

## LOADING PROCESSES WITH VARIOUS SPECTRAL PROPERTIES FOR FATIGUE TESTS

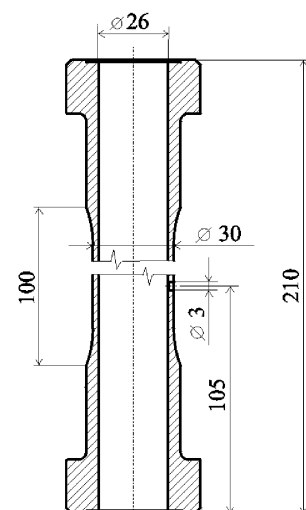
M. Balda <sup>1</sup>

**Summary:** *The paper describes methods used for generating of Gaussian processes with prescribed spectral densities and their implementation on electro-hydraulic testing machines for combined loading. Tube specimens were loaded by random forces and in torque by different processes. Since the machine does not interpret input processes precisely, the actual processes were measured, iterated and processed into a complex damaging stress and its spectral properties.*

### 1. Úvod

Zatímco až donedávna měla většina úloh v mechanice deterministický charakter, objevují se v poslední době stále častěji problémy, u nichž se vyskytuje potřeba pracovat s náhodnými vlastnostmi vyšetřovaných objektů a s náhodným, na ně působícím okolím. To nás ani neudivuje, uvědomíme-li si, že každý reálný objekt je individuální ve smyslu materiálu, výroby, montáže i zatěžování při jeho konkrétním nasazení v provozu. To vše má za následek rozdílné čerpání životnosti objektu vlivem kumulace poškození, které může vést k poruchám až haváriím. Je proto důležité mít k dispozici nástroje, jimiž lze celou problematiku studovat a postupně zvládnout, aby nově navrhované stroje a zařízení byly spolehlivé a vykazovaly zaručenou životnost.

V literatuře se uvádí, že valná většina poruch mechanických objektů je vyvolána únavovým poškozením často v součinnosti s dalšími působeními jako jsou koroze, vysoké teploty, otěr, záření a pod. Únavové poškození je vyvoláváno působením proměnlivých sil a momentů působících na mechanický objekt za provozních podmínek. Velmi často je toto působení náhodné, jehož následkem vznikají v zatěžovaných součástech objektu namáhání s náhodným charakterem. Ta jsou charakterizována svými rozděleními a výkonovými spektrálními hustotami. Vyšetřováním vlivu spektrálních vlastností napjatosti se zabýval již v polovině minulého století Creede, který výsledky svých prací uveřejnil v dnes již klasické sbírce vědeckých prací o náhodném kmitání (Crandall, 1963). Jinou práci založenou opět na analýze vlivu výkonové spektrální hustoty na únavovou životnost, která byla i u nás často citována, publikoval Rajcher koncem 60. let (Rajcher, 1969).



Obrázek 1. Trubka

<sup>1</sup> Prof. Ing. Miroslav Balda, DrSc., Institute of Thermomechanics ASCR v.v.i. - CDM, Veveřská 11, Plzeň, tel.: +420 377 236 415, e-mail: balda@cdm.cas.cz

Již před řadou let jsme testovali vliv procesů o výkonových spektrálních hustotách na vrubovaných plochých vzorcích v režimu jednoosého zatěžování v tahu-tlaku (Svoboda, Václavík a Balda, 2000). Tehdejší výsledky ukázaly, že lze s přijatelnou chybou odhadovat únavové životnosti zatěžovaných částí. Od té doby se zlepšila experimentální technika i metodika zkoušení, a proto se k dané úloze vracíme s podstatně složitějším problémem, totiž analýzou vlivu výkonových spektrálních hustot složek kombinovaného namáhání na únavovou životnost trubkových zkušebních těles podle obrázku 1. Problém se nyní řeší jak teoreticky na FS ČVUT v Praze, tak i experimentálně na plzeňském pracovišti Ústavu termomechaniky AVČR v.v.i.

## 2. Generování normálního procesu s požadovanou výkonovou spektrální hustotou

Základním problémem experimentálního výzkumu věnovaného vlivu výkonové spektrální hustoty na únavovou životnost je schopnost vytvořit pseudonáhodný proces s požadovanými charakteristikami, tj. hustotou pravděpodobnosti rozložení hodnot jeho vzorků a výkonovou spektrální hustotou.

At' proces  $x(t)$  je odzorkován periodou  $T$  [s], tj. vzorkovací frekvencí  $f_s = 1/T$ . Výsledkem je časová řada vyjádřená sloupcovým vektorem  $\mathbf{x}_T = \{x(kT)\}$  pro  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Diskrétní konečnou Fourierovou transformací vektoru  $\mathbf{x}_T$  dostaneme sloupcový vektor obrazů  $\mathbf{x}_f = \text{DFT}(\mathbf{x}_T) = \{x(n\Delta f)\}$ , kde  $n = 0, 1, \dots, N-1$  a  $\Delta f = f_s/N$ . Diskrétní výkonová spektrální hustota vzorkovaného procesu je střední hodnotou množiny periodogramů, tedy

$$S_{xx}(n\Delta f) = E \{x^C(n\Delta f) x(n\Delta f)\} = E \{x_f^C x_f\}. \quad (1)$$

Je-li obecně  $x_f = \text{Re } x_f + i \text{Im } x_f$ , je  $x_f^C$  k němu komplexně sdružené, tedy  $x_f^C = \text{Re } x_f - i \text{Im } x_f$ . Je tedy zřejmé, že

$$S_{xx}(n\Delta f) = E \{ \text{Re}^2 x(n\Delta f) + \text{Im}^2 x(n\Delta f) \} \quad (2)$$

je reálná nezáporná hodnota bez ohledu na to, zda  $x(n\Delta f)$  je reálné či komplexní. Odtud plyne, že modul  $|x(n\Delta f)|$  je

$$|x(n\Delta f)| = +\sqrt{S_{xx}(n\Delta f)}. \quad (3)$$

Je zřejmé, že tento modul může mít libovolné komplexní číslo, pokud

$$x(n\Delta f) = |x(n\Delta f)| e^{i\varphi_n}, \quad (4)$$

kde  $\varphi_n$  je fáze  $n$ té frekvenční složky procesu. At' je  $\varphi_n$  jakékoliv, modul  $|x(n\Delta f)|$  zůstane stejný. Tomu vyhovuje i fáze náhodná z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Je zřejmé, že pro každou frekvenční složku  $x(n\Delta f)$  existuje teoreticky nekonečné množství náhodných fází. Přiřazením konkrétních náhodných fází ke všem modulům  $|x(n\Delta f)|$  vznikne vektor diskrétního Fourierova obrazu  $\mathbf{x}_f$  časové řady  $\mathbf{x}_t$ . Tu najdeme zpětnou diskrétní Fourierovou transformací obrazu  $\mathbf{x}_f$ :

$$\mathbf{x}_t = \text{IDFT}(\mathbf{x}_f) = \{x(kT)\}, \quad k = 1, 2, \dots, N_S \quad (5)$$

Tímto postupem vznikla časová řada vzorků jednoho zatěžovacího procesu s požadovanou výkonovou spektrální hustotou a přibližně normálním rozložením hodnot vzorků. Stejným způsobem se vytvoří i časová řada druhého zatěžovacího procesu  $\mathbf{y}_t = \{y(kT)\}$ , pro  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Pro praktické využití těchto informací je zapotřebí procesy  $\mathbf{x}_T$  a  $\mathbf{y}_T$  transformovat do formy vhodné pro řídicí jednotku zatěžovacího stroje, na kterém se bude experiment realizovat.

Elektro-hydraulický zatěžovací stroj INOVA ZUZ 200-1 a jeho počítačový řídicí systém významně omezují volnost zadávání procesů. Těmito omezeními jsou pevná vzorkovací perioda  $T = 1$  [ms] a frekvenční rozsah do cca 10 [Hz]. Tato omezení mají za následek, že procesy jsou značně převzorkovány (k nejvyšší frekvenci zhruba 20 krát), takže časové řady jsou velmi dlouhé. S ohledem na budoucí zpracování odměřených časových řad programem PragTic bylo trvání jedné realizace omezeno na 5 minut, po kterých se v cyklu opakuje. I tak vznikly časové řady o 300 000 vzorcích představující jeden zatěžovací blok.

### 3. Zadání procesů pro zkušební stroj

Pro vlastní únavové zkoušky s kombinovaným namáháním se užívá elektrohydraulický zkušební stroj INOVA ZUZ 200-1, na němž lze zkušební tělesa zatěžovat v režimu tah-tlak a krutem. Tento stroj (viz obrázek 2) umožňuje zatěžovat zkušební tělesa nejen běžnými harmonickými procesy, ale i bloky náhodných procesů, jejichž časové řady se zadávají přes řídicí počítač stroje ve formě binárních souborů.

Vzorky časových řad jsou celá čísla z intervalu  $\langle -2^{15} + 1, 2^{15} - 1 \rangle$ , tj. v rozsahu  $\pm 32767$ . Pro maximální využití tohoto rozsahu zobrazení v počítači se vzorky zatěžovacích procesů normalizují tak, aby v absolutní hodnotě největší extrém "jednotkového" procesu dosáhl právě meze intervalu, tedy podle formule

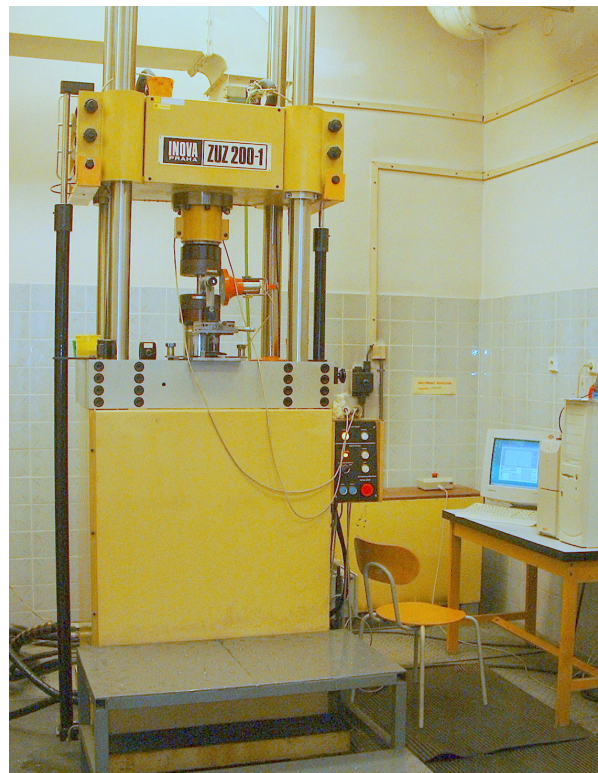
$$x_1(t) = 32767 \operatorname{entier} \left( \frac{x(t)}{|x_{\max}|} \right) \quad (6)$$

a podobně i pro proces  $y(t)$ .

Celé číslo tohoto rozsahu může být v paměti počítače uloženo ve dvou bajtech. V počítačích typu PC je k tomu použit styl označovaný jako "big endian". U řídicích jednotek strojů Inova je však použit styl "little endian" s obráceným pořadím jednotlivých bytů, než je běžné u PC. Tato skutečnost přináší menší komplikaci při přenosu dat z PC spočívající v nutnosti konverze vygenerovaných časových řad.

Mohutnost procesů se nastavuje až při přípravě zkoušky na řídicí jednotce zatěžovacího stroje podle požadované maximální hodnoty extrému v procesu. Číslo  $|32767|$  se přiřadí síla  $F_{\max}$  v [kN] nebo moment  $M_{\max}$  v [Nm] tak, aby nominální napětí ve zkoušeném tělese  $\sigma_n(t)$  a  $\tau_n(t)$  měla požadované vlastnosti, jako jsou jejich směrodatné odchylky  $s_\sigma$  a  $s_\tau$ . Z dřívějších výzkumů únavy při kombinovaném namáhání víme (Balda, Svoboda & Fröhlich, 2003), že pro poškozující (efektivní) napětí přibližně platí

$$|\sigma_d(t)| = \sqrt{\sigma^2(t) + k_c^2 \tau^2(t)}, \quad (7)$$



Obrázek 2. Zkušební stroj INOVA

kde  $k_c = \sigma_c/\tau_c$  je poměr mezí únavy při normálovém a krutovém namáhání. Lze snadno nahlédnout, že stejný modul má i komplexní funkce

$$\sigma_d = \sigma + i k_c \tau, \quad (8)$$

jíž odpovídá rozptyl  $s_d^2$  ve tvaru

$$s_d^2 = s_\sigma^2 + k_c^2 s_\tau^2. \quad (9)$$

Odtud vyplývá, že poškozující účinek smykového napětí je zvýrazněn, protože  $k_c > 1$ . Aby byl srovnatelný, což byl požadavek na experimentální program, je zapotřebí, aby  $s_\sigma = k_c s_\tau$ . Potom rozptyl poškozujícího napětí bude  $s_d^2 = 2 s_\sigma^2$ , odkud plyne, že jeho směrodatná odchylka bude  $s_d = s_\sigma \sqrt{2}$ .

Obvykle se požaduje, aby maximální amplituda procesu kombinovaného namáhání byla jistým zlomkem meze kluzu  $R_e$  materiálu. Je tedy nutno stanovit *předem*, kde tato špička nastává a jak bude veliká. To lze udělat pouze složením procesů  $\sigma_1$  a  $\tau_1$ , kde indexy 1 patří k vygenerovaným procesům normalizovaným na strojovou jednotku podle rovnice (6). Nesmí se však zapomenout na nestejnost směrodatných odchylek těchto procesů, protože i při stejných maximálních hodnotách budou směrodatné odchylky  $s_{\sigma_1}$  a  $s_{\tau_1}$  obecně různé. Pro jednotkový proces kombinovaného namáhání, v němž obě složky budou mít stejný poškozující účinek, bude potom platit formule

$$\sigma_{d1}(t) = k_c \sigma_1(t) + i k_c \frac{s_{\sigma_1}}{s_{\tau_1}} \tau_1(t) = k_c [\sigma_1(t) + i \tilde{\tau}_1(t)]. \quad (10)$$

Z extrému procesu  $\sigma_{d1}(t)$  stanovíme měřítko procesu kombinovaného namáhání  $\sigma_d(kT)$

$$m_d = \frac{R_e}{|\sigma_{d1}(t)|_{\max}}, \quad (11)$$

jímž se pronásobí procesy  $\sigma_1(t)$  a  $\tilde{\tau}_1(t)$  a získají se tak hodnoty vzorků napětíových procesů  $\sigma(kT)$  a  $\tau(kT)$ . Z nich se následně stanoví zatěžovací časové řady sil a momentů

$$F(kT) = m_d \sigma_1(kT) A/1000 \quad [\text{kN}] \quad \text{a} \quad (12)$$

$$M(kT) = m_d \tilde{\tau}_1(kT) W_k/1000 \quad [\text{Nm}]. \quad (13)$$

Jejich extrémy potom slouží k nastavení stroje v jednotlivých složkách. Protože se poškozující napětí oměřtkovalo stejně, totiž na  $\sigma_d = m_d \sigma_{d1}$ , bude i  $s_d = m_d s_{d1}$ .

#### 4. Hustota pravděpodobnosti rozložení vzorků

Bylo již řečeno, že hustota pravděpodobnosti rozložení vzorků je přibližně normální. Vyplývá to z centrální limitní věty, která zhruba říká, že suma dosti velkého počtu náhodných veličin o libovolném rozložení má přibližně normální rozdělení (Roubíček ed., 1967). To se často označuje jako  $N(\mu, s^2)$ . Pokud by bylo zapotřebí generovat procesy s jiným rozdělením  $f(x, \mu, s^2)$ , bylo by nutno podstoupit podstatně složitější proceduru (viz Balda (1977, 2001)).

Mějme k dispozici časovou řadu  $v(kT)$  s normálním rozložením vzorků. Pokud ale potřebujeme proces s hustotou pravděpodobnosti  $f(x, \mu, s^2)$ , musí se proces  $v(kT)$  ztransformovat jistou funkcí, která změní normální rozdělení  $v(kT)$  na požadované. Tato operace však zároveň

ovlivní výkonovou spektrální hustotu na jinou, než má  $v(kT)$ . Je-li žádána výkonová spektrální hustota  $S_{xx}(f)$  a zároveň hustota pravděpodobnosti  $f_x$ , bude výkonová spektrální hustota  $S_{vv}(f)$  neznámou funkcí, kterou je zapotřebí teprve najít.

Transformace normálního rozdělení na žádané se dosáhne ve dvou krocích: Nejdříve se nechá *normální* proces projít takovou funkční transformací (filtrem bez setrvačnosti), která změní normální rozdělení procesu  $v(t)$  na konstantní rozdělení procesu  $w(t)$ . Toho se dosáhne, má-li funkční předpis filtru tvar distribuční funkce normálního procesu  $F_N(v)$ , která změní normální rozdělení na rovnoměrné v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Vzápětí se použije další transformace pomocí inverzní distribuční funkce  $F_x^{-1}(w)$ , která převede interval hodnot procesu  $w$  na  $x$ . Rozložení  $x$  je již požadované, aniž známe výkonovou spektrální hustotu  $S_{vv}(f)$ . Oba kroky transformace hustoty pravděpodobnosti lze zapsat jedinou formulí

$$x(v) = F_x^{-1}[F_N(v)]. \quad (14)$$

Bylo již řečeno, že tato transformace změní neznámou výkonovou spektrální hustotu  $S_{vv}(f)$  na požadovanou  $S_{xx}(f)$ . Naštěstí lze  $S_{vv}(n\Delta f)$  pro každou frekvenci  $n\Delta f$  určit na základě známé teorie průchodu gaussovského signálu nelineárním členem bez setrvačnosti, (viz např. Levin (1965)). Ta sice pracuje s korelačními funkcemi  $R_{vv}(kT)$  a  $R_{xx}(kT)$ , ale to není problém, protože ty jsou zpětnými Fourierovými transformacemi (originály) výkonových spektrálních hustot  $S_{vv}(n\Delta f)$  resp.  $S_{xx}(n\Delta f)$ . Podle této teorie lze  $R_{xx}(kT)$  vyjádřit jako nekonečnou sumu mocnin  $R_{vv}(kT)$ :

$$R_{xx}(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} R_{vv}^n(kT), \quad \text{kde} \quad (15)$$

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) H_n(v) f(v) dv. \quad (16)$$

Symbol  $H_n(v)$  představuje Hermiteův polynom  $n$  tého stupně. Tyto polynomy lze rekurentně generovat ze vztahů:

$$H_0(v) = 1 \quad (17)$$

$$H_1(v) = v \quad (18)$$

$$H_{n+1}(v) = v H_n(v) - n H_{n-1}(v). \quad (19)$$

Konstanty  $c_n^2/n! = C_n$  lze vygenerovat předem pro  $n \leq 15$ , což zcela postačí. Poté se pro zvolený počet členů sumace  $n_{\max}$  a každé zpoždění  $kT$  vyřeší nelineární rovnice

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} C_n R_{vv}^n(kT) - R_{xx}(kT) = 0 \quad (20)$$

pro neznámé  $R_{vv}(kT)$ .

Jakmile se najdou všechny hodnoty korelační funkce  $R_{vv}(kT)$  pro  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , vypočte se pomocí DFT výkonová spektrální hustota  $S_{vv}(n\Delta f)$ . Z ní se výše popsaným postupem vygeneruje časová řada  $\mathbf{v}_t = \{v(kT)\}$  a ta se pomocí formule (14) ztransformuje na  $\mathbf{x}_t = \{x(kT)\}$ . Ta se potom převede na zatěžovací síly a momenty.

## 5. Rozdělení špiček

Při únavovém zatěžování rozhoduje o rychlosti porušování zejména rozdělení napětových špiček. To je bohužel dosud problém neovladatelný, pokud nejde o čistě analytickou záležitost. Kombinací obou procesů s náhodným výskytem extrémů se rovněž náhodně objeví v procesu kombinovaného namáhání špičky, jejichž přibližné rozložení lze sice vyhodnotit, ale ne předem určit, anebo dokonce řídit. Existují sice jisté analytické pokusy, Niesłony a Macha (2008), kterými lze stanovit poškození pro kombinaci čistě gaussovských procesů. Ty však pro skutečné měřené procesy nevyhovují, protože na rozdíl od přibližně normálního rozdělení vzorků napětových procesů bývá rozdělení špiček jejich kombinace velmi vzdálené od Raleighova rozdělení. Jde tedy o stále otevřený problém, na jehož vyřešení se ještě čeká.

## 6. Realizace navržených postupů

Postup popsáný ve druhém odstavci byl naprogramován v prostředí MATLAB do programu **psd2xt**. Jde o podstatně zmodernizovanou verzi starého programu **Sf2xt** z roku 2000. Program může generovat procesy s libovolným průběhem výkonové spektrální hustoty jako po částech lineární funkce v lineárních případně logaritmických osách. Pro usnadnění práce jsou předdefinována čtyři charakteristická zadání s průběhem rostoucím, konstantním, klesajícím a pyramidálním, a to opět v obou typech souřadnicových os.

Program vytvoří jeden normalizovaný zatěžovací proces, vynesou jeho výkonovou spektrální hustotu v obou druzích souřadnicových os a dále histogramy jeho vzorků a špiček. Pro vzorky a i špičky vytiskne tabulku jeho středních hodnot, směrodatných odchylek, rozptylů, 3. a 4. momentů a součinitelů šikmosti a špičatosti. Pokud to uživatel žádá, uloží program vygenerovaný proces do souborů typů \*.mat (binární), \*.gdt (pro stroj INOVA), anebo jako \*.txt (pro stroj Instron) a na závěr se uloží protokol jako textový soubor a obrázek ve formátech \*.eps, \*.pdf, \*.png.

Dalším programem **nastav** se počítají parametry nastavení stroje INOVA pro dvojici zatěžovacích procesů, jimiž bude stroj řízen v režimu rovinného zatěžování. Kromě zápisu protokolu o všech procesech a jejich statistikách, výpočtu měřítek a maximální síle  $F_{\max}$  a momentu  $M_{\max}$  se kreslí obrázek s 12 diagramy, čtyřmi pro každý z procesů  $\sigma$ ,  $\tau$  a  $\sigma_d$ . U prvních dvou procesů se vynáší průběh procesu, spektrální výkonová hustota, histogram vzorků a histogram špiček. U procesu zkonstruovaného kombinovaného namáhání se vynáší totéž, až na histogram vzorků, místo kterého je vyneseno histogram očekávaného poškození. Tento histogram dává ve spojení s histogramem špiček dobrou představu o příspěvcích špiček různé úrovně do procesu poškozování. Nakonec se po odsouhlasení uloží protokol o běhu a obrázky ve výše uvedených formátech.

Soubory \*.gdt se zavedou do řídicí jednotky stroje INOVA a po nastavení maximálních sil a momentů podle výsledků programu **nastav** se na kalibračním zkušebním tělese zrealizuje zkušební zatěžování s iteracemi na dosažení maximální shody se zadaným procesem. Po jejím dosažení vytvoří opravené zadání zatěžovacích procesů, ty se odměří a uloží do souborů skutečných sil a momentů. Tyto textové soubory se nakonec znovu zpracovávají posledním z programů, **InovaFM**. Ten z nich vypreparuje vlastní reálné budící procesy, vypočte všechny výše uvedené statistiky a vynesou diagramy podobné těm z programu **nastav**. Při ukončování běhu se po odsouhlasení uloží souhrnný protokol o celém běhu a všechny obrázky ve výše uvedených formátech vhodných k prezentacím a publikování. Jedna ukázka je uvedena v obr. 3.

Bylo již řečeno, že skutečné zadávání procesů se realizuje na zatěžovacím stroji v iteracích. Zatěžovací systém spolu s regulátory, akumulátory a olejem v potrubí představuje dynamický systém, který na aplikované buzení zadané formou  $F(kT)$  a  $M(kT)$  reaguje jistou odezvou, která se od zadané liší, ale kterou je možno měřit a analyzovat. Je zcela pochopitelné, že odezva nesleduje zcela přesně zadání, takže vznikají v ní jak amplitudové tak i fázové odchylky, které by mohly velice výrazně znehodnocovat žádaný výsledek. To by mohlo být velmi nepříjemné, protože největší rozdíly mezi žádanými a skutečnými buzeními jsou zejména ve špičkách, na které je právě únavové porušování nejcitlivější.

Pro kompenzaci zmíněných odchylek se již před mnoha lety vyvinula metoda označovaná někdy jako ITFC tj. Iterative Transfer Function Compensation. Firma INOVA Praha dodala podobný software s označením IFRM, což asi znamená Iterative Frequency Response Modification. Oba názvy jsou zavádějící, protože programy neupravují ani přenosovou funkci (což je vůbec chybné označení), ani frekvenční odezvu, ale buzení s cílem dosáhnout požadovaného účinku. Po několika iteracích zatěžování se odchylky od žádaných hodnot pohybují obvykle v úrovni 1%. Naiterovaná buzení se potom využívají při dlouhodobé únavové zkoušce.

## 7. Závěr

Příspěvek popisuje postup, jaký byl užít pro přípravu komplikovaného experimentálního programu spojeného s výzkumem vlivu výkonových spektrálních hustot na životnost částí vystavených proměnlivému kombinovanému namáhání. Složky napětí jsou nekorelované. To rovněž znamená, že jsou navzájem neproporcionální.

Podrobně se analyzovala metodika přípravy zatěžovacích procesů a jejich cílené nasazení s přesně definovanými extrémy složek napjatosti a očekávanou směrodatnou odchylkou kombinovaného namáhání. Pro minimalizaci odchylek od požadovaných vlastností se osvědčila možnost iterativního zpřesňování budících procesů speciálním softwarem dodaným s počítačem. Pro generování procesů, jejich nastavování na řídicí jednotce zatěžovacího stroje a vyhodnocování skutečně dosažených procesů byly vypracovány tři programy, které vytvářejí soubory normovaných časových řad, protokoly a obrazovou dokumentaci o vstupních i výstupních procesech.

V průběhu již zahájených dlouhodobých zkoušek se bude pracovat na metodách a jejich realizaci pro odhadování únavové životnosti konstrukcí buzených procesy o známých výkonových spektrálních hustotách a histogramech napěťových složek.

## 8. Poděkování

Práce byla podpořena z grantu GA ČR 101/09/0904 a projectu AV OZ 20760514.

## 9. Reference

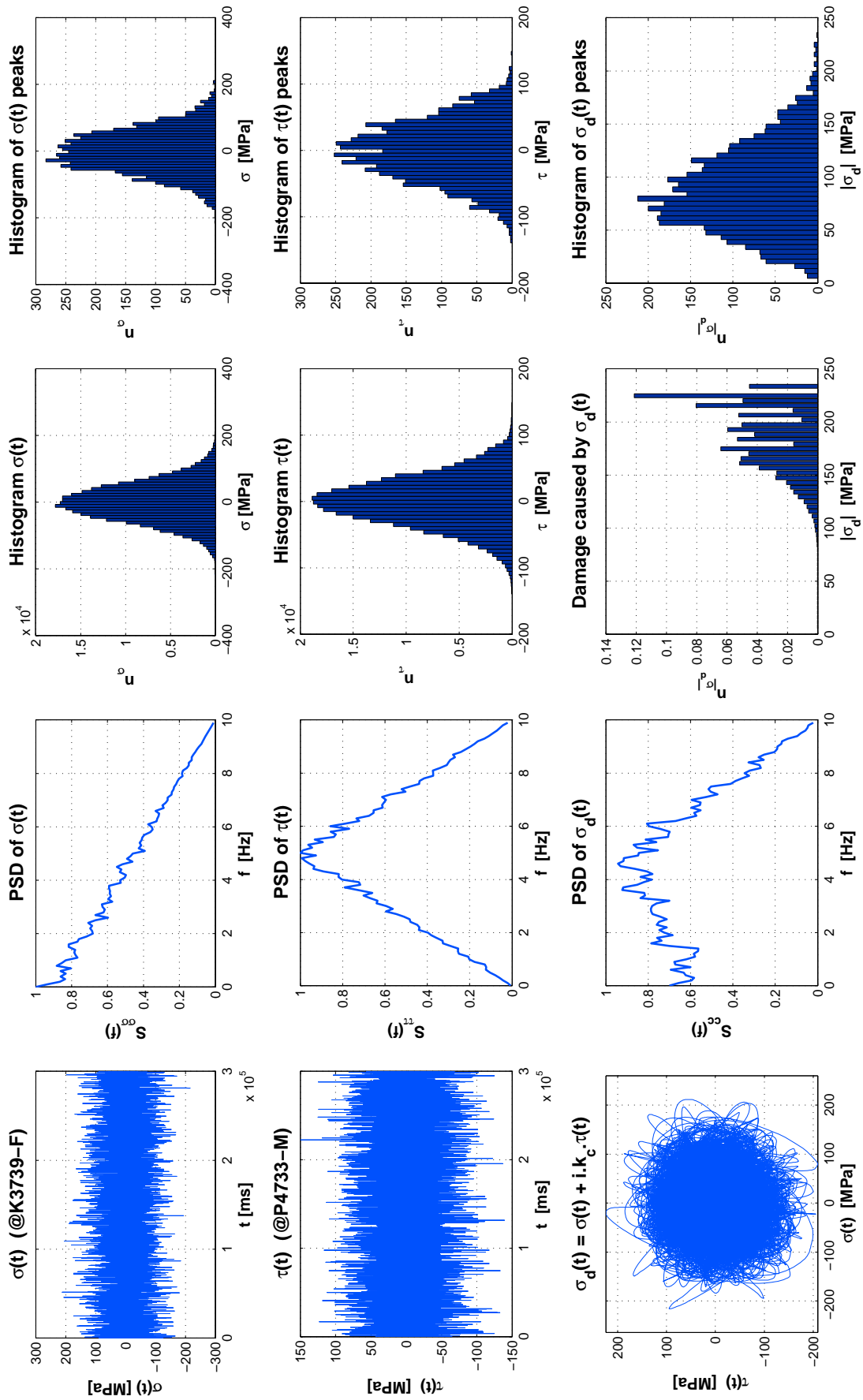
Balda, M. (1977): Simulace diskrétních náhodných procesů se zadanými charakteristikami. *Zatěžovací systémy*, Seminář ČsVTS ÚMMS SAV, Modra, Zochova chata, 1977

Balda, M. (2000): Softwarové zajištění únavových zkoušek. Sb. kolokvia *Diagnostika a aktivní řízení*, VÚT Brno - ÚT AVČR, Třešť, 2000, 5-6, ISBN 80-214-1665-3

- Balda, M. (2001): *Úvod do statistické mechaniky*, Scriptum, Vyd. ZČU v Plzni, Plzeň, ISBN 80-7082-820X
- Balda, M., Svoboda, J., Fröhlich, V. (2003): Odhadování únavové životnosti částí při kombinovaném náhodném zatěžování. *Engineering Mechanics*, Vol. 10, No. 5, 1-12
- Crandall, S. H. (1963) ed.: *Random vibrations*, Vol. 2, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1963
- Levin, B.R. (1965): *Teorie náhodných procesů a její aplikace v radiotechnice*. SNTL, Praha, 1965
- Niesłony, A. a Macha, E. (2008): *Spectral Methods in Multiaxial Random Fatigue*. Lecture notes in Applied and Computational Mechanics, Springer, Berlin, ISSN 1613-7736
- Prchal, J. (1987): *Realizace číslicového generátoru náhodných procesů se zadanými charakteristikami*. Výzk. zpráva ÚTAM ČSAV č. 32 VP, Plzeň, 1987
- Rajcher, V. L. (1969): Gipoteza spektralnogo summirovaniya i jego primenenije dlja opredeleniya ustalostnoj dolgovečnosti pri dejstvii slučajnych nagruzok. *Trudy CAGI*, No. 1134, Moskva, 3-38
- Roubíček, V. ed. (1967): *Stručný statistický slovník*, Nakl. Svoboda, Praha, 1967
- Svoboda, J., Václavík, M., Balda, M. (2000): The influence of power spectral density on durability of the constructions under random loading. Proc. Colloq. *Diagnostika a aktivní řízení 2000*, Třešť, ISBN 80-214-1665-3, 41-42



Combined stress:  $\sigma = @K3739-F$ ,  $\tau = @P4733-M$



Obrázek 3. Napěťové procesy a jejich charakteristiky