

AN ALGORITHM FOR CORNER NODES SELECTION IN THE FETI-DP METHOD

J. Brož, J. Kruis ¹

Summary: This contribution deals with a selection algorithm of corner nodes in the FETI-DP method. Selection procedure is based on heuristic rules based on the topology of decomposed mesh. The algorithm selects minimal number of corner nodes. The number of corner nodes is possible increase by additional selection procedure. Efficiency of the proposed algorithms is presented on several numerical examples. Simultaneously, the behaviour of the FETI-DP method for various numbers of corner nodes is studied.

1. Úvod

Metody rozkladu oblasti na podoblasti jsou stále častěji používány v numerickém modelování v inženýrské a vědecké komunitě. Tyto metody řeší problémy s velkými nároky na počítačovou paměť a výpočetní čas, které vznikají při řešení rozsáhlých úloh. Metody rozkladu oblasti na podoblasti s sebou přináší možnost využití paralelních počítačů, které poskytují větší výpočetní výkon a rozsáhlejší paměť.

2. Metoda FETI-DP

Metoda FETI-DP (Dual-Primal Finite Element Tearing and Interconnecting) je jednou z metod rozkladu oblasti na podoblasti bez překryvu. Metodu FETI-DP publikoval v roce 2001 prof. Farhat se svými spolupracovníky v článku Farhat et al. (2001). Metoda byla vyvinuta kvůli obtížím se singulárními maticemi v původní metodě FETI a s komplikacemi spojenými s časově zavislými problémy s maticí hmotnosti či maticí kapacity.

Podmínky spojitosti na hranici mezi podoblastmi jsou zajištěny Lagrangeovými multiplikátory. Jsou zde však také tzv. rohové uzly, které zajišťují podmínky spojitosti. Definice rohových uzlů je pro pravidlenou síť, která je rozložena na pravidelné domény jednoduchá. Na druhou stranu nepravidelná síť rozložená pomocí programu pro rozklad sítě (např. METIS, <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>) vede k problémům s tím, které uzly sítě mají být vybrány jako rohové. Je třeba stanovit minimální počet rohových uzlů tak, aby matice

¹ Ing. Jaroslav Brož, doc. Ing. Jaroslav Kruis, Ph.D., Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague, Thákurova 7, 166 29 Prague 6, tel. +420 224 355 417, e-mail broz@cml.fsv.cvut.cz

podoblasti byly regulární. Teoreticky může být počet rohových uzelů roven počtu všech uzelů na hranici mezi podoblastmi.

Metoda FETI-DP zavádí dělení neznámých na dvě skupiny, na neznámé uvnitř podoblastí a na neznámé na hranicích podoblastí. Vnitřní neznámé jsou eliminovány a vzniká tak hrubý problém, který obsahuje pouze neznámé na hranicích podoblastí. Úpravy vedoucí k hrubému problému lze najít v Kruis, J. (2006). Hrubý problém má pak po upravách tvar

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{S}^{[cc]} & \mathbf{F}^{[cr]} \\ \mathbf{F}^{[rc]} & \mathbf{F}^{[rr]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{[c]} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde

- $\mathbf{d}^{[c]}$ je vektor obsahující neznámé definované v rohových uzlech
- $\boldsymbol{\lambda}$ je vektor obsahující neznámé definované na ostatních hraničních uzlech
- $\mathbf{S}^{[cc]}, \mathbf{F}^{[cr]}, \mathbf{F}^{[rc]}, \mathbf{F}^{[rr]}$ jsou jednotlivé bloky matice hrubého problému.

Z první rovnice (1) je možné obdržet vyjádření pro vektor $\mathbf{d}^{[c]}$ v následující formě

$$\mathbf{d}^{[c]} = -(\mathbf{S}^{[cc]})^{-1}(-\mathbf{s} - \mathbf{F}^{[cr]}\boldsymbol{\lambda}) \quad (2)$$

Po dosazení vyjádření pro vektor $\mathbf{d}^{[c]}$ z rovnice (2) do druhé rovnice ve vyjádření (1) plyne vztah

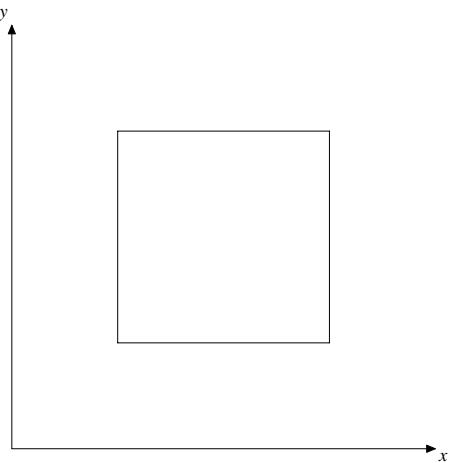
$$(\mathbf{F}^{[rr]} + \mathbf{F}^{[rc]} (\mathbf{S}^{[cc]})^{-1} \mathbf{F}^{[cr]}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g} - \mathbf{F}^{[rc]} (\mathbf{S}^{[cc]})^{-1} \mathbf{s}. \quad (3)$$

Více informací o metodě FETI-DP je možné nalézt v článku Farhat et al. (2001) a v knihách Kruis, J. (2006) a Toselli & Widlund (2005).

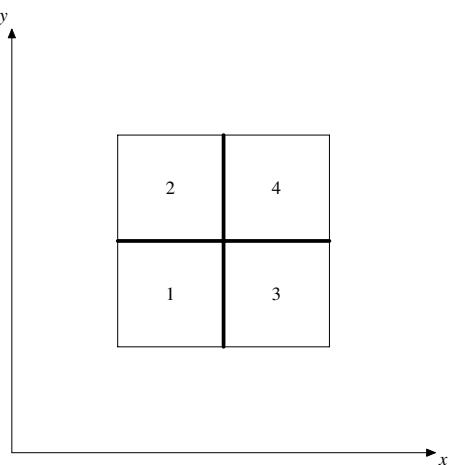
3. Algoritmus výběru rohových uzelů

Rohové uzly jsou vybírány pomocí algoritmu, který byl stanoven na základě heuristických pravidel, jež vycházejí ze znalosti topologie rozložené sítě. Určení rohových uzelů je založeno na tzv. uzlové multiplicitě. Uzlová multiplicita je definována jako počet podoblastí, na kterých daný uzel leží. Algoritmus vyhledává uzly, které mají vysokou uzlovou multiplicitu. Ty jsou pak označeny jako rohové uzly. Vybraný jsou též uzly, které mají pouze jeden sousední uzel se stejnou hodnotou uzlové multiplicity jakou mají ony a ostatní sousedé těchto uzelů jsou uvnitř podoblasti. Vzájemná vzdálenost mezi rohovými uzly zjištěná ze souřadnic je porovnána s velikostí podoblasti a uzly blízko sebe jsou ze seznamu rohových uzelů vymazány. Je též možné vybrat další rohové uzly pomocí přídavného algoritmu. Přídavný algoritmus je založen na definici hraničních křivek, které jsou definovány mezi dvěma rohovými uzly určenými pomocí uzlové multiplicity. Nové rohové uzly je možné přidat pomocí několika typů dodatečného výběru. Uzly je možné přidat do těžiště hraničních křivek, do n-tého uzel na hraniční křivce a nebo do n náhodně vybraných bodů na hraniční křivce.

Algoritmus výběru rohových uzelů bude popsán pomocí příkladu rozkladu čtvercové oblasti (viz obr. 1) na čtyři menší též čtvercové podoblasti (viz obr. 2). Podoblasti jsou diskretizovány pomocí čtyřúhelníkových konečných prvků (viz obr. 3). Algoritmus pro výběr rohových uzelů vybere uzly s největší hodnotou uzlové multiplicity. V uvedeném příkladu je to rohový uzel



Obrázek 1: Nerozložená oblast.

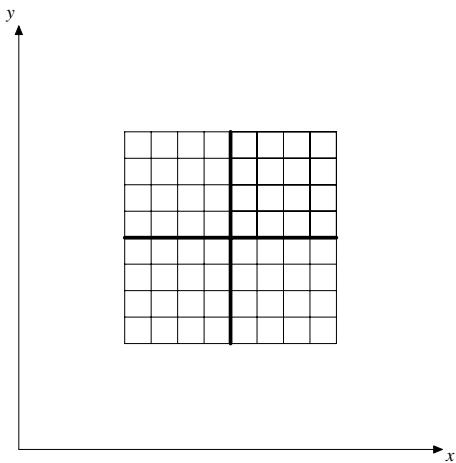


Obrázek 2: Rozložená oblast na čtyři menší podoblasti.

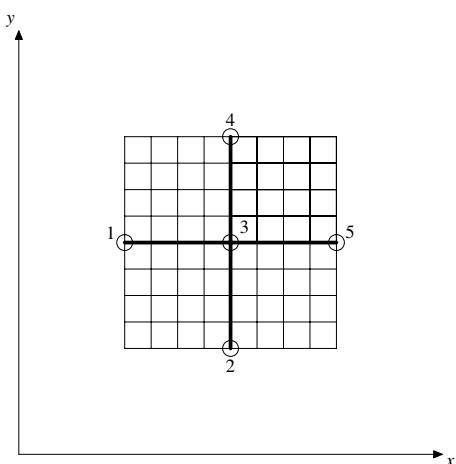
s číslem 3 (viz obr. 4), uzly 1, 2, 4, 5 jsou vybrány pomocí heuristického pravidla, které je součástí algoritmu pro výběr rohových uzlů.

V některých případech však může dojít k tomu, že minimální počet rohových uzlů vybraných pomocí základního algoritmu nestačí a je nutné definovat přidané rohové uzly. Je-li hraniční křivka dlouhá, může dojít k velké deformaci hranice mezi podoblastmi (viz obr. 5) a zavedení rovnováhy pomocí Lagrangeových multiplikátrů je náročné na počet iterací v hrubém problému. Z toho důvodu je vhodné definovat další rohové uzly. V uvedeném příkladu jsou vybrány uzly v těžišti hraničních křivek (viz obr.6). Po zavedení dodatečných rohových uzlů se deformace hranice zmenší (viz obr.7) a tím se sníží počet iterací.

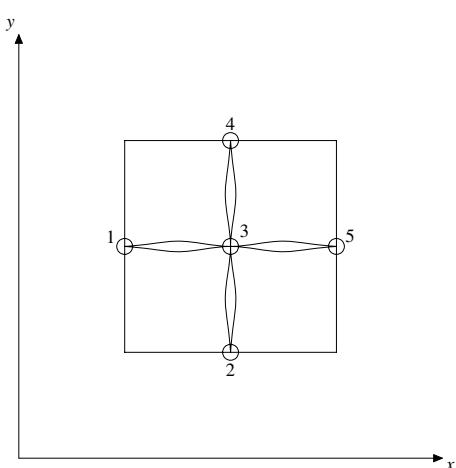
Algoritmus pro výběr rohových uzlů lze použít pro jakoukoliv topologii sítě. Algoritmus nelze použít pro hybridní sítě, tj. sítě s různými typy konečných prvků (např. čtyřstěnný a šestištěnný prvek).



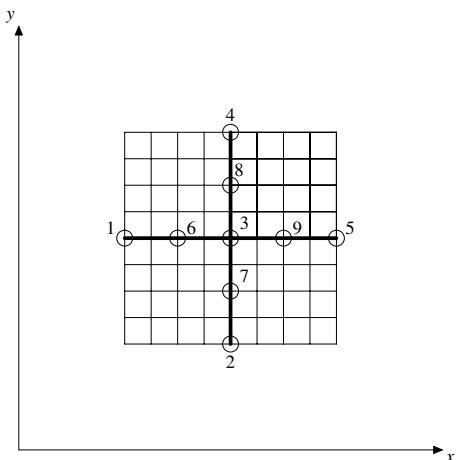
Obrázek 3: Diskretizované podoblasti konečnými prvky.



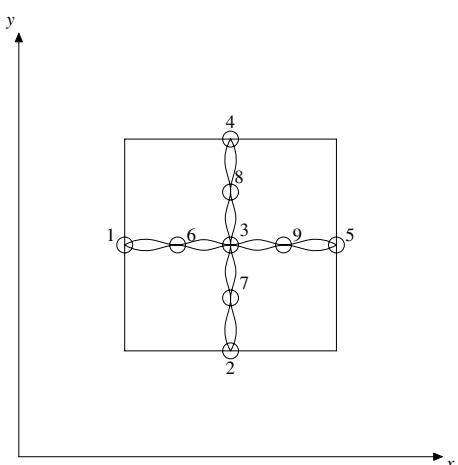
Obrázek 4: Vyznačené rohové uzly (pomocí kroužků).



Obrázek 5: Oddálení podoblastí „sepnutých“ rohovými uzly.



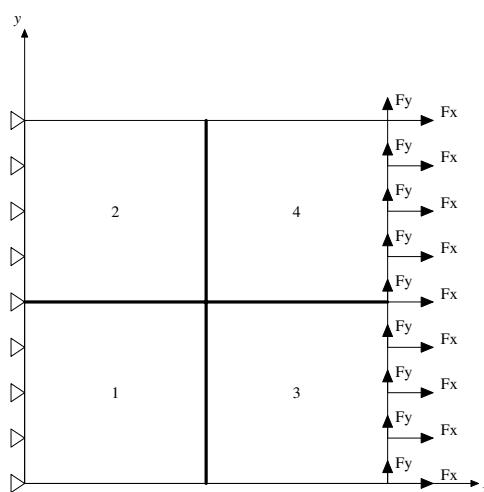
Obrázek 6: Přidané rohové uzly do těžišť hraničních křivek.



Obrázek 7: Oddálení podoblastí po „sepnutí“ přidanými rohovými uzly.

4. Numerické experimenty

Metoda FETI-DP a navrhovaný algoritmus výběru rohových uzlů jsou implementovány v programu SIFEL (<http://cml.fsv.cvut.cz/~sifel>). Pro numerické experimenty byla zvolena pravidelná čtvercová oblast. Tato oblast byla rozdělena na čtyři menší čtvercové podoblasti. Podoblasti byly diskretizovány pomocí čtyřúhleníkových konečných prvků se dvěma stupni volnosti v jednom uzlu a různou velikostí sítě na podoblastech (100x100, 200x200 a 300x300 prvků). Ve výpočtu byla uvažována lineární elasticita a rovinná napjatost. V nulových x-ových souřadnicích byly předepsány dirichletovské okrajové podmínky a v maximálních hodnotách x-ových souřadnic bylo předepsáno uzlové zatížení ve směru os x a y (viz obr. 8).



Obrázek 8: Okrajové podmínky pro výpočet - numerické testy.

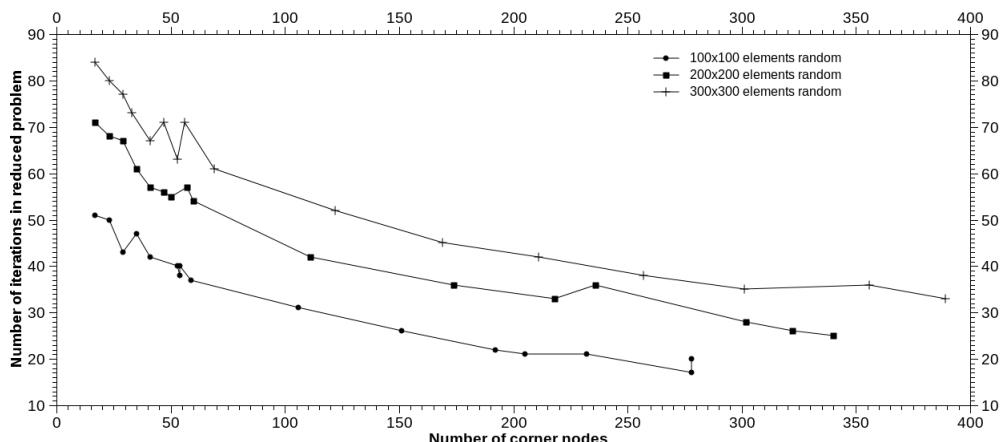
V prvním kroku testování byl pro testovací úlohy vybrán pouze minimální počet rohových uzlů a to pomocí základního algoritmu založeného na uzlové multiplicitě. Ve druhém kroku testování byl použit i algoritmus pro dodatečný výběr rohových uzlů. Dodatečné rohové uzly byly přidány do těžišť hraničních křivek. Při využití této možnosti došlo pro všechny uvažované úlohy ke snížení počtu iterací v hrubém problému zhruba o deset procent oproti úloze s minimálním počtem rohových uzlů (viz tab. 1). Také došlo ke snížení doby řešení hrubého problému. V tab. 1 je použito následující označení:

- NN - celkový počet uzlů
- NCN - celkový počet rohových uzlů
- NBN - celkový počet uzlů na hranici
- NI - počet iterací v redukovaném problému
- Čas - čas řešení redukovaného problému
- min - vybrán pouze minimální počet rohových uzlů pomocí základního algoritmu
- centroid - dodatečně přidané uzly do těžišť hraničních křivek

Tabulka 1: Výsledky výpočtu pro minimální počet rohových uzlů a pro dodatečné uzly v těžišti hraniční křivky.

Síť	NN	NCN		NBN		NI		Čas [s]	
		min	centroid	min	centroid	min	centroid	min	centroid
100x100	40401	5	9	396	392	68	59	7	6
200x200	160801	5	9	796	792	89	76	66	57
300x300	361201	5	9	1196	1192	105	92	256	228

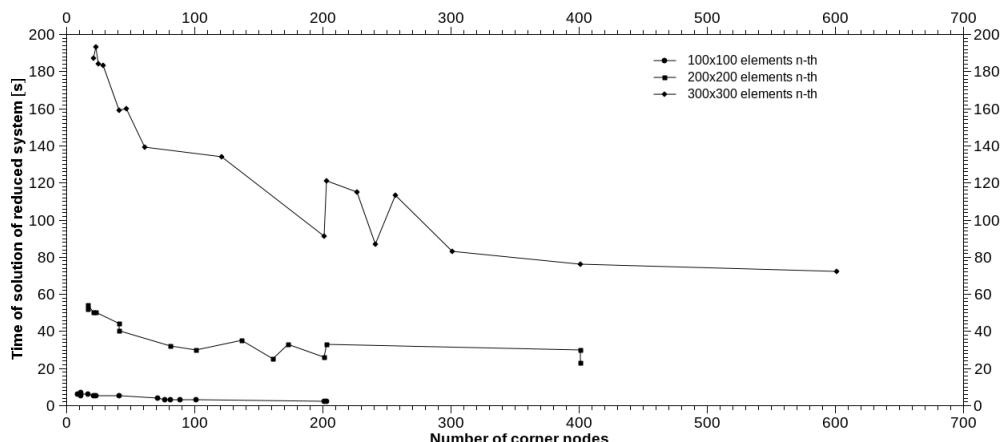
Ve třetím kroku testování byly na hraničních křivkách vybírány n-té uzly pro n od 2 do 10 a pak pro 20, 30, 40, 50, 60, 70 a 80. Výsledky těchto výpočtů shrnují grafy na obr. 9, 10 a 11. Z grafů na obr. 9 je možné zjistit, že přidáváním rohových uzlů lze významným způsobem snížit počet iterací a z grafů na obr. 10 lze vypozorovat snížení doby řešení redukovaného problému. Z grafů na obr. 11 je však patrné, že po počátečním snížení celkové doby řešení problému dochází k nárůstu času nutného pro celkové řešení. To je způsobeno zvětšením bloku $S^{[cc]}$ v matici hrubého problému. V případě minimálního počtu rohových uzlů, který je roven pro tuto úlohu pěti, má blok $S^{[cc]}$ ve výrazu (1) velikost 10x10. V případě výběru každého pátého uzlu na hraniční křivce roven počet rohových uzlů hodnotě 241 pro síť 300x300 prvků a velikost bloku $S^{[cc]}$ ve výrazu (1) je 482 a rozklad tohoto bloku trvá mnohem delší dobu než pro blok o velikosti 10x10. Z tohoto pohledu se jeví jako optimální menší počet rohových uzlů (např. každý 30., 40. uzel ležící na hraniční křivce).



Obrázek 9: Počet iterací v závislosti na počtu rohových uzlů - vybrán dodatečně každý n-tý.

Ve čtvrtém kroku testování byly na hraničních křivkách vybírány uzly v náhodných pozicích a to pro 2 - 10 uzlů, 20, 30, 40, 50, 60, 70 a 80 uzlů. Výsledky těchto výpočtů shrnují grafy na obr. 12, 13 a 14. Z grafů je opět možné vypozorovat, že s narůstajícím počtem rohových uzlů klesá počet iterací a čas řešení redukovaného problému. Ovšem obdobně jako v předchozím případě po počátečním snížení celkové doby řešení problému dochází k jejímu nárůstu pro velký počet rohových uzlů. V tomto případě se jeví jako optimální na hraniční křivku umístit pouze malý počet náhodně umístěných rohových uzlů (např. 2 - 10).

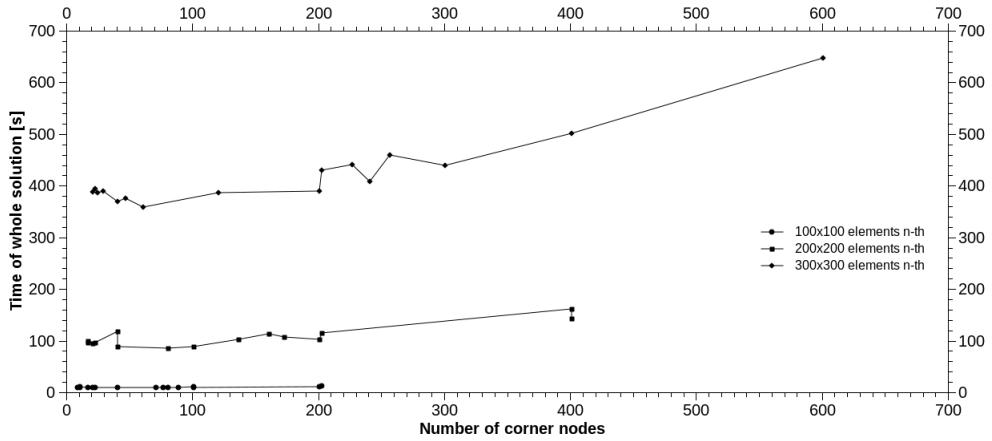
V pátém kroku testování byla pravidelná čtvercová oblast rozložena pomocí programu ME-



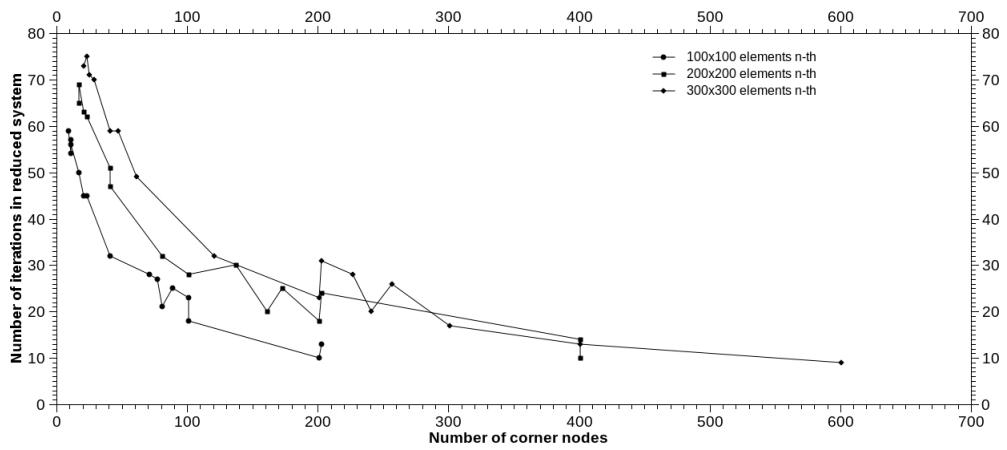
Obrázek 10: Čas řešení redukovaného problému v závislosti na počtu rohových uzelů - vybrán dodatečně každý n-tý.

TIS na devět podoblastí (viz obr. 15). Všech devět podoblastí mělo nepravidelný tvar. Nejdříve byl vybrán pouze minimální počet rohových uzelů, poté byly dodatečně vybrány uzly v těžištích hraničních křivek, každý 5., 10., 15., 20. a 25. uzel na hraniční křivce a nakonec 5, 10, 15, 20 a 25 náhodně vybraných uzelů na hraniční křivce. Výsledky tohoto testu jsou shrnutы v grafech na obr. 16 a v tab. 2. Opět došlo s nárůstem počtu rohových uzelů ke snížení počtu iterací, jak je patrné z grafů na obr. 16. V tabulce 2 je použito následující označení:

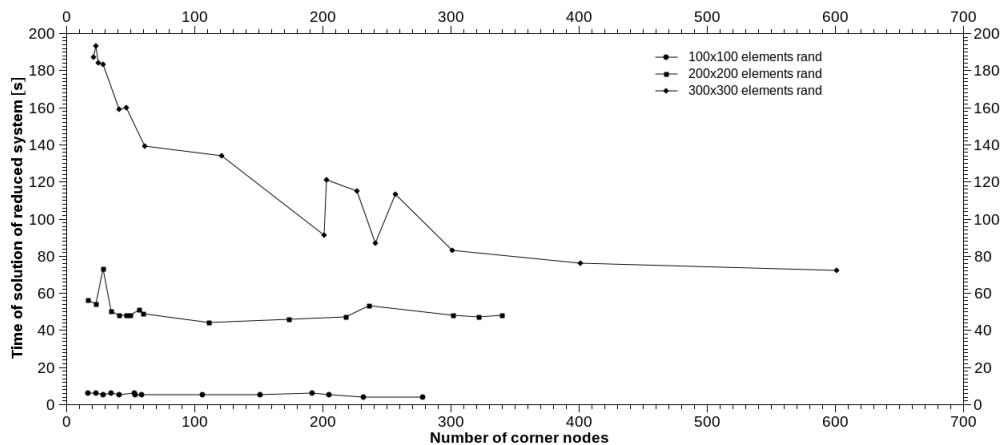
- NI - počet iterací v redukovaném problému
- NCN - celkový počet rohových uzelů
- NBN - celkový počet uzelů na hranici
- min - minimální počet uzelů
- centroid - dodatečně přidané uzly do těžišť hraničních křivek
- rand 5 - dodatečně náhodně vybraných 5 uzelů na hraniční křivce
- n-th 5 - dodatečně vybraný každý 5. uzel na hraniční křivce



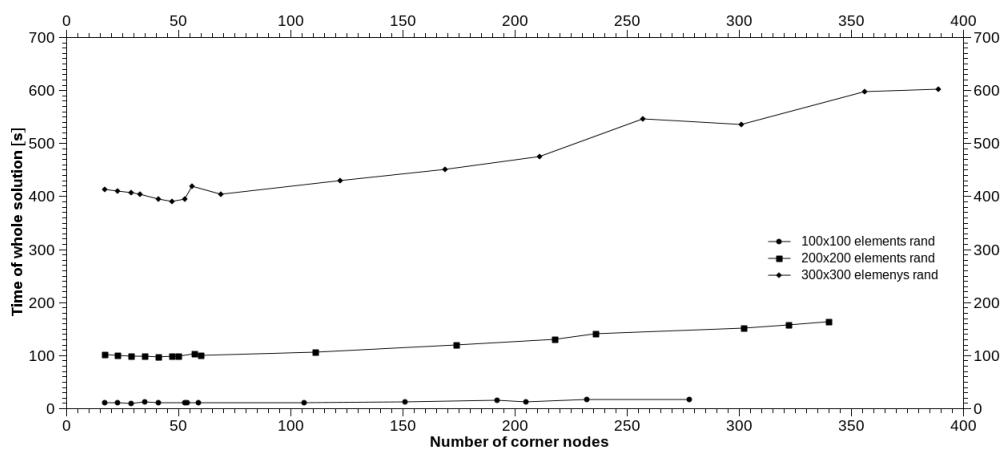
Obrázek 11: Celkový čas řešení problému v závislosti na počtu rohových uzlů - vybrán do datečně každý n-tý.



Obrázek 12: Počet iterací v závislosti na počtu rohových uzlů - n uzlů - náhodně vybrané pozice.



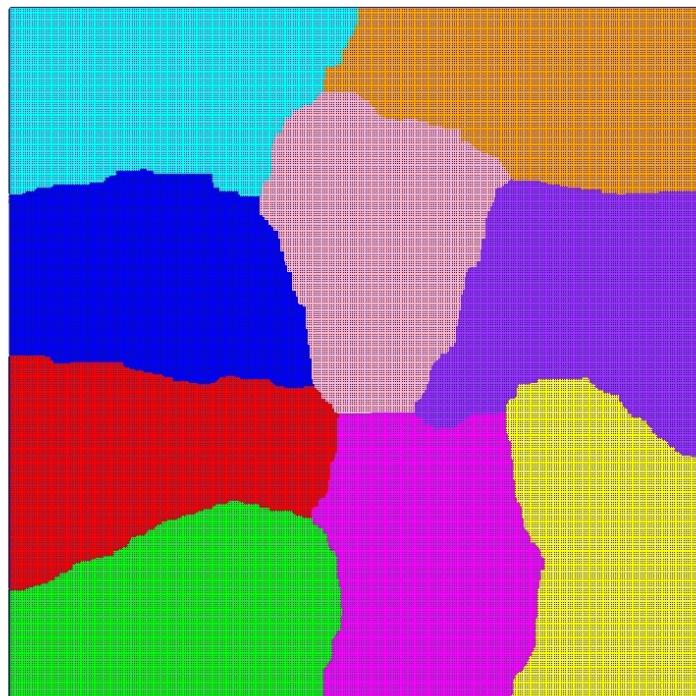
Obrázek 13: Čas řešení redukovaného problému v závislosti na počtu rohových uzlů - n uzlů - náhodně vybrané pozice.



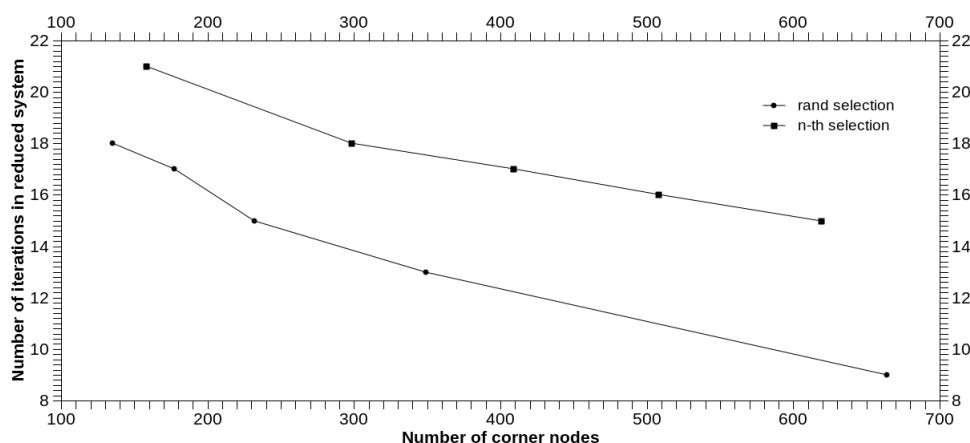
Obrázek 14: Celkový čas řešení problému v závislosti na počtu rohových uzlů - n uzlů - náhodně vybrané pozice.

Tabulka 2: Výsledky výpočtu pro nepravidelnou síť.

Metoda	NI	NCN	NBN
min	32	16	2127
centroid	31	32	2111
rand 5	21	158	1985
rand 10	18	298	1845
rand 15	17	409	1734
rand 20	16	508	1635
rand 25	15	619	1524
n-th 5	9	664	1479
n-th 10	13	349	1794
n-th 15	15	232	1911
n-th 20	17	177	1966
n-th 25	18	135	2008



Obrázek 15: Pravidelná čtvercová oblast rozložená na 9 nepravidelných podoblastí.



Obrázek 16: Počet iterací v závislosti na počtu rohových uzlů - nepravidelná síť na podoblastech.

5. Závěr

Navrhovaný algoritmus umožňuje vybrat minimální počet rohových uzlů. Umožňuje také zahuštění počtu rohových uzlů na základě různých kriterií. Výsledky ukazují, že přidáním rohových uzlů dochází ke snížení počtu itrací a doby řešení hrubého problému. Je však nutné uvážit vhodný počet přidaných uzlů. V případě jejich velkého počtu na jedné podoblasti dochází k prodloužení doby nutné pro kondenzaci matice tuhosti podoblasti a výsledná doba výpočtu se prodlužuje. Jako optimální se jeví přidání rohových uzlů do těžiště hraničních křivek a nebo malého počtu uzlů (např. každý 10., 20. uzel na hraniční křivce) na hraniční křivku.

6. Poděkování

Tento příspěvek vznikl za finanční podpory grantu GA ČR číslo 103/09/H078.

7. Reference

- Farhat, C., Lesoinne, M., LeTallec, P., Pierson, K. & Rixen, D. (2001): FETI-DP A dual-primal unified feti method-part I: Faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 1523–1544.
- Kruis, J. (2006): *Domain Decomposition Methods for Distributed Computing*. Saxe-Coburg publications, Kipen, Strling, Scotland, first edition.
- Toselli, A. & Widlund, O. (2005) *Domain Decomposition Methods - Algorithms and Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, first edition.