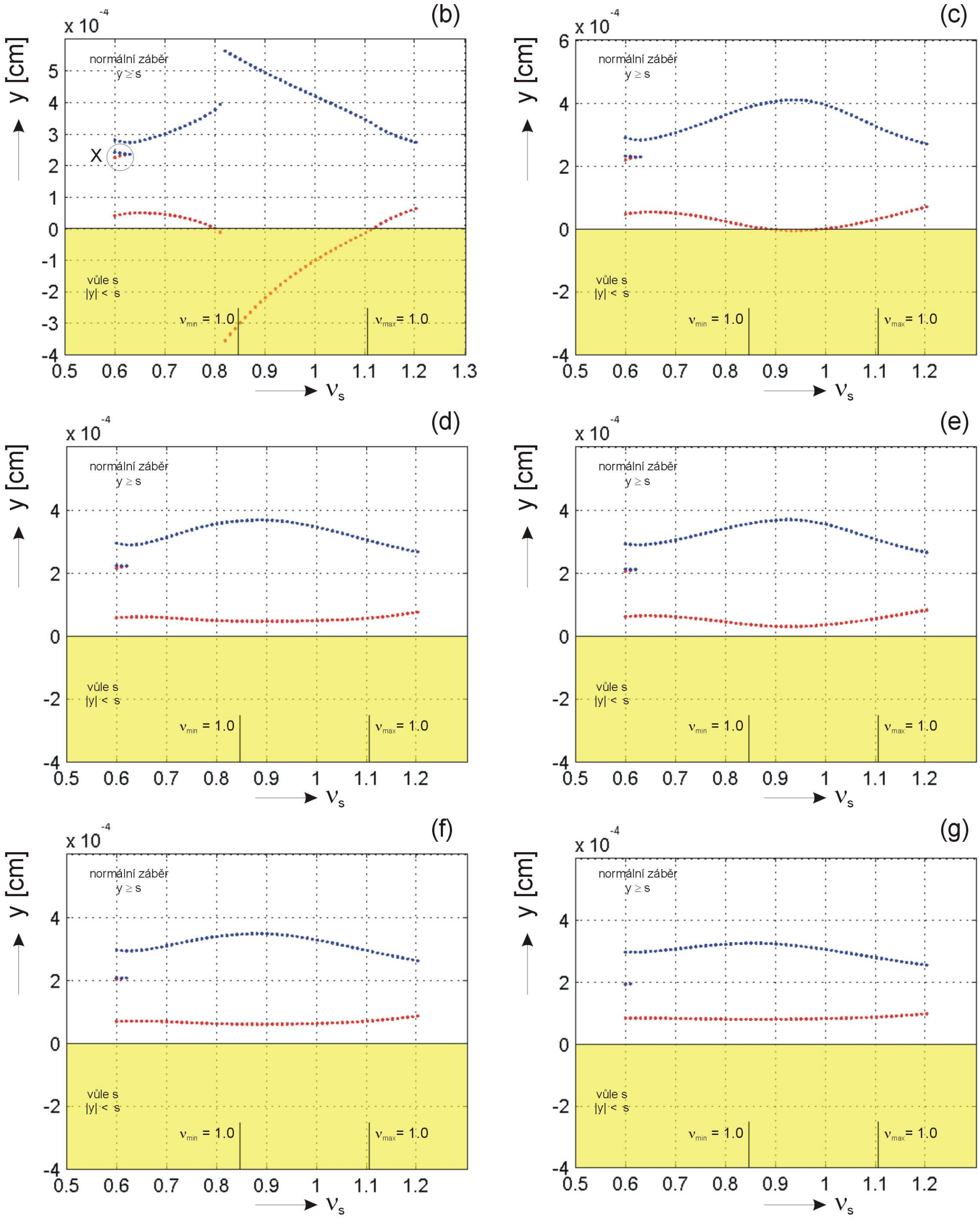
- tzv. **základní** tlumení (I.),
- tlumení 10x větší (II.) a
- tlumení 10x menší (III.).

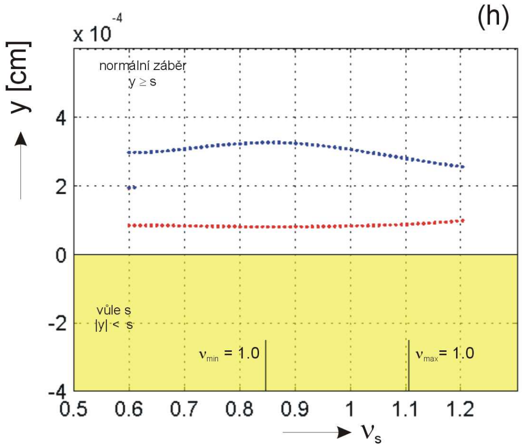
Obrázek obr.4 představuje pro základní tlumení kategorie I. rezonanční charakteristiky variantního lineárního tlumení (b) až po nelineární a kombinované při kombinacích tlumení (□), tj. dle Tab.1, při materiálovém tlumení $k_1 \neq 0, k_{2,3}, k_{1m,2m,3m} = 0$. Rezonanční charakteristiky ustáleného charakteru vykazují v okolí $\nu_s \approx 0.8$ ostrou skokovou nespojitost a v okolí $\nu_s \approx 0.6$ bifurkační oblast „X". Jejich vznik plyne ze smyčkového charakteru fázové roviny $\{y'(t); y(t)\}$. Zákonitost vzniku byla studována v [3]. Rázové jevy, tj. odskoky boků zubů s $y(t) < 0$ vykazují pouze varianty tlumení (b), (c). Ostatní variantní tlumení vykazují spojité rezonanční charakteristiky.

Ve srovnání s obr.4 vykazují průběhy s kombinacemi (•), tj. $k_{1m} \neq 0, k_{1,2,3}, k_{2m,3m} = 0$, viz obr.5, členitější průběhy se skokovými místy nespojitostí normálními i rázovými záběry a bifurkačními i ustálenými spojitými průběhy v celém oboru variantního tlumení (b) … (h). Varianta s kombinacemi tlumení v záběru (✕), tj. $k_1, k_{1m} \neq 0, k_{2,3}, k_{2m,3m} = 0$, s variantním tlumením (b) … (h) vykazuje kvalitativně i kvantitativně průběhy podobné průběhům z obr.4 s (□) v oblasti normálních záběrů, tj. s $y(t) \geq 0$, (d) … (h) v oblastech s výskytem rázových jevů (b), (c) se kvantitativně liší pouze málo.

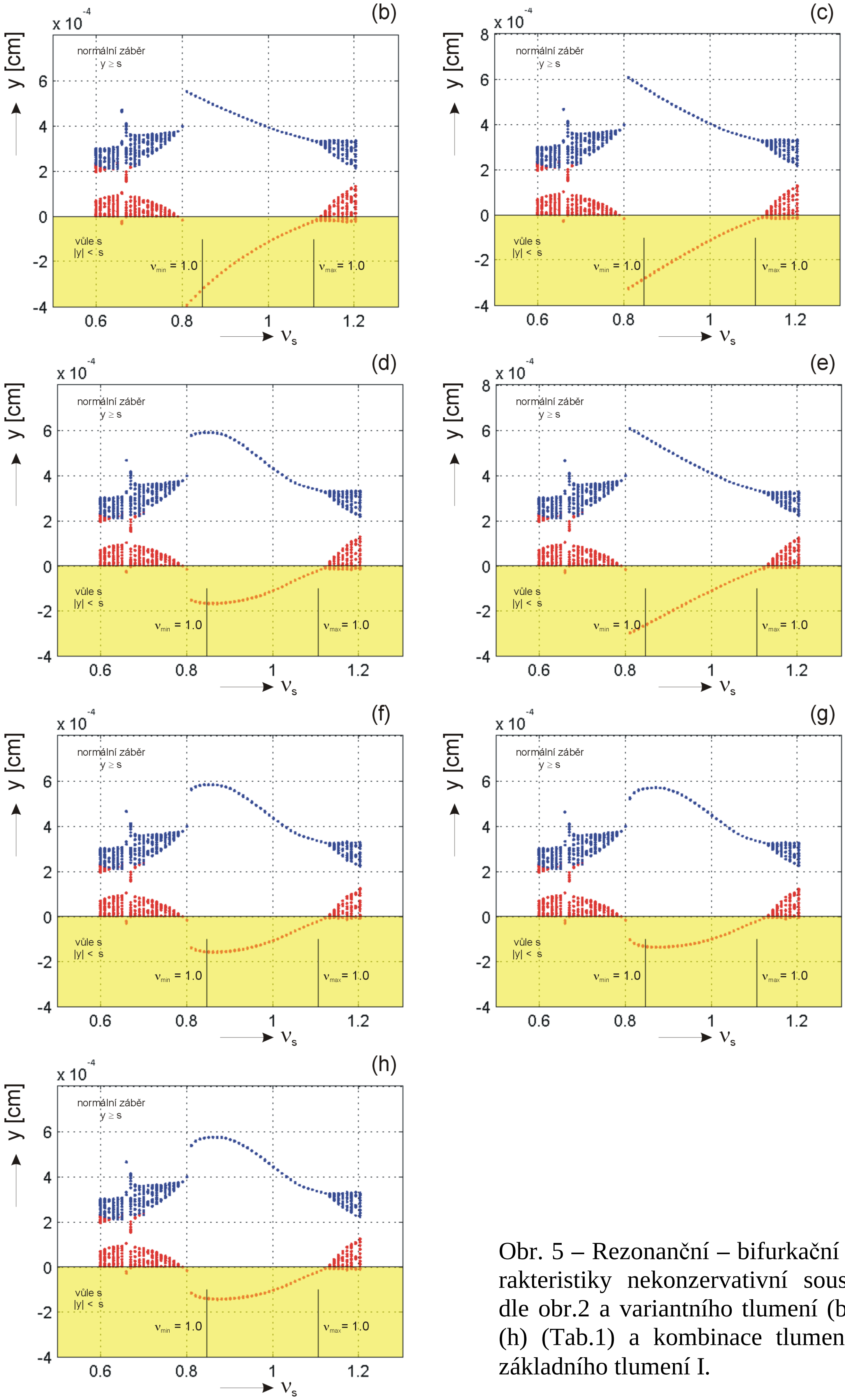
Porovnejme nyní průběhy v kategorii tlumicích parametrů II., tj. s 10x větším tlumením než v kategorii základní, tj. I. Průběhy v obr.6 variantního tlumení (b) … (h) s kombinací tlumení v záběru (□) jsou shodné s kombinací záběru (✕), tj. (□) =(✕), neboť průběhy v daných naladěních vykazují pouze záběr v normálních oblastech $y(t) \geq 0$, tlumení k_m v této fázi záběru se proto neuplatňuje. Rezonanční průběhy vykazují pouze ustálené spojité křivky.

Podobně jako průběhy rezonančních charakteristik v I. – základní kategorii tlumících parametrů s kombinací (•) v obr.5, vykazují charakteristiky v obr.7 v rezonančním rozsahu $\nu_s \in \langle 0.6; 1.2 \rangle$ kvalitativně podobné, tj. ustálené a bifurkační průběhy, kvantitativně se však liší, jsou menší.

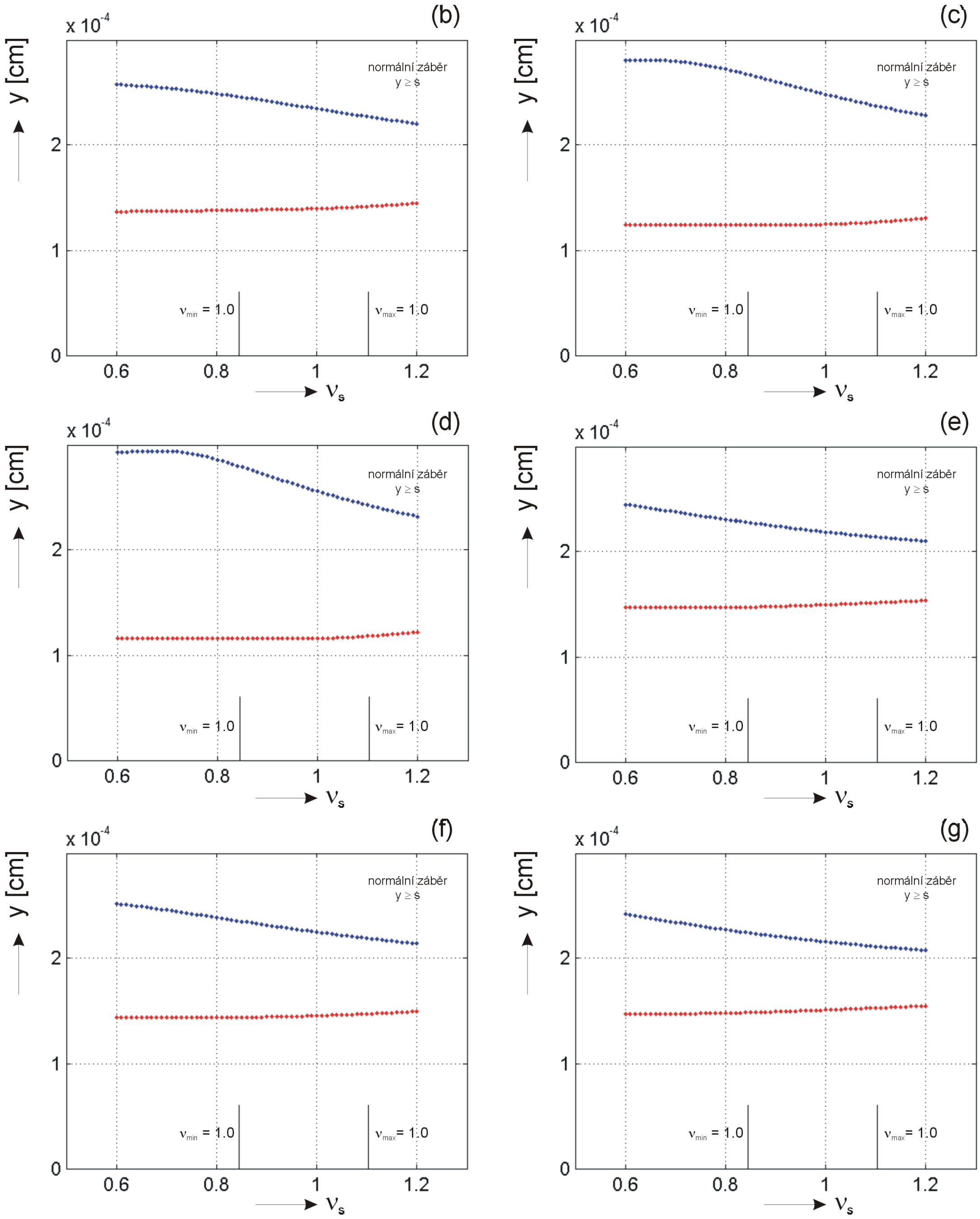


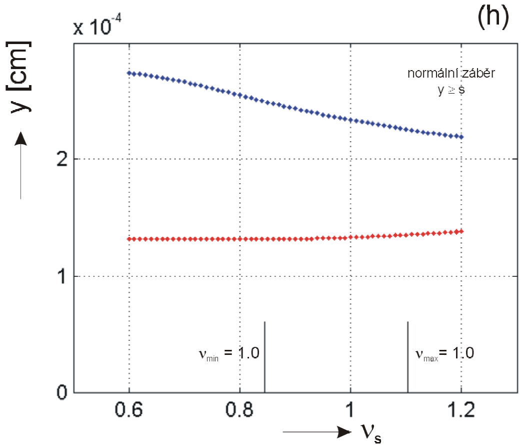


Obr. 4 – Rezonanční charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (□) základního tlumení I.

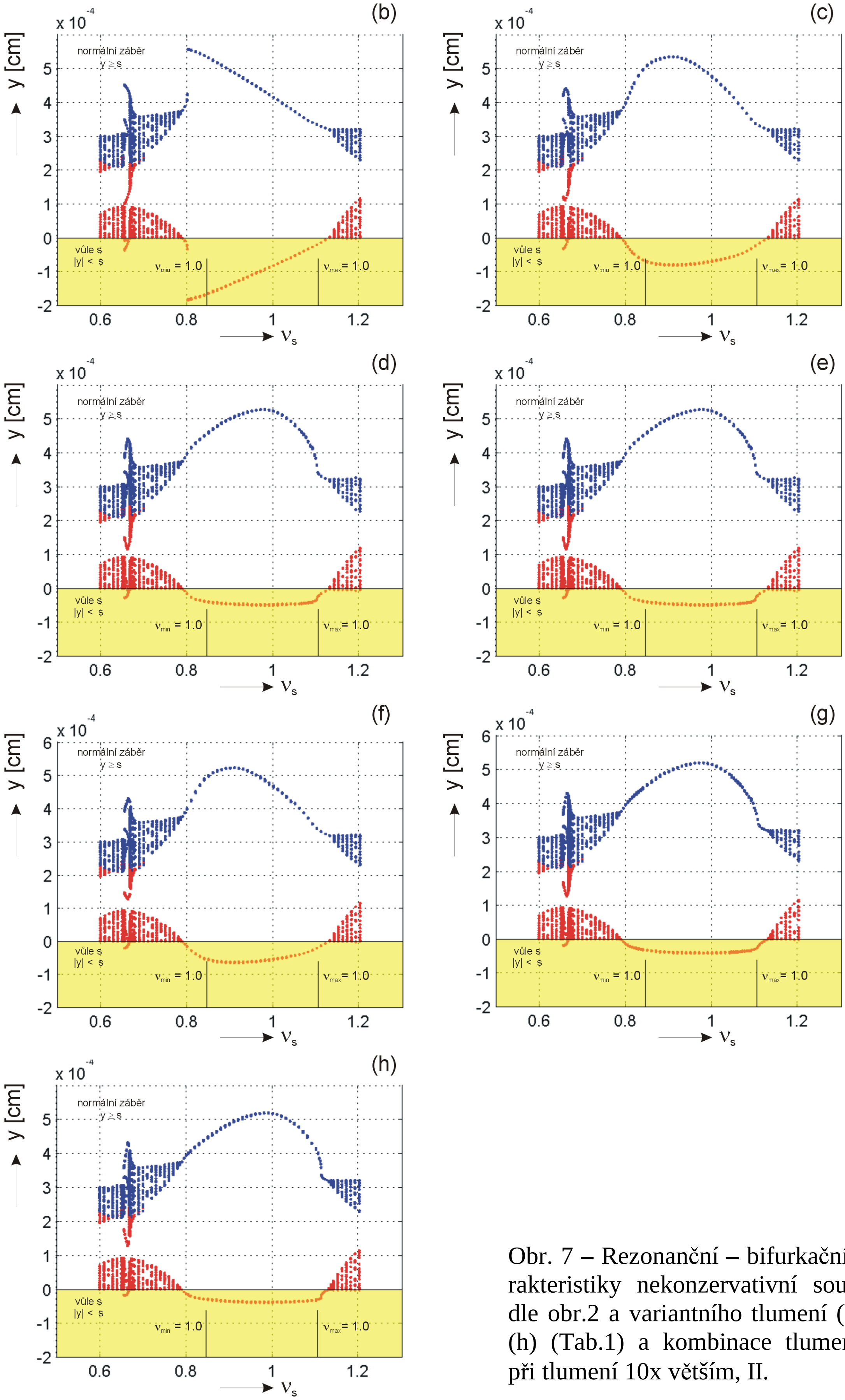


Obr. 5 – Rezonanční – bifurkační charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (•) základního tlumení I.

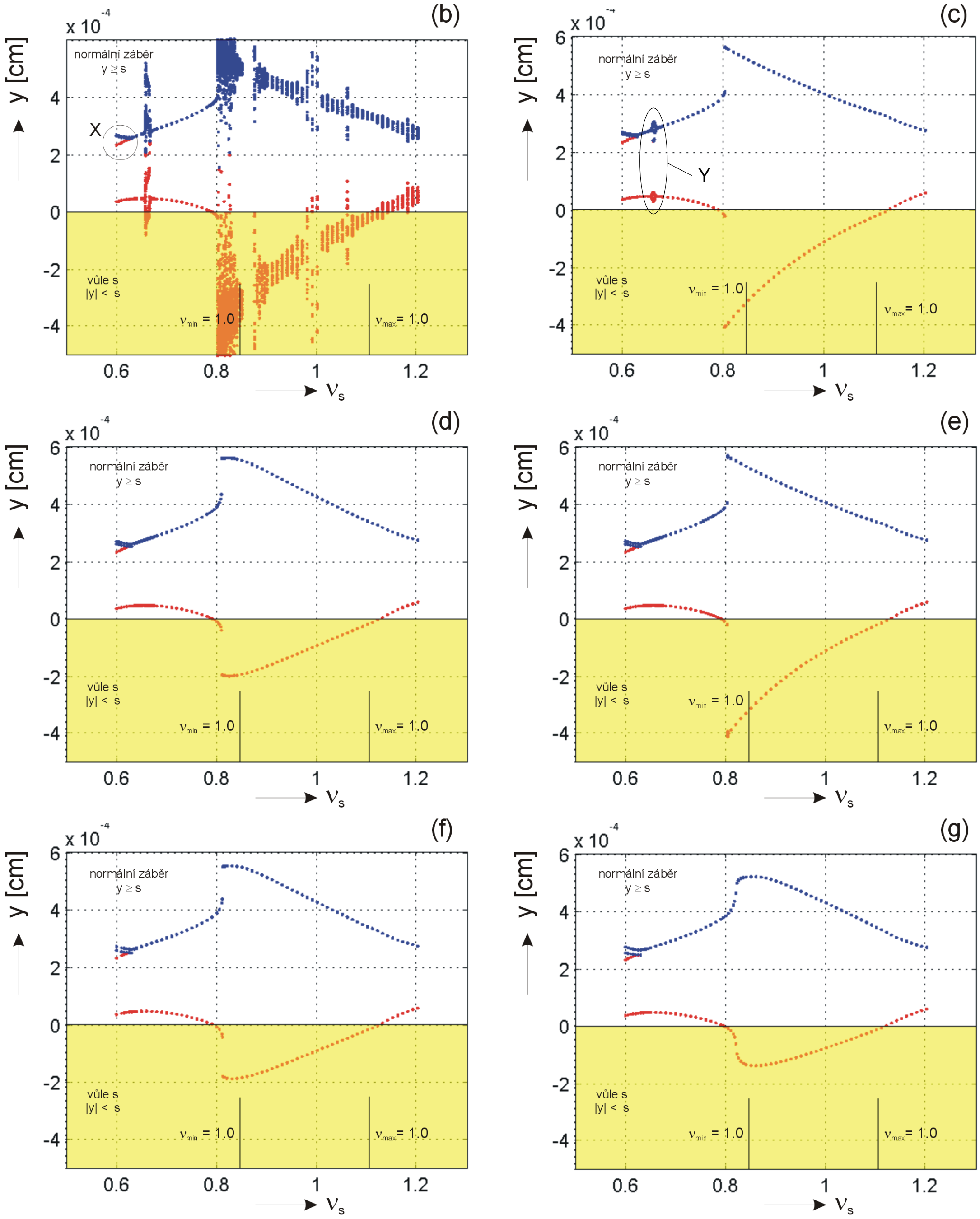


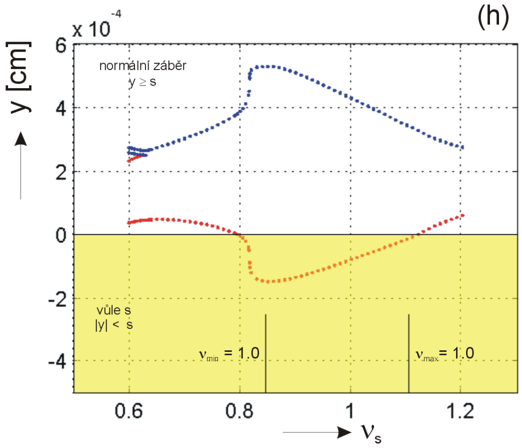


Obr. 6 – Rezonanční charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (□) = (×) při tlumení 10x větším, II.

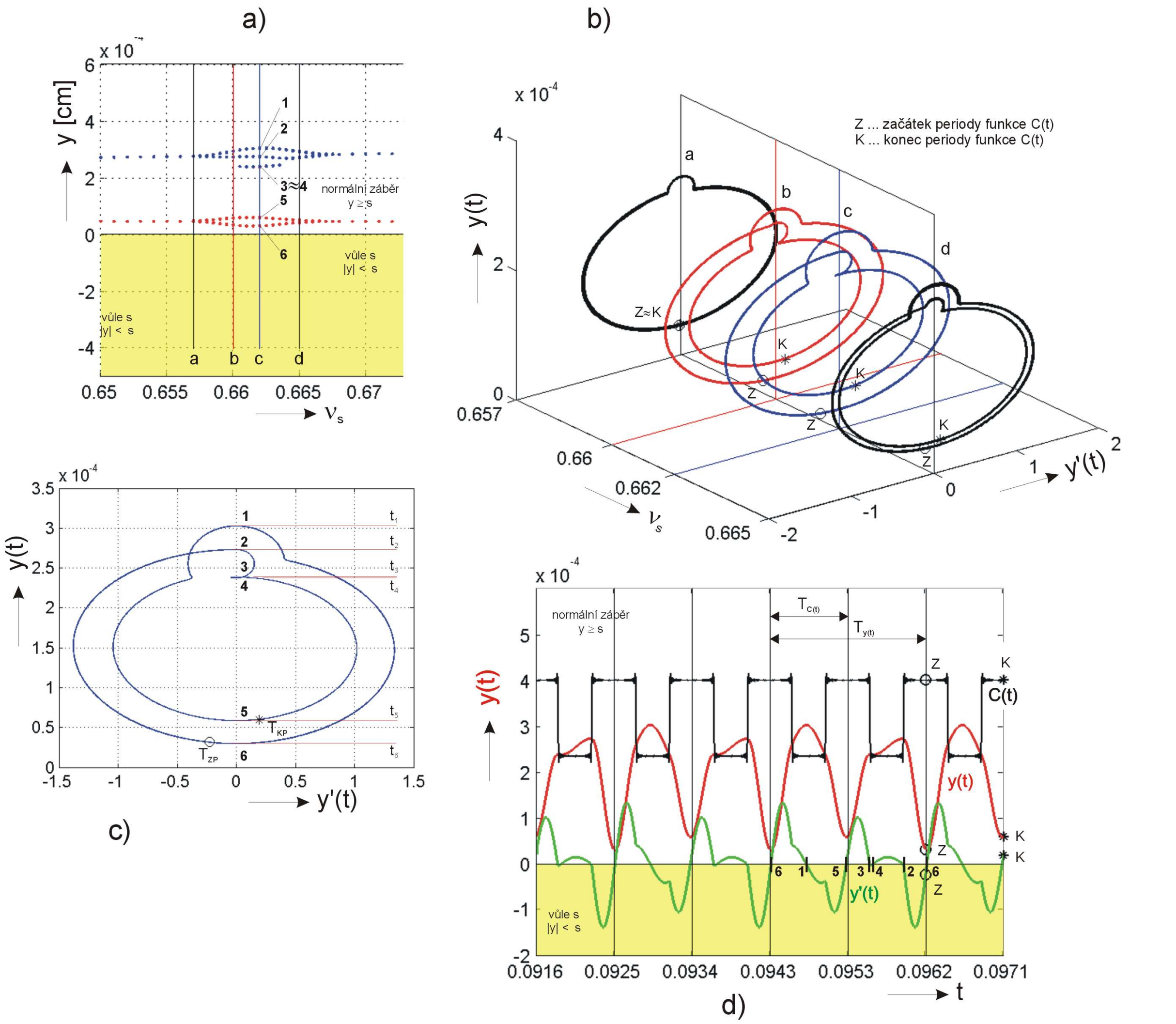


Obr. 7 – Rezonanční – bifurkační charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (•) při tlumení 10x větším, II.





Obr. 8 – Rezonanční – bifurkační charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (□) při tlumení 10x menším, III.

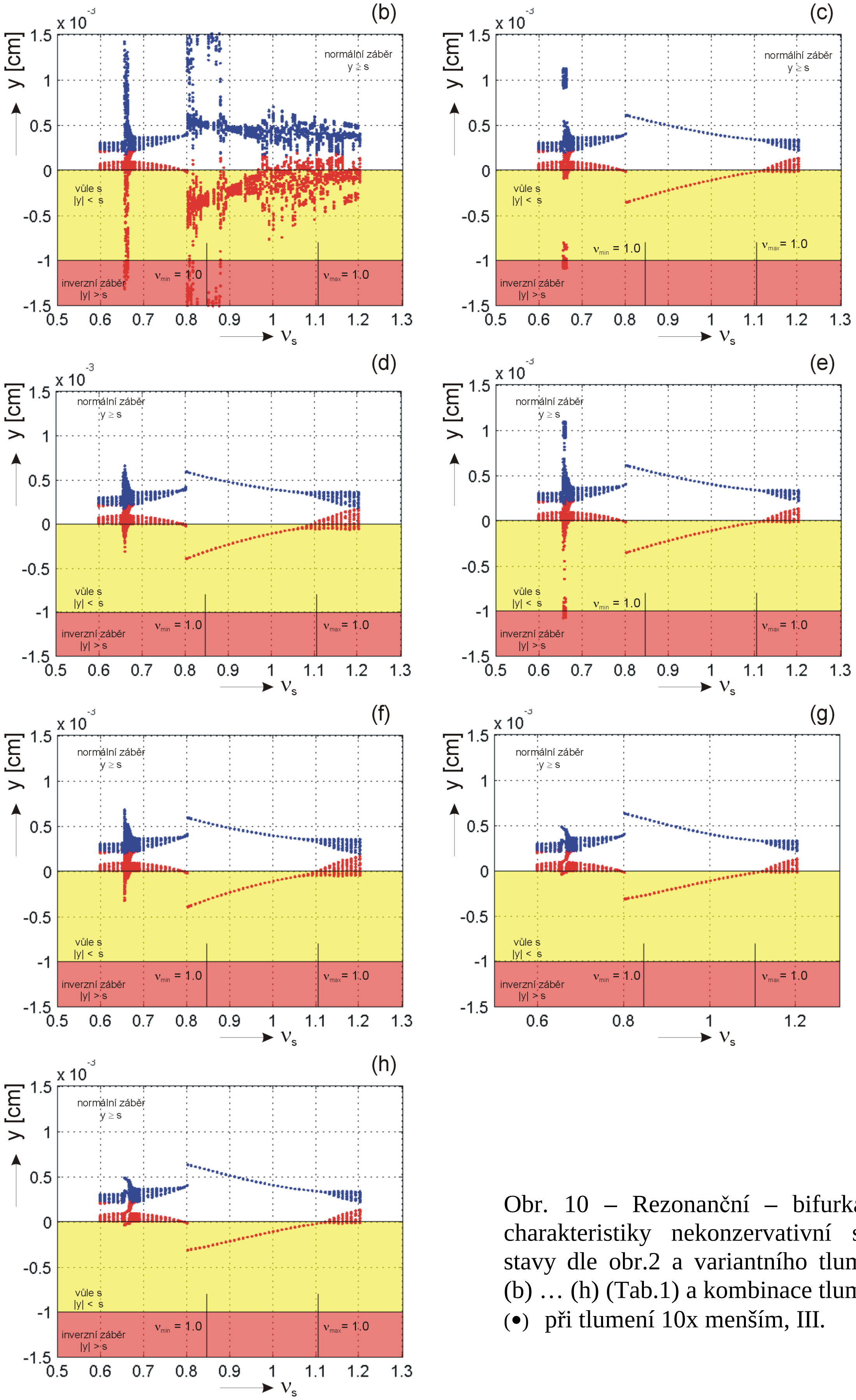


Obr. 9 – Ukázka detailu vzniku bifurkací rezonanční charakteristiky z obr.8 variantního tlumení (c) a kombinace (□) při tlumení 10x menším, III.

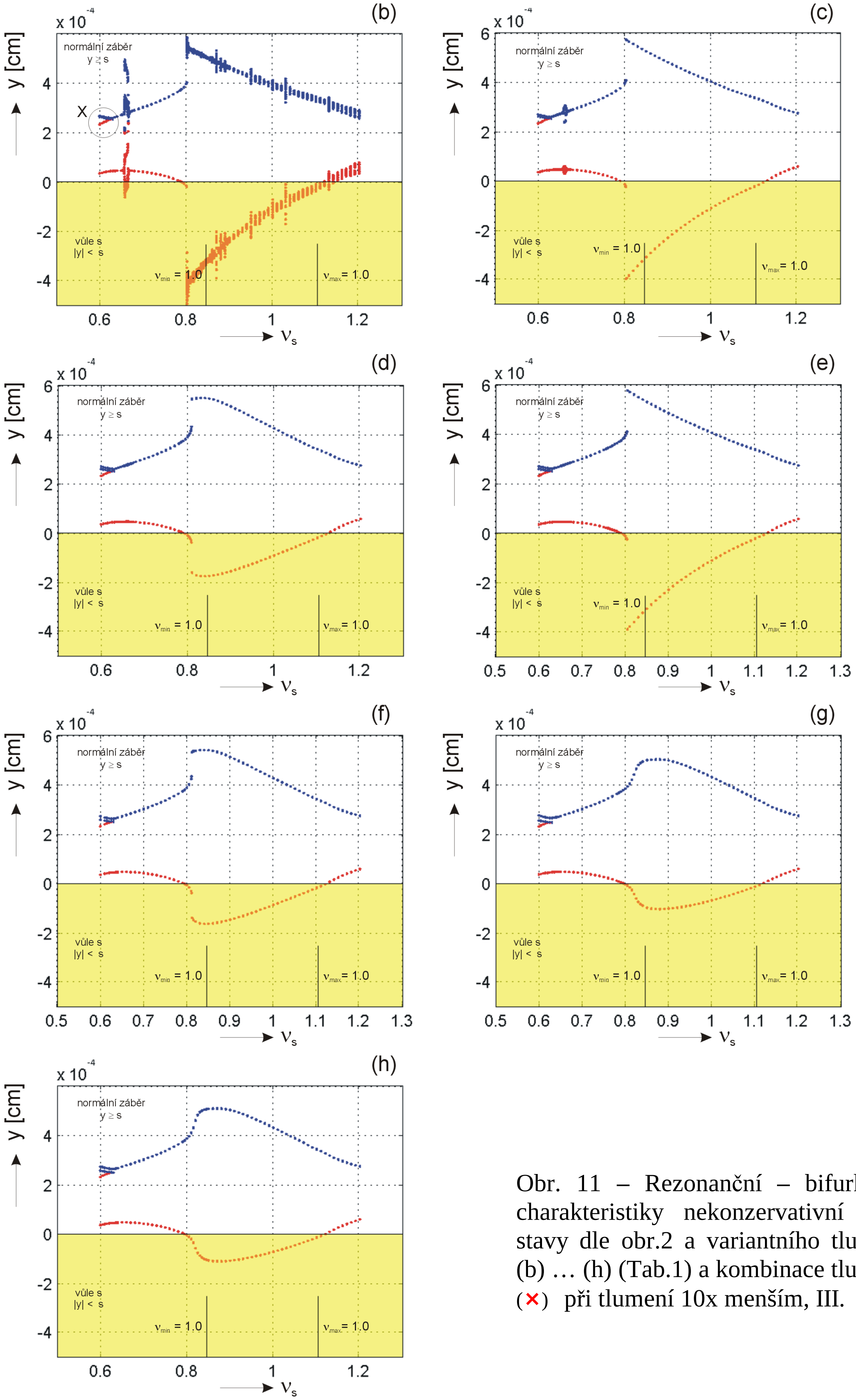
Podívejme se na závěr ještě na tlumení III.kategorie , tj. s parametry 10x menšími než jsou parametry tlumení kategorie I.

Z obr.8 je z důvodu stručnosti patrné, že jak kvalitativní, tak i kvantitativní vlastnosti rezonančních resp. bifurkačních charakteristik řešené soustavy ve zde daných frekvenčních oblastech, konvergují směrem k vlastnostem konzervativní soustavy. Jsou zde patrny všechny vlivy vlastností variantních tlumení z Tab.1.

Detailně se podívejme ještě jen ve variantním tlumení (c) na místo „Y“ nespojitosti divergentního spojitého průběhu rezonanční charakteristiky v rozmezí $\nu_s \in \langle 0.657;0.665 \rangle$. Toto místo „Y“ je patrné z obr.9, kde v divergentním ustáleném průběhu dochází k rozštěpení – bifurkaci na dvě a čtyři větve v různých frekvenčních rozsazích ν_s. Toto bifurkační místo „Y“ je vyznačeno v detailu obr.9a. Pro čtyři místa frekvenčního naladění ν_s, tj. a,b,c,d , je pak v obr.9b vyznačen fázový portrét $\{y'(t); y(t); \nu_s\}$ se čtyřmi fázovými rovinami. Z tvarů jejich průběhů je jasně vidět vznik a vývoj citovaných bifurkací. Bifurkační větev vznikne



Obr. 10 – Rezonanční – bifurkační charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (•) při tlumení 10x menším, III.



Obr. 11 – Rezonanční – bifurkační charakteristiky nekonzervativní soustavy dle obr.2 a variantního tlumení (b) … (h) (Tab.1) a kombinace tlumení (×) při tlumení 10x menším, III.

v místech, kde $\frac{d}{dy'(t)} f[y'(t), y(t)] = 0$, tj. tečna je rovnoběžná s osou $y'(t)$, viz fázová rovina $\{y'(t); y(t)\}$ řezu c s vyznačenými šesti rovnoběžnými tečnami $t_1,...,t_6$ s osou $y'(t)$, obr.9c.

V posledním vyobrazení obr.9d je vyznačen pro posledních 6 period $T_{C(t)}$ páté otáčky kol při počtu zubů $Z_{3,2} = 21$ časový průběh funkce tuhosti $C(t)$, relativního pohybu $y(t)$ a rychlosti $y'(t)$, kde perioda $y(t)$ a $y'(t)$ je zde rovna 2 periodám funkce $C(t)$, tj. $T_{y(t),y'(t)} = 2T_{C(t)}$.

Na posledních obrázcích obr.10 a obr.11 jsou vyneseny rezonanční resp. bifurkační průběhy variantních řešení (b) … (h) kombinací tlumení v záběru (•) a (✕) kategorie tlumení III.

4. Závěr

Z porovnání a analýzy průběhů rezonančních charakteristik všech kategorií tlumení I., II., III. a variantních tlumení včetně kombinací materiálového tlumení při normálním a inverzním záběru a tlumení viskózního v zubové mezeře při rázových dějích je patrná složitost a nutnost výzkumu vnitřní dynamiky nelineárních časově heteronomních převodových soustav s kinematickými vazbami pro zajištění jejich životnosti a spolehlivosti. To se týká převodových soustav jak obecně, zvláště pak planetových soustav v letecké technice, kde otáčky turbín dosahují v současnosti až 90 tisíc za minutu.

5. Poděkování

Tato studie byla vypracována v rámci grantového projektu GAČR, reg. č.101/07/0884 a výzkumného záměru AVOZ 20760514 Ústavu termomechaniky AV ČR, v.v.i. Praha.

6. Literatura

[1] Hortel, M Dynamika nelineární soustavy s kinematickými vazbami N AV ČR Praha, v tisku.

[2] Hortel, M., Škuderová, A.: Bifurkační charakteristiky v parametrických soustavách s kombinovaným lineárním a nelineárním tlumením. In Sborník „Dynamika strojů 2009“, Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i., Praha, ISBN 978-80-87012-16-1.

[3] Hortel, M., Kratochvíl, C., Škuderová, A., Houfek, L., Byrtus, M.: Parazitní jevy, bifurkace a chaos v převodových soustavách s ozubením. Monografie, ISBN 978-80-214-3758-2, vydání 1., Brno 2008.

[4] Hortel, M., Škuderová, A.: K sestavení matematicko-fyzikálního modelu silně nelineární pseudoplanetové soustavy se třemi dvojnásobnými satelity a k řešení jeho dynamických vlastností. I – Analýza pomocí integrodiferenciálních rovnic. II – Numerická analýza v prostředí MATLAB/Simulink. In monografie“ Analýza komplexních pohonových soustav. VUT Brno, vydání 1., ISBN 80-214-3206-3. Brno 2006.

[5] Škuderová, A.: K analýze vnitřní dynamiky silně nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami. Doktorská dizertační práce. ÚMT FSI VUT Brno, 2003.