National Conference with International Participation

ENGINEERING MECHANICS 2008

Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2008

VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ ŠÍŘENÍ ÚNAVOVÝCH TRHLIN V OZUBENÝCH KOLECH

COMPUTATIONAL MODELLING OF FATIGUE CRACK PROPAGATION PATH IN GEARS

M. Ševčík*, M. Vrbka, P. Hutař***, L. Náhlík******

Summary: *V této práci bylo využito výpočtové modelování s pomocí MKP k simulaci šíření únavových trhlin v ozubených kolech s tenkým věncem. Na základě předpokladů lineárně elastické lomové mechaniky byl stanoven směr šíření a definován způsob poškození ozubeného kola. Na základě provedených simulací byla určena minimální tloušťka věnce ozubeného kola, kdy dojde k šíření trhliny pod zubem. Závěrem bylo provedeno srovnání numerického přístupu pomocí jednoparametrové lomové mechaniky a dvouparametrové lomové mechaniky (uvažující constraint před čelem trhliny) s experimentem. Ukázalo se, že uvážení vlivu constraintu zpřesňuje stanovení výsledného směru šíření trhliny a v některých případech může významně změnit předpokládanou dráhu šíření trhliny.*

1 Úvod

Ozubená kola jsou prvky systému, který přenášejí a transformují rotační nebo translační pohyb, často za vysokých otáček. To sebou nese nároky na přesnost výroby a preciznost návrhu. U ozubení nastávají nejčastěji dva mezní stavy a to mezní stav lomu zubu a mezní stav kontaktní únavy. Norma ČSN 01 4686-3 (1988) popisuje metodiku kontrolního výpočtu ozubení vzhledem k oběma těmto mezním stavům. Norma ČSN 01 4686 má ale dvě základní omezení - součinitel záběru profilu $\varepsilon_\alpha < 2$ a vzdálenost koncentrátoru napětí od paty zubu minimálně 3,5×modul. V posledních letech se však stále více používají ozubená kola, která tyto podmínky nesplňují. Tato kola se vyznačují lepšími záběrovými vlastnostmi, vyšší

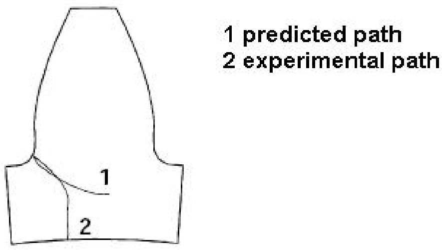
* Martin Ševčík: Ústav fyziky materiálů, AV ČR; Žižkova 22; 616 62, Brno, Česká republika; tel.: +420 532 290 351, fax: +420 514 212 301; e-mail: martinstroj@seznam.cz; a Ústav konstruování a průmyslového designu, FSI VUT, Technická 2896/2, 616 69 Brno, Česká republika;

** Ing. Martin Vrbka, Ph.D.: Ústav konstruování a průmyslového designu, FSI VUT, Technická 2896/2, 616 69 Brno, Česká republika; tel.: +420 541 143 237, fax: +420 541 143 231; e-mail: vrbka.m@fme.vutbr.cz

*** Ing. Pavel Hutař, Ph.D.: Ústav fyziky materiálů, AV ČR; Žižkova 22; 616 62, Brno, Česká republika; tel.: +420 532 290 351, fax: +420 514 212 301; e-mail: hutar@ipm.cz

**** Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.: Ústav fyziky materiálů, AV ČR; Žižkova 22; 616 62, Brno, Česká republika; tel.: +420 532 290 351, fax: +420 514 212 301; e-mail: nahlik@ipm.cz; a Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, Technická 2896/2, 616 69 Brno, Česká republika;

únosností, případně nižší hmotností oproti standardním kolům. Důkladný popis napjatosti v místě aktivního zubu je pro tato kola velmi potřebný a jednou z možností jak jej získat je využít numerický přístup, například metodu konečných prvků. S pomocí této metody se dá studovat i napjatost u ozubených kol, které nevyhovují požadavkům normy. Např. Li (2007) a Ševčík (2007) porovnávají napětí v patě zubu a kontaktní tlak s výpočtovými standardy. Bylo zjištěno, že při zanedbání jistých koeficientů jsou přístupy podle MKP a normy nahraditelné. Bibel (1991) zjistil, že snížením tloušťky věnce na jistou mezní tloušťku způsobí paradoxně mírný pokles napětí v patě zubu. Teoretický předpoklad, že maximální napětí v patě zubu leží v místě patního přechodu, jehož tečna svírá s osou zubu úhel 30°, byl zkoumán v práci Kramberger a kol. (2004a). Ukázalo se, že tento úhel se může měnit v závislosti na přesnosti výroby a na tloušťce věnce. Velmi přínosné byly práce Lewicki a kol. (2000) a Lewicki (2001) týkající se určování lomových charakteristik a životnosti ozubení s tenkým věncem. Byla sestavena mapa geometrických ukazatelů, podle níž se dá rozhodnout kudy projde únavová trhlina (pouze pro ozubení AGMA). Šířením trhlin z paty zubu se zabývaly práce Sfakiotakis & Anifantis (2002) a Kramberger (2004b). Dvouparametrová lomová mechanika byla využita při studiu kontaktní únavy na boku zubu - Zafošnik a kol. (2005) a Zafošnik a kol. (2007). Motivací ke studium vlivu constraintu na směr šíření únavové trhliny u ozubení s tenkým věncem byly závěry práce Lewicki & Ballarini (1996). Zde byl studován vliv tloušťky věnce na šíření trhliny pomocí jednoparametrové lomové mechaniky. Došlo k rozporu mezi experimentálně zjištěnou a numericky a predikovanou cestou tak, jak je ukázáno na obrázku 1.



Obr.1 Rozdíl mezi predikovanou cestou pomocí LELM a experimentálně zjištěnou cestou (Lewicki & Ballarini, 1996)

Cílem této práce je vysvětlit některé rozpory mezi experimentálními výsledky a numerickými simulacemi na bázi lineárně elastické lomové mechaniky pomocí vlivu constraintu. Constraint je kvantifikován pomocí T-napětí a na základě zobecněných kriterií pro směr šíření únavové trhliny je popsáno chování trhliny v patě zubu.

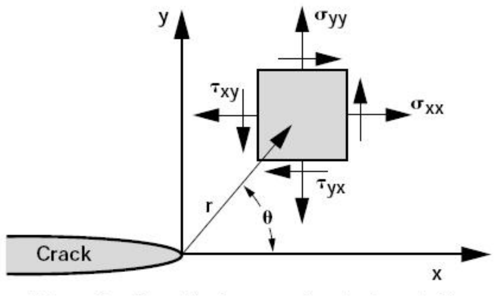
2 Základní principy lomové mechaniky

Abychom mohli hodnotit chování těles s trhlinou, je třeba znát napjatost v okolí čela trhliny. Pro popis napjatosti v okolí čela trhliny se za předpokladu lineární elasticity používá se tzv. Williamsův rozvoj (Anderson, 1995).

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} \cdot f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + ... , \quad (1)$$

σ_{ij} – jsou složky napětí v okolí čela trhliny; r, θ - jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu trhliny, A -je konstanta a f_{ij} je známá funkce

Konstanta úměrnosti A u prvního členu rozvoje má singularitu typu $r^{-1/2}$ a nazývá se faktor intenzity napětí a označuje se $K_{I\ (II,\ III)}$ v závislosti na uvažovaném módu namáhání. Druhý člen rozvoje je konstantní a v literatuře se označuje jako T-napětí (Leevers & Radon, 1982). Ostatní členy jsou vzhledem k r regulární.



Obr. 2 Schéma složek napětí a polárních souřadnic v okolí čela trhliny

Jedno-parametrová lineárně-elastická mechanika (LELM), využívá k hodnocení těles s trhlinou pouze první (singulární) člen Williamsova rozvoje a ostatní členy zanedbává. Vztah pro rozdělení napětí v okolí kořene trhliny se tak zjednoduší na:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{ij}(\varphi) \ , \qquad (2)$$

K - faktor intenzity napětí; $f_{i,j}$ – známá funkce; θ, r – polární souřadnice

Koncept LELM se velmi dobře osvědčil při řešení mnoha praktických problémů. Bylo však prokázáno, že hodnocení těles s trhlinou pomocí LELM není vždy dostačující, zejména v případech, kde vliv constraintu vyvolaný geometrií tělesa hraje významnější roli (Hutař a kol., 2004).

Dvouparametrová lineárně-elastická lomová mechanika (DLELM) využívá k hodnocení těles s trhlinou první dva členy Williamsova rozvoje, tedy faktor intenzity napětí a T-napětí, a ostatní členy zanedbává. Pro využití DLELM je tedy nezbytné znát hodnotu T-napětí na čele trhliny.

2.1 Určení směru šíření trhliny

Pro určení směru šíření trhliny se často používá teorie maximálního smykového napětí (MTS). Tato teorie předpokládá, že trhlina se stáčí do místa, kde je maximální smykové napětí a tedy minimální hodnota faktoru intenzity napětí pro druhý mód namáhání. Budoucí směr šíření trhliny je určen z rovnice (3) (Erdogan & Sih, 1963):

$$K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0 \ , \qquad (3)$$

odkud úhel směru šíření trhliny θ je roven:

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{1}{4}\frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}\right) \tag{4}$$

Takto definované MTS kriterium nezahrnuje vliv T-napětí nelze tedy uvážit vliv constraintu na šíření únavové trhliny. Je tedy nutno toto kriterium modifikovat. Výsledkem je rovnice (5) (Pehan a kol., 2008):

$$\left[K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1)\right] - \frac{16T}{3}\sqrt{2\pi r_c}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} = 0 \ , \tag{5}$$

kde K_I, K_{II} - faktory intenzity napětí odpovídající jednotlivým módům zatěžování; θ - úhel směru šíření únavové trhliny; T - T-napětí; r_c – délkový parametr.

2.2 Stanovení parametru rc

V literatuře zatím není přesně popsáno jak stanovit velikost tohoto délkového parametru. Obecně se předpokládá, že velikost tohoto parametru souvisí s procesní zónou před čelem trhliny a závisí tedy na mechanismu poškození. Bednář (1999) se domnívá, že pro únavové poškození tento parametr vyjadřuje velikost plastické oblasti a tedy tento parametr není konstantní po celou dobu výpočtu. Jiní autoři Ayatollahi & Aliha (2007) nebo Pehan a kol. (2008) zase používají hodnotu lomové houževnatosti pro výpočet parametru r_c a tento parametr uvažují jako konstantní materiálovou charakteristiku. V této práci je použit vztah pro velikost plastické zóny:

$$r_c = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{R_e}\right)^2 , \tag{7}$$

K_I je faktor intenzity napětí pro 1. mód namáhání a R_e je mez kluzu materiálu

2.3 Určení T-napětí

Existuje několik způsobů, jak určit velikost T-napětí. Obě dále popsané metody se hodí pro užití s metodou konečných prvků. Jsou to (Hutař, 2004a):

- přímá metoda
- metoda posunutých uzlových bodů

Přímá metoda

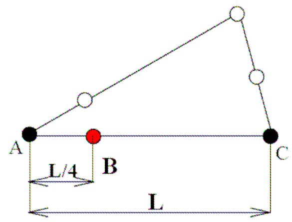
Přímou metodou se zjišťuje hodnota T- napětí např. z rozdílu složek napětí σ_{xx} a σ_{yy} v uzlech umístěných před trhlinou v tečném směru k trhlině.

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=0} \tag{6}$$

Hodnota T-napětí pro $r \rightarrow 0$ se určí extrapolací. Tato metoda je poměrně náročná na hustotu sítě MKP.

Metoda posunutých uzlových bodů

Princip metody spočívá v posunutí uzlových bodů v bezprostředním okolí kořene trhliny do 1/4 délky prvku směrem ke kořeni trhliny, viz obrázek 3. Tím se modeluje singularita typu $r^{1/2}$. Velikost T-napětí se pak získá z posuvů na uzlech, v bezprostřední blízkosti kořene trhliny.



Obr. 3 Schéma posunutí uzlových bodů (Hutař, 2004b)

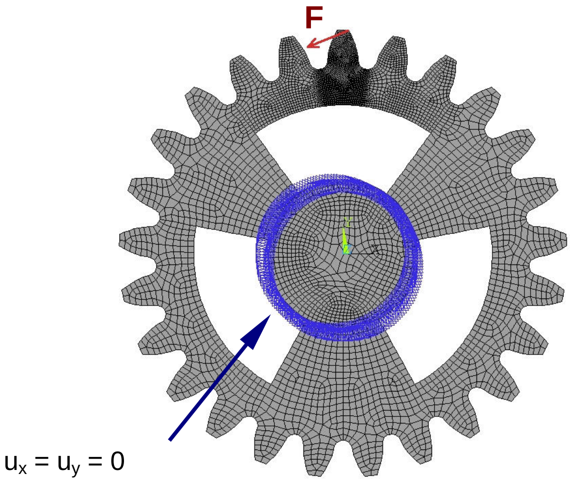
3 Tvorba výpočtového modelu

Pro tvorbu geometrie soukolí byly použity parametry ozubeného kola uvedené v tabulce 1.

Tabulka 1 Parametry ozubeného kola

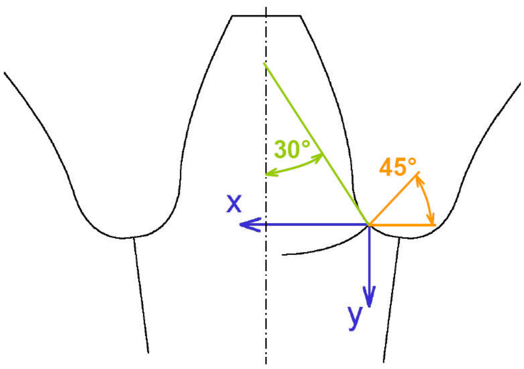
označení	parametr	hodnota	jednotka
z	počet zubů	25	-
m	modul	4	-
bw	šířka ozubení	30	mm

Na základě geometrie získané pomocí rovnic pro tvorbu evolventní křivky zubu (Wang, 2003) se začne modelovat konkrétní soukolí. Jako materiálový model byl uvažován homogenní, izotropní, lineárně-elastický materiál s modulem pružnosti v tahu E = 210GPa a Poissonovým poměrem μ = 0,3. Na všech plochách byla vytvořena síť konečných prvků obsahující cca.10 000 elementů typu PLANE82.



Obr. 4 Ukázka výpočtového modelu

K uchycení ozubeného kola v prostoru bylo uzlům, které ohraničují průměr náboje pastorku, zamezeno všem posuvům. To sice způsobí nepatrně větší namáhání zubu a věnce, ale výsledek bude o to konzervativnější. Zatížení pomocí kontaktu spoluzabírajících zubů bylo nahrazeno osamělou silou, která odpovídá přenášenému výkonu P = 2,2kW při otáčkách n = 1500min^{-1}. U všech výpočtů bylo působiště síly na špičce zubu. Ukázka výpočtového modelu je na obrázku 4.

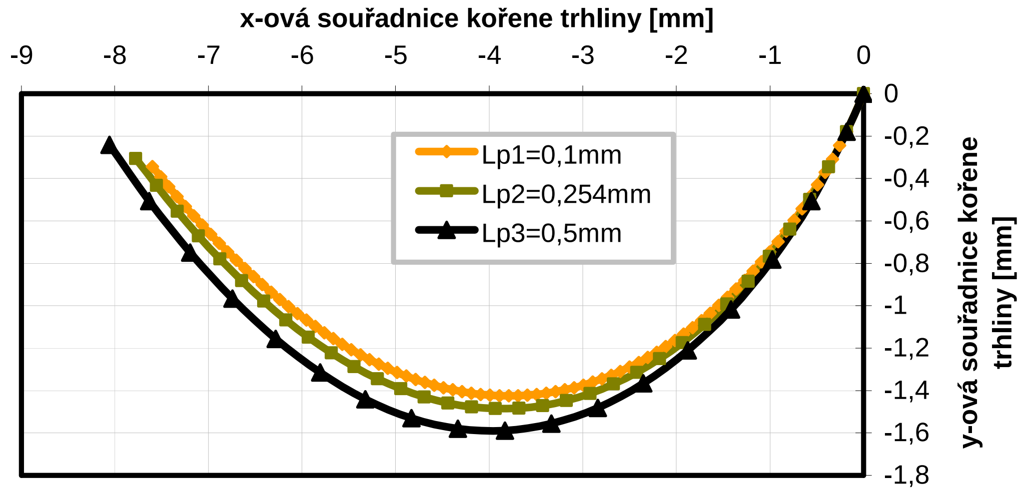


Obr.5. Počátek šíření trhliny a uvažovaný souřadný systém

Všechny trhliny ve výpočtovém modelu, vychází z jednoho místa v patě zubu pod úhlem 45°. Počáteční hloubka trhliny je uvažována 0,254mm. V okolí kořene trhliny je konečnoprvková síť výrazně zahuštěná a nejmenší velikost prvku je cca 0,005mm. Ukázka geometrie ozubeného kola, s vyznačeným počátkem trhliny a referenční souřadnicový systém pro prezentaci výsledků, je zobrazena na obrázku 5.

4 Výsledky numerických simulací a jejich diskuse

Cílem prvotní analýzy bylo ověřit vliv velikosti přírůstku trhliny na výslednou trajektorii trhliny a rozhodnout o jeho použití pro další výpočty. Obecné pravidlo – čím menší tím lepší – sice platí, avšak výpočtový čas se se zmenšující se velikostí přírůstku neúměrně zvyšuje.



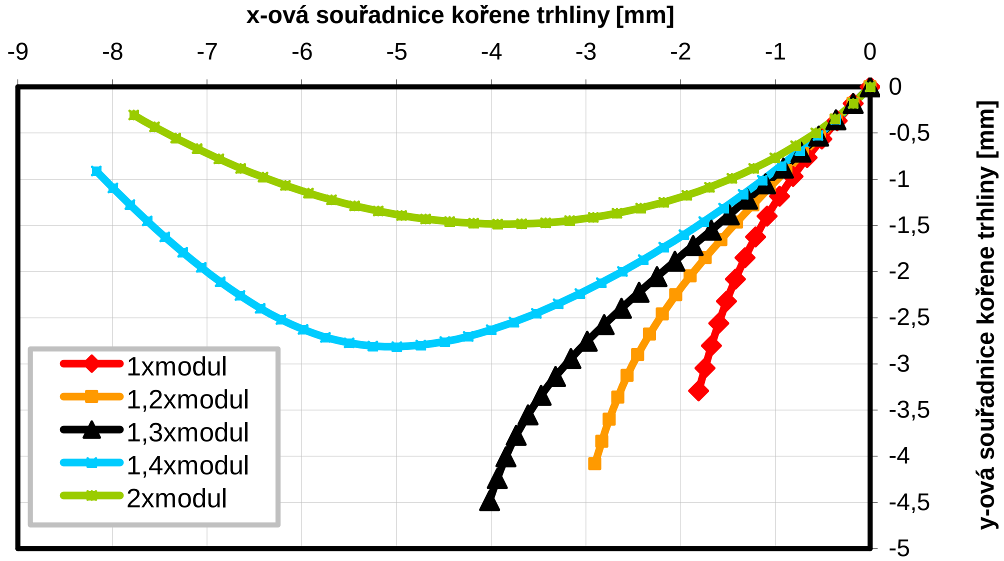
Obr. 6 Vliv velikosti přírůstku trhliny na výslednou cestu

V této analýze byly uvažovány velikosti přírůstků Lp_1 = 0,1*mm*, Lp_2 = 0,254*mm* a Lp_3 = 0,5*mm*. Na obrázku 6 je vykreslen průchod trhliny skrze ozubené kolo s tloušťkou věnce 2×modul. U všech výpočtových modelů je patrný rozdíl mezi vypočtenými cestami. Zatímco velikost přírůstků Lp_3 vykazuje jistou neochotu ke stáčení, velikost přírůstku Lp_1 je podstatně flexibilnější a na lokální změny napjatosti reaguje podstatně pružněji. Závěrem této analýzy pro další výpočty může být doporučení použít velikost přírůstku Lp_2 = 0,254*mm*, protože výsledky jsou již dostatečně přesné a další zjemňování kroku již nevede k významnému zpřesnění trajektorie trhliny.

4.1 Stanovení kritické tloušťky věnce

Na základě předchozí analýzy je možné uvažovat, že existuje jistá minimální tloušťka věnce, kdy ještě nedojde k jeho porušení a mezním stavem bude pouze lom pod zubem. Pro uvažované ozubené kolo je možné zjistit minimální tloušťku věnce za těchto zjednodušujících předpokladů:

- trhlina vychází vždy z jednoho místa v patě zubu
- počáteční délka trhliny je 0,254*mm*
- vstupní úhel trhliny je 45°
- síla zatěžující zub působí ve stejném bodě
- neuvažuje se žádný projev dynamických sil
- trhlina se šíří v ideálním materiálu bez vnitřních defektů



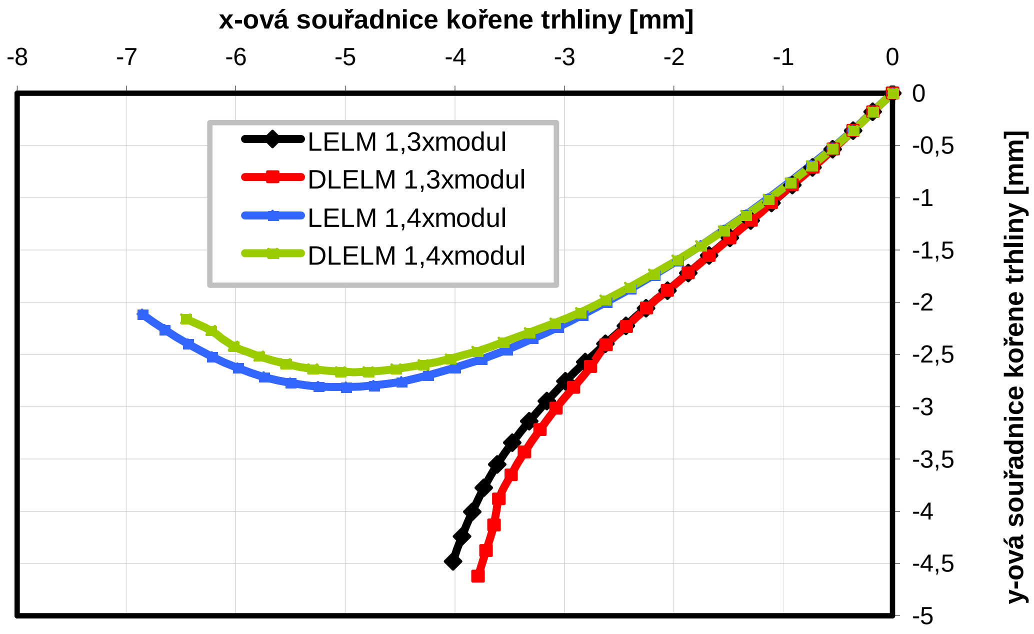
Obr. 7. Vliv tloušťky věnce na směr šíření trhliny

Tyto body lze pro jisté specifické případy do výpočtu pomocí MKP zahrnout, detailní studium jejich vlivu na šíření trhliny však není předmětem této analýzy a nebude mít významný vliv na získané výsledky. Na základě zjednodušující předpokladů uvedených výše byly vytvořeny výpočtové modely pastorku, jehož tloušťka věnce byla v rozmezí 1×modul až 1,5×modul. Na obrázku 7 jsou výsledky simulací, které byly provedeny s pomocí těchto výpočtových modelů.

Tato analýza jasně ukazuje, že při použití principů LELM u výpočtu cesty únavové trhliny bude pro dané soukolí mezní tloušťkou věnce cca 1,4×modul. Při této tloušťce se trhlina ještě stočí po zub. Mezi tloušťkami 1,3×modul a 1,4×modul tedy může nastat jak lom pod zubem tak i skrze věnec. Vypočtené cesty trhliny u těchto tloušťek věnce ohraničují tzv. přechodové lomové pásmo.

4.2 Porovnání přístupů LELM a DLELM

Na základě vypočítaných hodnot K_I, K_{II}, T-napětí a vzdálenosti r_c před vrcholem trhliny byly určeny a porovnány trajektorie šíření únavové trhliny získané za pomoci jednoparametrové a dvouparametrové LELM. Cílem bylo zjistit, zda zahrnutí vlivu T-napětí vede ke zpřesnění výsledků dosažených pomocí LELM. Byla modelována ozubená kola o tloušťkách věnců 1,3×modul a 1,4×modul, u kterých byl zjištěn největší rozdíl v trajektoriích trhlin. Na obrázku 9 jsou vykresleny vypočtené cesty únavové trhliny ze vztahů (4) a (5). Trajektorie trhliny vypočítaná pomocí DLELM se stáčí ostřeji, než v případě použití klasické LELM. Vyšší přesnosti u přístupu klasické LELM se dá dosáhnout pouze zmenšením velikosti přírůstku trhliny. Výhodou DLELM je, že pro přesný výpočet postačí větší velikost přírůstku trhliny oproti klasické LELM, čímž se výpočet stává rychlejší a jednodušší.

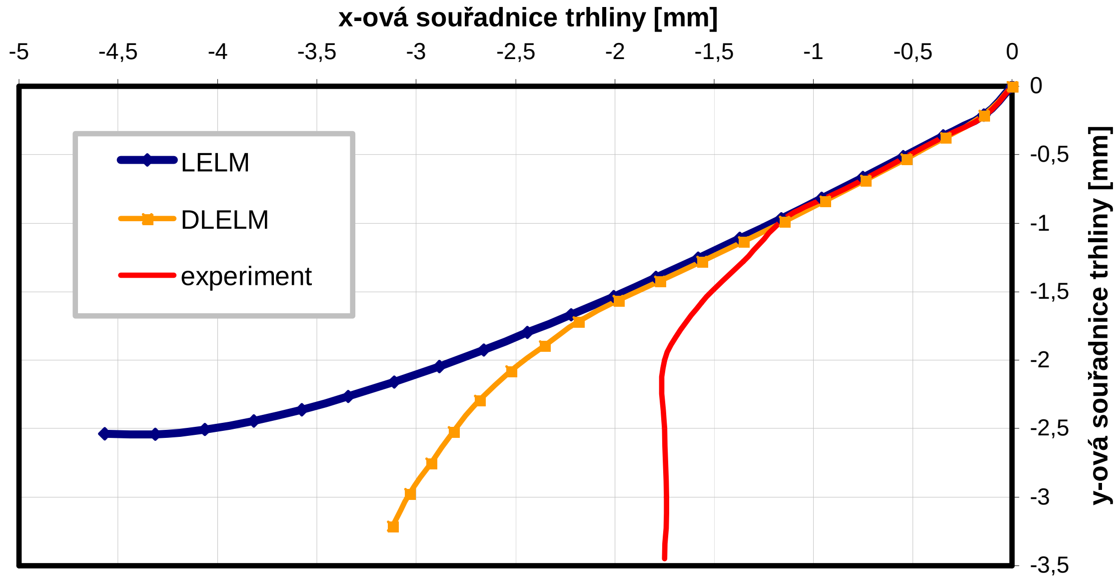


Obr. 8 Porovnání LELM a DLELM

4.3 Srovnání výpočtových přístupů s experimentálními daty

Byť se trajektorie uvedené na obrázku 8 zdají být podobné, při použití DLELM vystačíme s větším přírůstkem trhliny a tím i kratším výpočtovým časem. Pro ověření uvedeného postupu bylo učiněno srovnání s experimentálními daty publikovanými v Lewicki & Ballarini (1996). V uvedené práci byl studován vliv tloušťky věnce na šíření trhliny pomocí jednoparametrové lomové mechaniky a dosažené výsledky srovnány s experimentálními daty. Autoři práce nedokázali výpočtově přesně predikovat způsob poškození ozubeného kola. Jejich odhady se nacházely na nebezpečné straně, neboť numerická simulace ukazovala na „pouhé“ vylomení zubu při daném způsobu zatěžování, avšak při experimentech docházelo k rozlomení celého věnce ozubeného kola. Schéma trajektorií šířících se trhlin je uvedeno na obrázku 1.

Nejdříve byl proveden výpočet za pomoci klasické, tj. jednoparametrové LELM. Výsledná trajektorie byla podobná vypočítané trajektorii publikované v Lewicki & Ballarini (1996). Trhlina se stáčela tak, že by došlo k odlomení zubu ozubeného kola. Následně byl proveden výpočet s uvážením vlivu T-napětí na směr šíření únavové trhliny, tj. bylo použito vztahu (5) pro určení směru šíření trhliny. Srovnání obou výpočtů s experimentálními daty je uvedeno na obrázku 9. Z obrázku je vidět, že použitím dvouparametrové lomové mechaniky došlo ke zpřesnění výpočtu, vypočtená trajektorie se přibližuje trajektorii získané z experimentálního měření. Navíc dvouparametrový přístup predikoval šíření únavové trhliny směrem do středu kola a jeho rozlomení, tak jak se tomu při experimentálních měření skutečně stalo.



Obr. 9 Rozdíl v trajektoriích predikovaných podle LELM, DLELM a experimentálními daty

5 Diskuse a závěr

Pro numerické určení trajektorie šířící se únavové trhliny bylo využito přístupů jednoparametrové LELM a dvouparametrové LELM. Byla provedena citlivostní analýza na velikost přírůstku délky trhliny. Bylo zjištěno, že velikost přírůstku délky trhliny pod 0,254*mm* nemá významný vliv na výslednou trajektorii trhliny, proto byla tato velikost použita pro další výpočty.

Pro odhad směru šíření únavové trhliny bylo využito kriteria maximálních tangenciálních napětí (MTS), viz vztah (4), a jeho varianty uvažující T-napětí, viz (5).

Za pomoci obou postupů byla určena kritická tloušťka věnce ozubeného kola, při které dojde k šíření trhliny směrem do středu věnce a rozlomení celého kola. Velikost této kritické hodnoty se nedá zobecnit na všechny geometrie ozubeného kola a pro použití v praxi by bylo vhodné vytvořit mapu geometrických ukazatelů (modul, počet zubů, zaoblení paty zubu) s jejíž pomocí by se dalo posoudit jakékoliv ozubené kolo vyrobené podle základního profilu ozubení ISO.

Pro výpočet velikosti T-napětí bylo využito metody posunutých uzlových bodů a ověřena přesnost výpočtu ve srovnání s přímou metodou.

Pro geometrii uvedenou v Lewicki & Ballarini (1996) byl proveden odhad trajektorie šíření únavové trhliny v patě zubu za použití postupu klasické LELM a dvouparametrové LELM. Výsledné odhady byly srovnány s experimentálními daty. Z výsledků je patrné, že zahrnutí vlivu T-napětí na směr šíření trhliny vede ke zpřesnění odhadu trajektorie šíření únavové trhliny. Pro studovaný případ se za pomoci DLELM podařilo odhadnout také mechanismus porušení ozubeného kola na rozdíl od klasického jednoparametrového přístupu, který v daném případě vedl k mylným, nekonzervativním závěrům. Rozdíl ve výsledcích predikovaných LELM a DLELM lze vysvětlit velkou multiaxilitou napětí ve věnci kola, kterou není jednoparametrová LELM schopna dobře postihnout.

Z uvedených výsledků vyplývá, že zejména v oblastech s velkou multiaxialitou napětí vede použití dvouparametrové LELM ke kvantitativnímu i kvalitativnímu zpřesnění odhadu trajektorie šíření únavové trhliny. Navíc je možné volit větší přírůstek trhliny a tím zrychlit čas nezbytný pro numerický odhad trajektorie šíření únavové trhliny.

Získané výsledky mohou přispět k přesnějšímu odhadu zbytkové životnosti strojních součástí, optimálnějšímu designu vzhledem k únavovému poškozování a jejich větší provozní spolehlivosti.

Poděkování

Tato práce byla vytvořena za podpory Specifického výzkumu č.VAV13290, za podpory grantu GA ČR č.101/08/1623 a projektu 1QS200410502 Ministerstva průmyslu a obchodu.

Literatura

Alshoaibi, A. M. & Ariffin, A. K. (2007) Finite element simulation of stress intensity factors in elastic-plastic crack growth. *Journal of Zhejiang University*. Malaysia.

Anderson, T.L. (1995) *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*, 2nd edition, CRC Press Inc.

Ayatollahi, M.; Aliha, M. (2007) Fracture toughness study for a brittle rock subjected to mixed mode I/II loading. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences 44*, 617-624

Bednář, K. (1999) Dvouparametrová lomová mechanika*: Výpočet parametrů a jejich význam při popisu chování únavových.* Brno. 117 s. Disertační práce, ÚMTMB FSI VUT v Brně.

Biebel, D., et al (1991) *Effects of Rim Thickness on Spur Gear Bending Stress*. NASA Technical Memorandum 104388.

ČSN 01 4686-3. (1988) *Pevnostní výpočet čelních a kuželových ozubených kol. Kontrolní výpočet čelních ozubených kol*. Praha : Český normalizační institut, 1988. 35 s.

Erdogan, F. & Sih, G.C. (1963) On the crack extension in plates under plane loading and transverse sudar. *Journal of Basic Engineering 85,* 519-527

Hutař, P. (2004a) *Dvouparametrový popis malých trhlin ovlivněných polem napětí obecných koncentrátorů*. Brno. 81s. Disertační práce, ÚMTMB FSI VUT v Brně a ÚFM AV ČR.

Hutař, P. (2004b), Výpočet T-napětí pomocí metody posunutých uzlových bodů, *Problémy lomové mechaniky IV*, Brno, pp. 28-39

Hutař, P., Seitl, S. & Knésl, Z. (2004) Quantification of the effect of specimen geometry on fatigue crack growth response by two-parameter fracture mechanics. *Materials Science and Engineering* A387-389, 491-494.

Kramberger, J., et al. (2004a) Computational model for the analysis of bending fatigue in gears. *Computers and Structures 82*, 2261-2269

Kramberger, J., et al. (2004b) Numerical calculation of bending fatigue life of thin-rim spur gears. *Engineering Fracture Mechanics 71*, 647-656

Leevers, P.S. & Radon, J.C. (1982) Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometrie. *Int. Journal of Fracture* 19, 311-325.

Lewicki, D. (2001) Gear Crack Propagation Path Studies - Guidelines for Ultra-Safe Design. Washington. *Prepared for the 57th Annual Forum and Technology Display sponsored by the American Helicopter Society, Washington, DC, May 9–11*, NASA TM—2001-211073.

Lewicki, D. G. & Ballarini, R. (1996) Effect of rim thickness on gear crack propagation path. *Proceedings of the Seventh International Power Transmission and Gearing Conference sponsored by the American Society of Mechanical Engineers.*

Lewicki, D., et al (2000). Consideration of Moving Tooth Load in Gear Crack Propagation Predictions. *8th International Power Transmission and Gearing Conference,* NASA Technical Memorandum - 2000-210227.

Li, S. (2007) Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications. *Mechanism and Machine Theory 42*, 88-114.

Pehan, S., et al. (2008) Investigation of crack propagation scatter in a gear tooth's root. *Engineering Fracture Mechanics 75*, 1266-1283

Sfakiotakis, V.; Anifantis, N. (2002) Finite element modeling of spur gearing fractures. *Finite Elements in Analysis and Design 39*, 79-92

Ševčík, M.; Vrbka, M. (2007) Computational modelling of spur gear using FEM. Konference diplomových prací. Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně, s. 1-5.

Wang, J. (2003) *Numerical and Experimental Analysis of Spur Gears in Mesh*. Curtin 249s. Disertační práce na Curtin University of Technology.

Zafošnik, B., et al. (2005) Modelling of surface crack growth under lubricated rolling–sliding contact loading. *International Journal of Fracture 134*, 127-149

Zafošnik, B., et al. (2007) A fracture mechanics model for the analysis of micro-pitting in regard to lubricated rolling–sliding contact problems. *International Journal of Fatigue 29*, 1950-1958