



National Conference with International Participation

ENGINEERING MECHANICS 2008

Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2008

NUMERICAL ANALYSIS OF THE FOKKER-PLANCK EQUATION FOR SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE AND ADDITIVE NOISES

J. Náprstek, R. Král *

Summary: *Fokker-Planck (FP) equation is frequently used when the response of the dynamic system subjected to additive and/or multiplicative random noises is investigated. It provides the probability density function (PDF) representing the key information for further study of the dynamic system. Various analytic and semi-analytic solution methods have been developed for various systems to obtain results requested. However numerical approaches offer a powerful alternative. In particular Finite Element Method (FEM) seems to be very effective. A couple of single dynamic linear/non-linear systems under additive and multiplicative random excitations are discussed using FEM as a solution tool of the FP equation.*

1. Úvod

Existuje řada metod analýzy odezvy a stability dynamických soustav s vnějším buzením, které má povahu náhodných procesů proměnných v čase. Dá se říci, že klasické metody řešení těchto problémů založené na korelačních či spektrálních principech jsou efektivní pouze v případě lineárních úloh s aditivním gaussovským buzením. I když o dílčím použití těchto metod lze uvažovat i v obecnějších případech, jejich účinnost je třeba vždy velmi dobře zvážit. Postup řešení by se mohl i v jednoduchých případech snadno odchýlit od původního záměru a výsledek by nedával odpověď na původní zadání. Důvodem je řada skrytých vlastností těchto metod opírajících se v podstatě o princip superpozice. Tuto silnou zdrženlivost je tedy třeba uplatnit ve všech případech multiplikativního náhodného buzení a zejména potom u nelineárních soustav.

Mnohé z těchto potíží tlumí anebo odstraňuje využití teorie Markovových procesů. Metody na nich založené jsou mnohem obecnější z hlediska typu a skladby dynamické soustavy. Obsahují však v sobě některé podmínky omezující přípustné typy vstupních procesů. Obvykle je nutné předpokládat, že budící procesy jsou Wienerova typu. V takovém případě lze hustotu pravděpodobnosti odezvy (PDF) popsat Fokker-Planckovou (FP) rovnicí, která připouští evoluci PDF v čase. Pokud se tuto funkci podaří najít s přijatelnou přesností, dá se říci, že získaný výsledek je přirozeným rozšířením deterministického výsledku. Plně popisuje náhodný charakter odezvy a umožňuje odvodit i další speciální vlastnosti, jako je její frekvenční skladba a další.

2. Fyzikální soustava a Fokker-Planckova rovnice

Chování dynamické soustavy se obvykle popisuje pomocí diferenciální soustavy v normálním tvaru. Tato soustava je obecně podrobena současně deterministickým a náhodným budícím procesům, které jsou funkčemi času. Náhodné účinky se zavádějí odděleně ve tvaru jistých

* Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ing. Radomil Král

Institute of Theoretical and Applied Mechanics ASCR, v.v.i.; Prosecká 76, 190 00 Praha 9

naprstek@itam.cas.cz, kral@itam.cas.cz

lineárních kombinací vstupních procesů. Dá se říci, že dostatečně obecnou soustavu lze vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(\mathbf{x}, t) + g_{jr}(\mathbf{x}, t)w_r(t), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{2n}], \quad n - \text{počet stupňů volnosti} \quad (1)$$

$w_r(t)$ - gaussovské bílé šumy s konstantní vzájemnou hustotou $K_{rs} = \mathbf{E}\{w_r \cdot w_s\}$;
 $r, s = 1, m, \dots, m$ - počet působících šumů

$\mathbf{E}\{\cdot\}$ - operátor matematického středu v gaussovském smyslu,

$f_j(\mathbf{x}, t), g_{jr}(\mathbf{x}, t)$ - spojité deterministické funkce stavových proměnných \mathbf{x} a času; $j = 1, 2n$.

Je-li možné vstupní procesy w_j, w_r pokládat za spojité bílé gaussovské šumy, lze soustavě (1) přiřadit FP rovnici pro neznámou PDF odezvy v proměnných \mathbf{x}, t :

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\kappa_j(\mathbf{x}, t) \cdot p(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (\kappa_{jk}(\mathbf{x}, t) \cdot p(\mathbf{x}, t)) \quad (2)$$

$$\kappa_j(\mathbf{x}, t) = f_j(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} K_{rs} \cdot g_{ls}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial g_{jr}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l}; \quad \kappa_{jk}(\mathbf{x}, t) = K_{rs} \cdot g_{jr}(\mathbf{x}, t) g_{ks}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

$\kappa_j(\mathbf{x}, t)$ - koeficienty driftu; $\kappa_{jk}(\mathbf{x}, t)$ - koeficienty difuze.

Rovnice (2) je lineární parabolická parciální diferenciální rovnice. Lze ji najít i s podrobným odvozením a analýzou různých vlastností v řadě monografií prvotně věnovaných stochastickým diferenciálním rovnicím, viz např. Gihman & Skorohod (1972), Bolotin (1979), Pugachev & Sinitsyn (1987), Lin & Cai (1995), Arnold (1998) a mnoho dalších. Mimoto existují stovky speciálně zaměřených časopiseckých publikací na toto téma uveřejněné během několika deseti-letí. Existují složitější a obecnější varianty FP rovnice obvykle odvozené pro speciální skupiny úloh (negaussovské vstupy, problémy optimální filtrace, identifikace, atd.). Nejčastěji uváděný je však její základní tvar (2).

Je možné uvažovat i o obecnějších formulacích soustavy (1), kdy náhodné a deterministické vnější účinky jsou zcela provázány a popsány vždy jednou nelineární funkcí na pravé straně příslušné rovnice. Ve fyzikálních aplikacích se však objevují jen výjimečně a zmíněné monografie se jimi podrobněji nezabývají. I v případech, kdy je nezbytné nelineární vstup náhodného procesu respektovat, je možné si obvykle pomocí zavedením pomocných proměnných a takovýto vstup modelovat jako výsledek nelineární filtrace bílého šumu zavedeného prostřednictvím lineární kombinace jako v základním případě.

Pokud jsou koeficienty driftu a difuze nezávislé na čase, je z hlediska aplikací obvykle snaha zaměřit se na stacionární řešení FP rovnice, neboť dává nejdůležitější informace o dlouhodobém chování systému. Je-li odezva systému stacionární, hustota pravděpodobnosti odezvy není závislá na čase, a proto se anuluje levá strana rovnice (2).

V řadě případů je však nezbytné hledat nestacionární řešení rovnice (2), i když jsou koeficienty driftu a difuze nezávislé na čase. Důvodem může být fyzikální podstata problému, nutnost posoudit přechodový jev anebo skutečnost, že stacionární řešení neexistuje, např. Soize (2001), Náprstek (2005). Úloha se v takovém případě značně komplikuje, neboť je třeba vyřešit otázky případné post-kritické konvergence řešení, apod. Nicméně FP rovnice v základním tvaru je lineární, a proto se dá uvažovat o analogiích různých metod, které jsou známy z klasické deterministické analýzy. Je však nezbytné respektovat specifické vlastnosti operátoru (2), které mohou použitelnost těchto metod v konkrétních případech ovlivňovat či znemožňovat.

Otázkou je, jaké metody zvolit pro řešení této rovnice v případě konkrétní mechanické soustavy. Prací na toto téma bylo uveřejněno tisíce. I když existují některé případy analytického řešení v uzavřeném tvaru, viz zmíněné monografie a řadu dalších prací, převážná většina publikací se zaměřuje na přibližná řešení různého typu.

První skupinu metod lze nazvat postupy semi-analytickými. Jsou založeny na doplňcích a úpravách čistě analytických výsledků. Využívají např. vlastnosti Boltzmannovy entropie pravděpodobnosti, pracují s různými variačními principy, využívají rozkladů podle stochastických momentů či kumulantů, atd. Asymptotické metody jsou shrnutы v monografii Grasman, van Herwaarden (1999). Mnoho dalších metod je popsáno v monografiích, jako jsou již výše zmíněné knihy, nebo v mnoha speciálních článcích, viz např. Weinstein, Benaroya (1994).

Druhá skupina vychází z čistě numerických postupů. Obsáhlý přehled o stavu poznání ve využití numerických metod pro řešení FP rovnice byl uveřejněn kolektivem dvaceti autorů Schuëller (edt.) (1997). Před tímto i po tomto datu byla publikována řada prací, které se věnují využití metody konečných prvků (MKP) pro řešení FP rovnice. První pokusy o využití MKP při řešení FP rovnice sahají do sedmdesátých let. Za první skutečně systematické práce zavádějící MKP do této problematiky lze pokládat práce Bergmana, Spencera a spoluautorů. Jmenujme na příklad: Bergman & Heinrich (1981), Bergman & Spencer (1992), Spencer & Bergman (1993), Bergman et al. (1996), Masud & Bergman (2005), atd. Možnost numerického řešení FP rovnice pomocí MKP připomněli nedávno Náprstek & Král (2008). Přestože přínos těchto prací je nesporný, autorská základna se stále nezdá být příliš široká. Zatímco dřívější citované práce se zaměřují na soustavy s jedním stupněm volnosti, cílem autorů této studie je dopracovat se v blízké budoucnosti k běžné řešitelnosti PDF pro dynamické soustavy s mnoha stupni volnosti.

Mnozí autoři se zabývali různými aspekty speciálních variant MKP v souvislosti s Galerkinovou metodou uplatněnou na FP rovnici, která není samoadjungovaná, a proto vyžaduje nasazení variačních metod založených na operacích ortogonalizace. Otázkám stacionárních řešení se věnují např. Langley (1985), či Langtangen (1991), multiscale nástrojům mezi mnoha jinými např. Masud & Khurram (2004). Účinnost MKP v řešení FP rovnice se zdá veliká. Nástroj MKP umožňuje bez velkých potíží opustit jinak obtížně překonatelný předpoklad gaussovských šumů ve vstupech v soustavě (1). Pokud se FP rovnici podaří sestavit i pro jiné vstupní šumy, např. poissonovské řetězce, metoda funguje poměrně spolehlivě, viz např. Wojtkiewicz et al. (1999) s návazností na další práce, např. Vasta (1995), Grigoriu (1996), Di Paola & Vasta (1997). Formulace řešení, kdy některé stavové proměnné mohou nabývat hodnot pouze na daném intervalu a na hranicích mají složitější okrajové podmínky, nečiní potíže.

Zároveň však nelze přehlédnout některé nedostatky MKP v této aplikaci. Zavést skutečně deterministickou počáteční podmínu pro hustotu pravděpodobnosti ve formě Diracovy funkce je v podstatě nemožné, což ovšem nemusí příliš vadit. Horší je otázka růstu počtu nezávislých proměnných s počtem stupňů volnosti soustavy (1). Tím ostatně trpí i analytické metody řešení. Zde se toto úskalí projevuje několika faktory. Prvním je nutnost vyhodnocovat integrály na konečných prvcích v prostoru o velkém počtu dimenzí (při n stupních volnosti má prostor dimenze 2^n). Další nepříjemností je exponenciálně rostoucí rozsah soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, která vznikne diskretizací výrazu na pravé straně rovnice (2). Problematické může být řešení stacionárního problému (s nulovou levou stranou v rovnici (2)) zejména na nekonečně velké mnohorozměrné oblasti, kdy mizí částečně nebo úplně diskrétní povaha vlastních čísel FP operátoru. Sestavíme-li ke konkrétní soustavě (1) FP rovnici (2), musíme pokaždé sestrojit nový konečný prvek, neboť v koeficientech driftu a difuze rovnice (2) jsou obsaženy veškeré informace o skladbě soustavy (1).

Přesto se zdá, že v řadě prakticky významných případů výhody převažují a MKP by tak mohla poskytnout cenný efektivní prostředek pro řešení FP rovnice. Uvedeme několik ukázkových příkladů soustav s jedním stupněm volnosti s buzením aditivním i multiplikativním gaussovským šumem. K některým výsledkům řešení MKP existuje analytické řešení ať už v uzavřeném tvaru nebo přibližné, které se dá odvodit z Boltzmanova řešení, viz např Lin & Cai (1995). Současně je vhodné si uvědomit, že soustavu (1) je obvykle možné po transformaci do Itoova tvaru podrobit

přímému numerickému řešení. Je však nezbytné přihlédnout k její stochastické povaze, viz např. Kloeden, Platen (1992). To nám umožní porovnat výsledky získané prostřednictvím MKP s výsledky analytických výpočtů a s výsledky přímého numerického řešení.

Nejprve upozorníme na několik vlastností konečných prvků a metod numerické integrace použitých v daném případě. Vzhledem k nesymetrii FP operátoru a jeho dalším vlastnostem byla za základ výpočtu zvolena Galerkinova metoda v Petrovově úpravě. Z důvodů vyloučení jakékoli sekundární nehomogenity byla oblast rozdělena ve všech případech na čtvercové prvky o stejné velikosti, bez jakéhokoli zhušťování v místech "dramatičtějších" změn PDF. FP rovnice je lineární a v konkrétních případech, o kterých budeme hovořit, pouze ve dvou prostorových proměnných $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. V tomto případě tedy prozatím odpadá problém výrazné mnohorozměrnosti prvků a je možné integrovat klasickými postupy. Vzhledem k tomu, že FP rovnice je v proměnných \mathbf{x} 2. řádu, postačí prvky s lineární approximací mezi uzlovými body, abychom splnili požadavky na stupeň "hladkosti" approximačních funkcí a získali tak záruku konvergence, pokud řešení FP rovnice existuje a je stabilní. Zavedeme tedy v oboru jednoho prvku approximační funkci, viz obr. 1, složenou z tvarových funkcí:

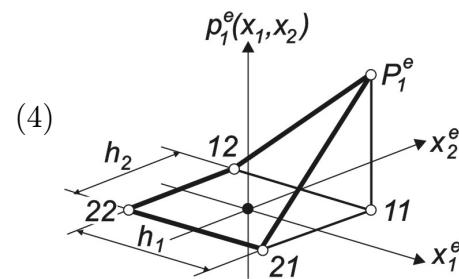
$$p^e(x_1^e, x_2^e) = \sum_{ij=1}^2 P_{ij}^e \cdot p_{ij}^e(x_1^e, x_2^e), \quad p_{ij}^e(x_1^e, x_2^e) = p_{ij}^e, \\ p_{11}^e = (h_1 + 2x_1^e)(h_2 + 2x_2^e)/4h_1h_2, \\ p_{12}^e = (h_1 - 2x_1^e)(h_2 + 2x_2^e)/4h_1h_2, \\ p_{21}^e = (h_1 + 2x_1^e)(h_2 - 2x_2^e)/4h_1h_2, \\ p_{22}^e = (h_1 - 2x_1^e)(h_2 - 2x_2^e)/4h_1h_2.$$

x_1^e, x_2^e - souřadnice v rámci jednoho konečného prvku,

p_{ij}^e - tvarové funkce,

P_{ij}^e - hodnoty PDF v uzlech prvku,

h_1, h_2 - rozměry prvku.



Obrázek 1: Schéma approximace PDF v oboru konečného prvku.

Jako jednoduchou ukázkou předpokládejme, že v soustavě působí pouze jediný aditivní šum w_a , ($n = 2, m = 1$). Pro funkce g_{jr} tedy zavedeme konstanty: $g_{11} = g_1 = 0, g_{21} = g_2 = 1$. Aproximaci (4) dosadíme do rovnice (2). Dalšími kroky v Galerkin-Petrovově smyslu se dopracujeme k maticím $\mathbf{M}^e, \mathbf{S}^e$ (2×2) pro jeden prvek. Prvky těchto matic plynou ze vzorců:

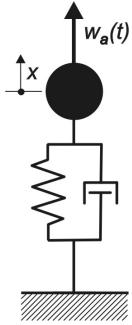
$$M_{ij}^e = \sum_{kl=1}^2 \int_{\Omega} p_{ij}^e p_{kl}^e dx_1 dx_2, \quad \Omega \text{ -- integrační oblast jednoho prvku} \\ S_{ij}^e = \sum_{kl=1}^2 \int_{\Omega} \left[p_{ij}^e p_{kl}^e \left(\frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e, t)}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + p_{ij}^e \left(f_1(x_1^e, x_2^e, t) \frac{\partial p_{kl}^e}{\partial x_1} + f_2(x_1^e, x_2^e, t) \frac{\partial p_{kl}^e}{\partial x_2} \right) + K_{aa} \frac{\partial p_{ij}^e}{\partial x_2} \frac{\partial p_{kl}^e}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 \quad (5)$$

Matice (5) po transformaci do globální souřadné soustavy načteme do globálních matic \mathbf{M}, \mathbf{S} . Tím získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic:

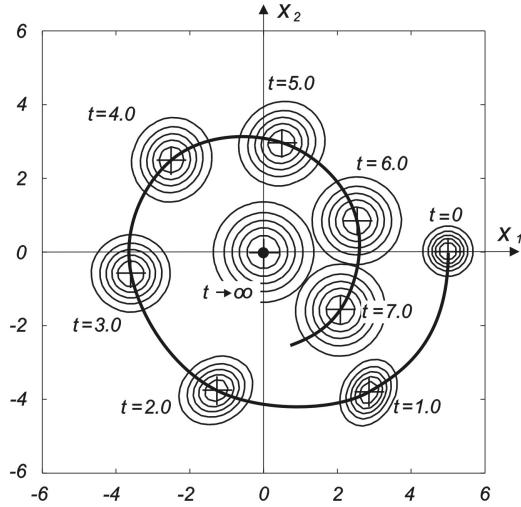
$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{S} \mathbf{P} \quad (6)$$

kde \mathbf{P} je vektor hodnot PDF v uzlových bodech sítě. Prvky matice \mathbf{S} budou vzhledem ke struktuře (1) obecně funkciemi času.

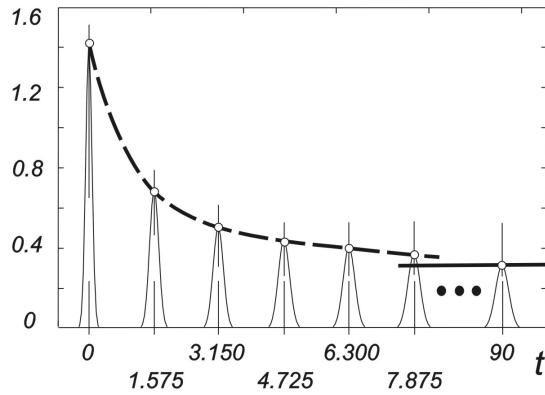
Pokusy o vyšší approximaci s Lagrangeovými polynomy anebo spojitými derivacemi v uzlech (l'Hermite) se neosvědčily. Výpočetní časy se prodloužily a numerická stabilita nezlepšila. Jako integrační metoda soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (6) se nejlépe osvědčil postup



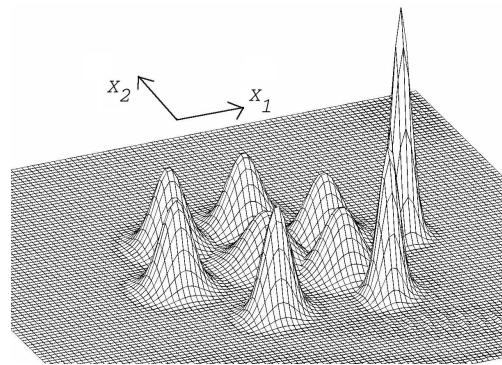
Obrázek 2: Schéma lineární soustavy o jednom stupni volnosti.



Obrázek 3: Vrstevnicové zobrazení vývoje PDF odezvy lineární soustavy o jednom stupni volnosti od zahájení buzení ($t = 0$) do stacionárního stavu.



Obrázek 4: Řez PDF x_1 (výchylka) ve vybraných okamžicích od počáteční podmínky do stacionárního stavu.



Obrázek 5: Axonometrické zobrazení vývoje PDF odezvy lineární soustavy o jednom stupni volnosti od zahájení buzení ($t = 0$) do stacionárního stavu ($t = 90s$).

typu prediktor-korektor založený na Adamsově algoritmu. Hlavním použitým nástrojem pro vývoj prvku a proces vlastních výpočtů byl COMSOL MULTIPHYSICSTM.

3. Lineární soustava s jedním stupněm volnosti

Předpokládejme, že lineární soustava o jednom stupni volnosti, viz obr. 2, je zatížena aditivním šumem a multiplikativním šumem v útlumu. Příslušná diferenciální rovnice má tvar:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_b(1 + w_b)\dot{x} + \omega_0^2 \cdot x &= w_a \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 - 2\omega_b x_2 - 2\omega_b x_2 w_b + w_a \end{aligned} \tag{7}$$

Procesy $w_b = w_b(t)$, $w_a = w_a(t)$ jsou stacionární centrované gaussovske bílé šumy. Pro jejich hustoty můžeme zavést symboly: K_{bb} , K_{ab} , K_{aa} . Koeficienty driftu a difuze vyplývají ze vzorce (3):

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= x_2, \quad \kappa_2 = -[\omega_0^2 x_1 + 2\omega_b x_2 (1 - \omega_b K_{bb}) + \omega_b K_{ab}] \\ \kappa_{22} &= 4 \cdot K_{bb} \cdot \omega_b^2 x_2^2 - 4 \cdot K_{ab} \cdot \omega_b x_2 + K_{aa} \end{aligned} \tag{8}$$

FP rovnici dostaneme dosazením (8) a následnou úpravou z obecného tvaru (2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} = & - \frac{\partial(x_2 p)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\omega_0^2 x_1 + 2\omega_b x_2 (1 - \omega_b K_{bb}) + \omega_b K_{ab}) p \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[(4 \cdot K_{bb} \cdot \omega_b^2 x_2^2 - 4 \cdot K_{ab} \cdot \omega_b x_2 + K_{aa}) p \right]\end{aligned}\quad (9)$$

Dá se ukázat, viz např. Pugachev & Sinitsyn (1987), Lin & Cai (1995), že stacionární řešení rovnice (9), to jest po uplynutí nekonečně dlouhé doby po zahájení buzení, lze formulovat ve tvaru Boltzmannova řešení:

$$p(x_1, x_2) = N \cdot \exp(-\omega_b(\omega_0^2 x_1^2 + x_2^2)/K_{aa}) \quad (10)$$

kde N je normalizační faktor, jehož velikost je odvozena z požadavku, aby integrál z funkce (10) po celé oblasti byl roven jedné.

Pro numerické řešení rovnice (9) volíme parametry soustavy takto: $\omega_0^2 = 1.0$, $\omega_b = 0.05$, $K_{aa} = 0.2$, $K_{ab} = K_{bb} = 0.0$. Buzení je zahájeno v okamžiku $t = 0$, přičemž předpokládáme, že odezva soustavy nevychází z klidové polohy, ale z bodu:

$$x_{1,0} = 5.0, \quad x_{2,0} = 0.0 \quad (11)$$

Počáteční podmínku pro PDF volíme ve tvaru:

$$p(x_1, x_2, 0) = N \cdot \exp(-\omega_0^2(x_1 - x_{1,0})^2/\sigma^2) \exp(-(x_2 - x_{2,0})^2/\sigma^2) \quad (12)$$

kde $N = 1/2\pi\sigma^2$, $\sigma^2 = 1/9$. Počáteční podmínka (12) se pro malou hodnotu σ^2 blíží k původně požadované Diracově funkci. Připouští, že pohyb soustavy nezačíná v bodě $(x_{1,0}, x_{2,0})$ s naprostou jistotou, jak by odpovídalo Diracově funkci, ale s možností nepatrných odchylek kolem tohoto bodu, které se řídí podle PDF dané vzorcem (12).

Průběh numerického řešení nepřinášel potíže, které by vedly k nutnosti jakkoli výpočet upravovat. Změna tvaru PDF od počáteční podmínky až po stacionární stav je spíše jen kvantitativní, neznamená zásadní změny tvaru PDF v rozmezí tohoto časového intervalu. Celý proces numerické integrace zde můžeme chápát jako jistou analogii procesu dynamické relaxace, kdy nasadíme jistý počáteční odhad konečného statického řešení. Zde tuto úlohu přebírá příslušná PDF, která odpovídá stacionárnímu, a tudíž na čase nezávislému stavu. Počáteční i konečný stav ve tvaru exponenciální funkce v obou proměnných x_1, x_2 tedy nezakládá potenciální příčinu ohrožení numerické stability.

Vybrané výsledky řešení MKP jsou znázorněny graficky na obr. 3 - 5. Z vrstevnicového zobrazení na obr. 3 je zřejmé, že vrchol PDF odezvy sleduje v rovině x_1, x_2 exponenciální spirálu, která odpovídá spirále získané deterministickým výpočtem vlastního kmitání této soustavy pro počáteční podmínky (11). Počátek je atraktor, ke kterému soustava směřuje do klidu (deterministický případ bez vnějšího buzení) anebo ke stacionárnímu náhodnému pohybu, jenž je popsán součinem dvou Gaussových funkcí (10).

Pokles vrcholu PDF s růstem času je nejlépe patrný z obr. 4. Jednotlivé části obrázku znázorňují řez PDF ve směru x_1 - výchylka. Ukazuje se opět přibližně exponenciální pokles z hodnoty dané počáteční podmínkou až k vodorovné asymptotě naznačené v pravé dolní části obrázku. Tato tendence je zřejmá i z axonometrického znázornění vývoje PDF na obr. 5. Porovnáme-li hodnoty numerického řešení MKP s Boltzmannovým řešením (11), zjistíme, že shoda je téměř absolutní. Kontrolní výpočet spektrální metodou vedl taktéž k identickým výsledkům.

Konkrétní zadání hustot vstupních šumů prakticky vyloučilo ze hry parametrický šum w_b . Cílem však bylo především demonstrovat účinnost řešení MKP na řešení rovnice (9) za obvyklých podmínek porovnatelných se známými výsledky. Pro zvyšující se hustotu parametrického šumu se objeví efekty parametrické ztráty stability ve stochastickém smyslu.

4. Nelineární soustava Duffingova typu

Duffingovu rovnici lze psát v základním a normálním tvaru při aditivním a multiplikativním buzení bílým šumem takto:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_b \dot{x} - \omega_0^2 \cdot x(1 + w_s - \alpha^2 x^2) &= w_a \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega_0^2 x_1(1 - \alpha^2 x_1^2) - 2\omega_b x_2 + \omega_0^2 x_1 w_s + w_a \end{aligned} \quad (13)$$

Ze vzorců (3) vyplývají koeficienty driftu a difuze:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= x_2, \quad \kappa_2 = \omega_0^2 x_1(1 - \alpha^2 x_1^2) - 2\omega_b x_2, \\ \kappa_{11} = \kappa_{12} = \kappa_{21} &= 0, \quad \kappa_{22} = K_{ss} \omega_0^4 x_1^2 + 2K_{as} \omega_0^2 x_1 + K_{aa} \end{aligned} \quad (14)$$

Na základě (13), (14) píšeme FP rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial(x_2 p)}{\partial x_1} - \frac{\partial[(\omega_0^2 x_1(1 - \alpha^2 x_1^2) - 2\omega_b x_2)p]}{\partial x_2} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2[(K_{ss} \cdot \omega_0^4 x_1^2 + 2 \cdot K_{as} \cdot \omega_0^2 x_1 + K_{aa})p]}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Soustava (13) plyne při absenci multiplikativního šumu z jednoduchého hamiltoniánu, a proto lze také tentokrát snadno formulovat Boltzmannovo řešení stacionární verze rovnice (15) ($K_{ss} = K_{as} = 0$) ve tvaru:

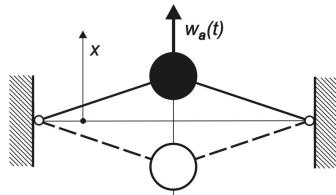
$$p(x_1, x_2) = N \cdot \exp\left(\frac{\omega_b \omega_0^2 x_1^2}{K_{aa}}(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x_1^2)\right) \cdot \exp\frac{-\omega_b x_2^2}{K_{aa}} \quad (16)$$

Rovnicí (13) lze vystihnout pohyb Miesessova vzpěradla buzeného bílým šumem, viz obr. 6. Lineární část tuhosti je záporná, a proto má soustava v počátku $(0, 0)$ nestabilní stacionární bod. Dva stabilní stacionární body mají polohu $(\pm 1/\alpha)$. Míra repulsivity v počátku závisí na vztahu obou částí tuhosti a na hustotě multiplikativního šumu w_s .

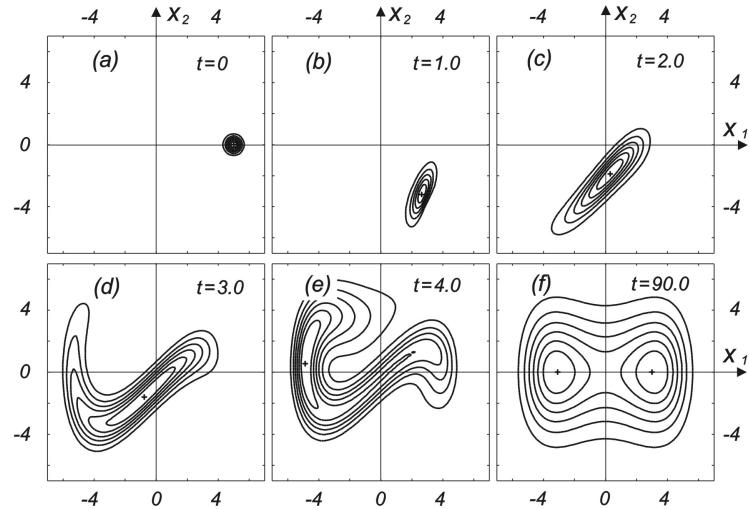
Rozdělení oblasti na prvky a ostatní okolnosti výpočtu jsou podobné jako v předchozím případě: $\omega_0^2 = 1.0$, $\omega_b = 0.05$ a míra nonlinearity $\alpha^2 = 0.1$. Zahájíme-li proces řešení z bodu $(x_{1,0}, x_{2,0})$ podle (11) a počáteční podmínky (12), můžeme opět sledovat vývoj PDF v čase. Proberme podrobněji případ samotného aditivního buzení.

Ukázalo se, že hustotu budícího procesu K_{aa} je nutno zavést větší než je jistá prahová hodnota. Tento jev vyplývá z vlastností dynamické relaxace. Výsledná stacionární PDF (pokud existuje) se nesmí lišit od počáteční podmínky příliš zásadně. Z numerických experimentů vyplynulo, že takovou hodnotou je $K_{aa} = 4.0$. Průběh integrace pro tuto hodnotu hustoty buzení můžeme sledovat na vrstevnicových diagramech na obr. 7. Část (a) zobrazuje počáteční podmínku. Po 1, 2 a 3s, části obr. (b) - (d), je PDF stále unimodální a matematický střed nesleduje spirálu podobnou lineárnímu případu. Zvláště v případě (d) - 3s je tvar PDF bizární. Po 4s již tvar PDF nabírá tvar se dvěma extrémy. Po 90s, část (f), je PDF souměrná podle obou os a má dvě rovnocenná maxima. Převýšení nad sedlovým bodem není příliš velké. Pro $K_{aa} = 4.0$ je vidět závěr tohoto procesu na prostorovém grafu v obr. 8 (a) $t = 4s$ a pro stacionární stav v obr. 8 (b), který nastane zhruba po 60-90s. V závěrečné fázi, obr. 8 (a) je patrná periodická alternace absolutního vrcholu PDF mezi oběma extrémy. Tento proces se postupně utlumí během přechodu do stacionárního stavu, kdy PDF je symetrická v obou souřadných osách.

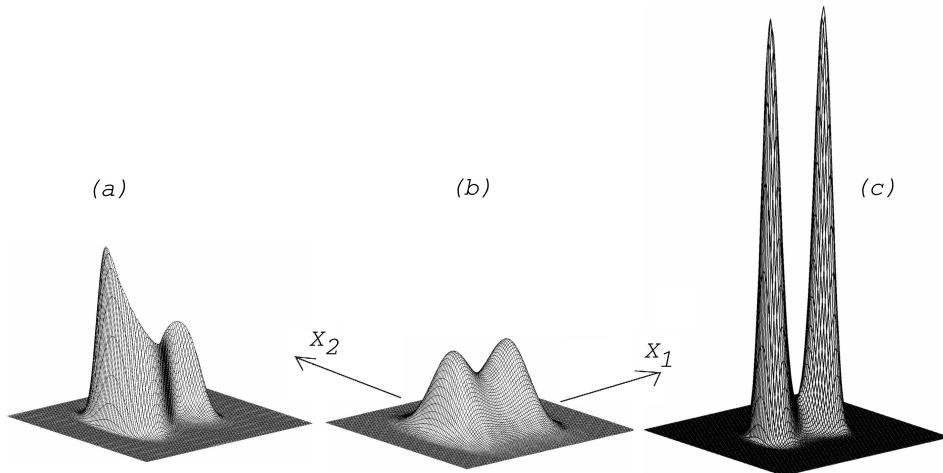
Snížíme-li hustotu buzení na hodnotu $K_{aa} = 0.2$ a startujeme z počáteční podmínky (12), proces integrace selže. Dá se však provést, pokud za jeho počáteční podmínu volíme stacionární



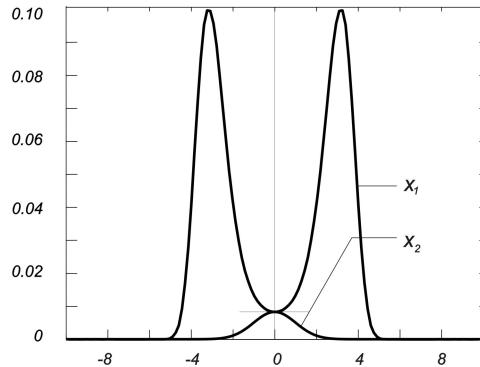
Obrázek 6: Schéma Duffingovy soustavy o jednom stupni volnosti.



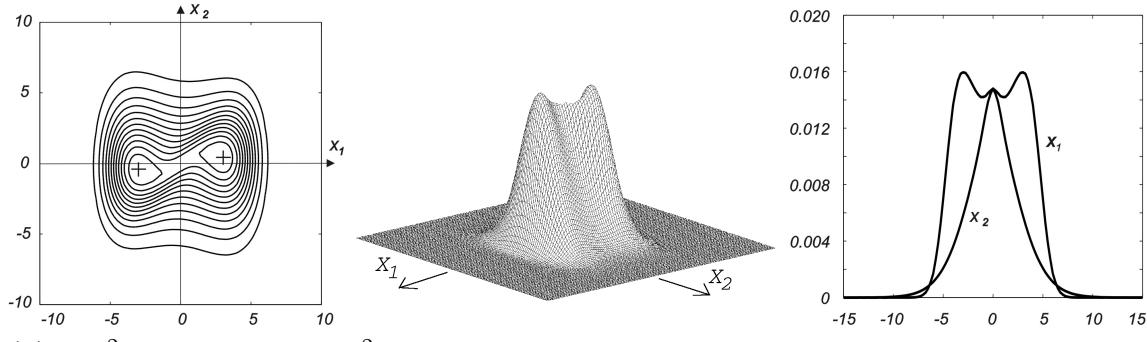
Obrázek 7: Vrstevnicové diagramy vývoje v čase PDF odezvy Duffingovy soustavy; hustota buzení $K_{aa} = 4.0$.



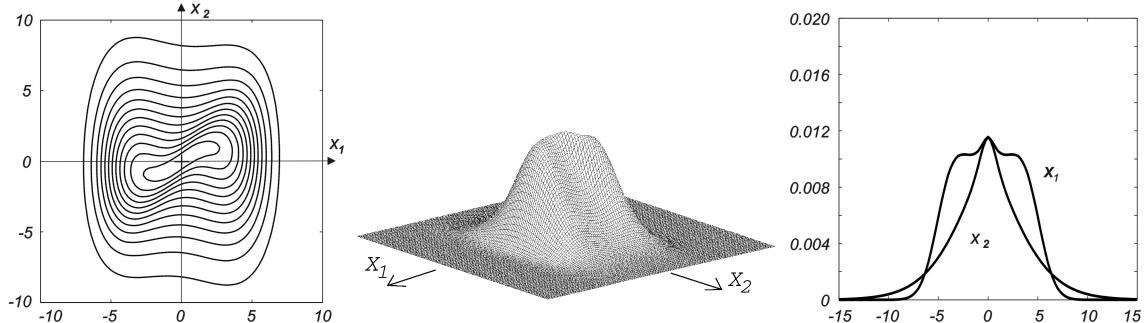
Obrázek 8: Prostorové zobrazení stavu PDF Duffingovy soustavy pro $K_{aa} = 4.0$ v okamžiku $t = 4s$ a ve stacionárním stavu - části (a), (b); stacionární PDF pro $K_{aa} = 0.2$ - část (c).



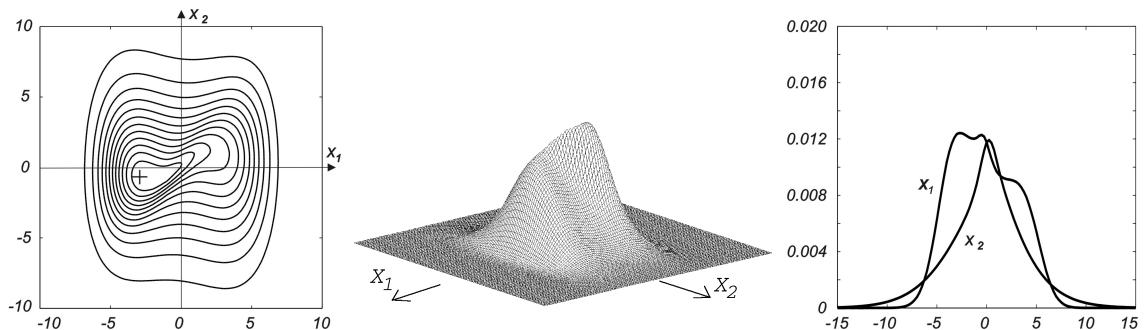
Obrázek 9: Řezy PDF pro Duffingovu soustavu ve stacionárním stavu pro $K_{aa} = 0.2$: x_1 -výchylka, x_2 -rychlosť.



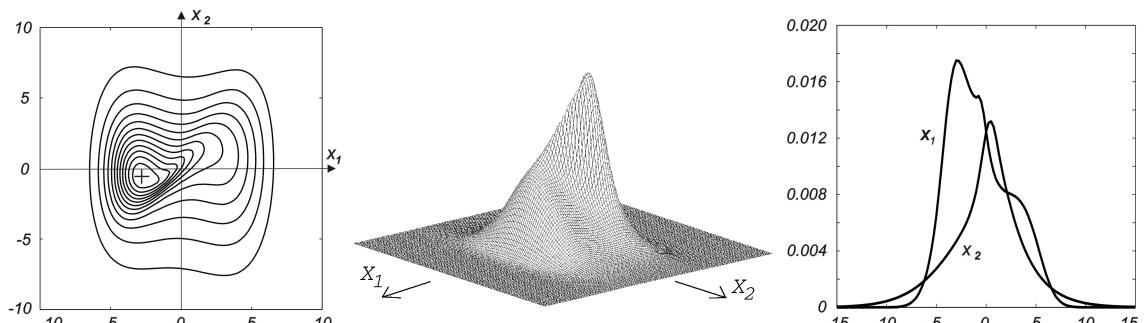
(a) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.1, \alpha^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{ss} = 0.25, K_{as} = 0.0.$



(b) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.1, \alpha^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{ss} = 0.50, K_{as} = 0.0.$



(c) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.1, \alpha^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{ss} = 0.50, K_{as} = 0.25.$



(d) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.1, \alpha^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{ss} = 0.50, K_{as} = 0.50.$

Obrázek 10: Duffingova soustava ve stacionárním stavu při současném působení aditivního a multiplikativního náhodného buzení; budící procesy w_a, w_s nezávislé ($K_{as} = 0$) - části (a), (b); procesy w_a, w_s závislé ($K_{as} > 0$) - části (c), (d).

stav platný pro $K_{aa} = 4.0$. Výsledek tohoto výpočtu je znázorněn v axonometrii na obr. 8 (c). Převaha obou stabilních stacionárních bodů je velmi výrazná. Totéž je zřejmé i z řezů výsledné plochy PDF podle obou os x_1, x_2 , viz obr. 9. PDF pro rychlosť odpovídá obvyklé Gaussově křivce, zatímco PDF výchylky se soustřeďuje kolem obou rovnovážných bodů (bimodální charakter). Dodejme, že shoda numerických a analytických výsledků je také tentokrát vynikající.

Pokud je hustota šumu w_a malá, převažuje pohyb ve stacionárním stavu kolem jedné ze dvou rovnovážných poloh, viz obr. 8 (c). Při stoupající hustotě tato výrazná vlastnost postupně mizí a pro velké hodnoty hustoty buzení se kvalitativně PDF odezvy příliš neliší od výsledku, který odpovídá čistě kubické charakteristice tuhosti. V takovém případě bimodální charakter PDF postupně slabne, viz obr. 8 (b). Potom přechází témař v unimodální jako u lineární soustavy, viz předchozí kapitola. Kvalitativní rozdíl však zůstává vzhledem k dominantní kubické části tuhosti. Za zcela určité souhry parametrů soustavy a buzení dojde ke stochastické rezonanci. Vyznačuje se pravidelnými přeskoky mezi oběma rovnovážnými body. Kolem každé z těchto rovnovážných poloh potom dochází k náhodnému pohybu o relativně malém lokálním rozptylu. Tento quasi-periodický děj je poměrně stabilní, pokud přesně zachováme zmíněnou konfiguraci parametrů.

Z (16) je dále patrné, že PDF ve směru x_1 - výchylka a x_2 - rychlosť jsou nezávislé. Se vzrůstem útlumu se snižuje rozdíl mezi lokálním extrémem v sedlovém bodě a maximem v obou stabilních stacionárních bodech. Tyto poznatky vyplývají nejen ze známého vzorce (16), ale také z MKP řešení FP rovnice (15). Jak potvrzuje (16) a MKP řešení rovnice (15) při samotném aditivním buzení, PDF je ve stacionárním stavu symetrická podle obou os x_1, x_2 , viz obr. 7 (f).

Věnujme se nyní výsledkům znázorněným na obr. 10. Týkají se stacionární odezvy pro čtyři kombinace zadání. Trojice obrázků v každé z částí (a) - (d) znamená vrstevnicový diagram PDF, axonometrické zobrazení téže plochy a svislé řezy vedené osami x_1, x_2 . Samotná soustava a hustota aditivního šumu je vždy stejná ($\omega_0^2, \omega_b, \alpha^2, K_{aa}$). Mění se hustota multiplikativního šumu K_{ss} a vzájemná hustota obou K_{as} . Stoupá-li hustota multiplikativního šumu, klesá bimodální výraz odezvy. Extrémy PDF v bodech $(\pm 1/\alpha)$ mizí a v počátku se začíná objevovat malý vrchol, porovnej obr. 10 (a), (b). Tento vrchol se zvětšuje se vzrůstem hustoty K_{ss} . Postupně získá dominanci a zcela potlačí oba vrcholy v bodech $(\pm 1/\alpha)$. Tento jev lze vysvětlit zvyšující se efektivitou multiplikativního šumu, který postupně potlačuje vliv negativní lineární části tuhosti. Chování soustavy pak spíše připomíná případ, kdy tuhost je vždy kladná a nejpravděpodobnější poloha soustředěné hmoty je v počátku.

Pokud jsou oba šumy nezávislé, plocha PDF je ve stacionárním stavu stále symetrická podle svislé osy vedené počátkem, i když oproti stavu bez multiplikativního šumu ztrácí symetrii podle os x_1, x_2 a zejména při vrcholech se stáčí v kladném směru, viz obr. 10 (a), (b). Jakmile je však $K_{as} > 0$, obraz PDF ztrácí symetrii a vznikající jediný vrchol se přesouvá do oblasti blízké bodu $(-1/\alpha, 0)$. Vývoj této tendence můžeme sledovat na serii obr. 10 (a) - (c).

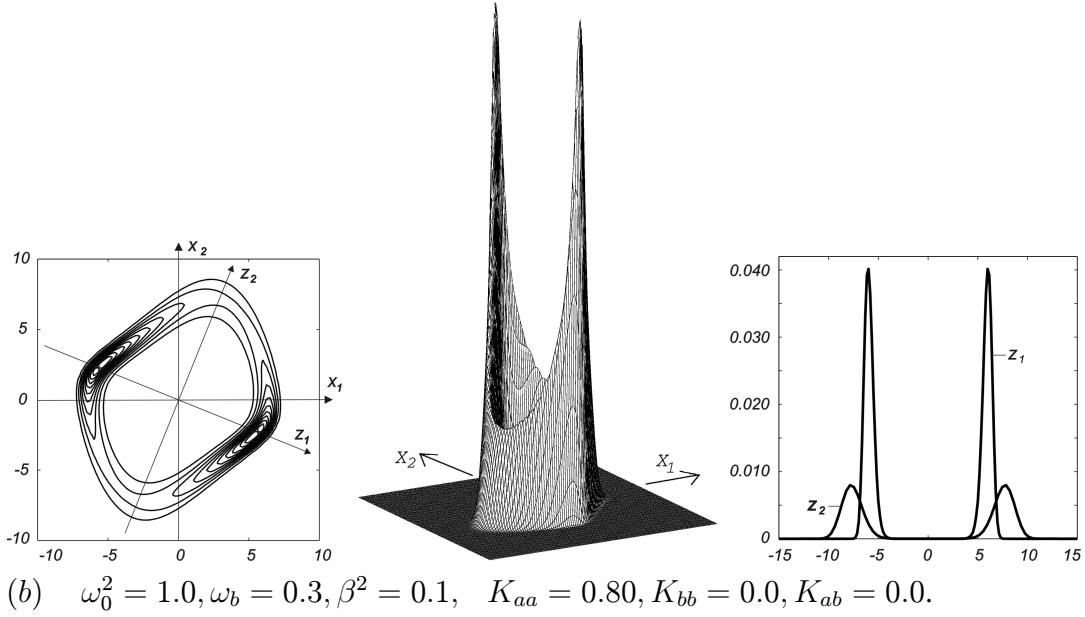
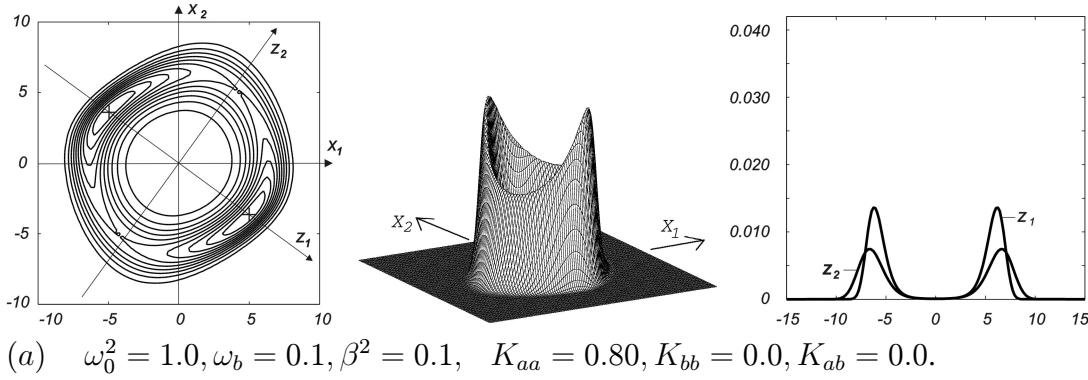
5. Nelineární soustava Van der Polova typu

Van der Polova rovnice v základním a normálním tvaru s aditivním a multiplikativním buzením buzením bílým šumem má tvar:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega_b(1 + w_b - \beta^2 x^2)\dot{x} + \omega_0^2 \cdot x &= w_0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 + 2\omega_b(1 - \beta^2 x_1^2)x_2 + 2\omega_b x_2 w_b + w_a \end{aligned} \tag{17}$$

Příslušné koeficienty driftu a difuze podle (3):

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= x_2, \quad \kappa_2 = -\omega_0^2 x_1 + 2\omega_b x_2(1 - \beta^2 x_1^2 + \omega_b K_{bb}) + \omega_b K_{ab}, \\ \kappa_{11} &= \kappa_{12} = \kappa_{21} = 0, \quad \kappa_{22} = 4K_{bb}\omega_b^2 x_1^2 + 4K_{ab}\omega_b x_2 + K_{aa} \end{aligned} \tag{18}$$



Obrázek 11: Van der Polova soustava ve stacionárním stavu při působení aditivního náhodného buzení (bez multiplikativního buzení); nižší, resp. vyšší lineární útlum: část (a), resp. část (b).

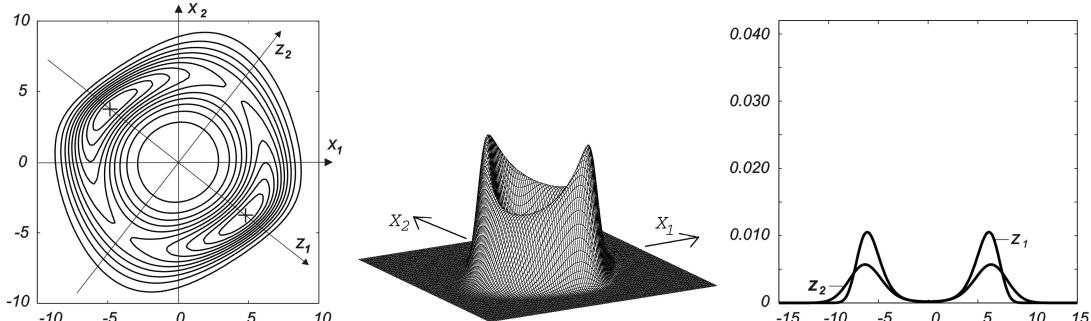
Van der Polově soustavě (17) odpovídá FP rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & - \frac{\partial (x_2 p)}{\partial x_1} + \frac{\partial [(\omega_0^2 x_1 - 2\omega_b x_2(1 - \beta^2 x_1^2 + \omega_b K_{bb}) - \omega_b K_{ab})p]}{\partial x_2} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [(4 \cdot K_{bb} \cdot \omega_b^2 x_2^2 + 4 \cdot K_{ab} \omega_b x_2 + K_{aa})p]}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (19)$$

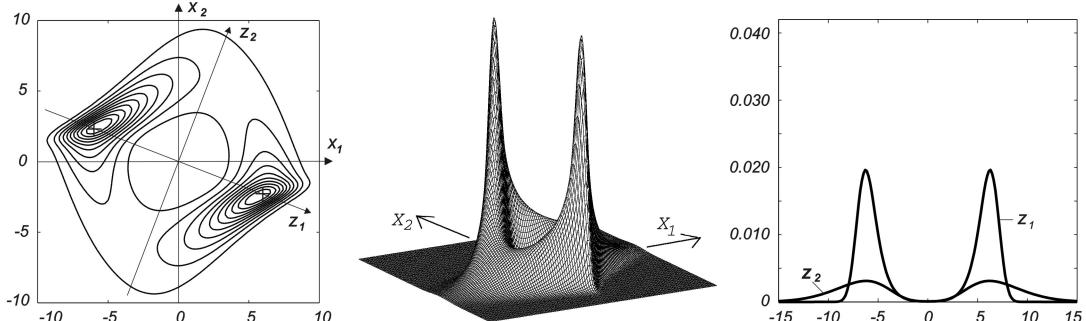
Na rozdíl od předchozích dvou případů neexistuje známé jednoduché řešení stacionární verze rovnice (19) obdobné Boltzmannovu řešení (10) nebo (16). Stav pro $t \rightarrow \infty$ je však možné porovnat s řadou přibližných výsledků analytického řešení, viz např. Lin & Cai (1995).

Výpočty byly provedeny ve dvou skupinách. V první skupině byla počáteční podmínka pro numerické řešení zavedena ve tvaru (12) při $x_{1,0} = 5.0, x_{2,0} = 0.0$, tj. s počáteční výchylkou. Za podmínek, že $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.05, \beta^2 = 1.0$, nastane stacionární stav zhruba po 60 až 90 vteřinách. Tak jako při analytických rozborech potvrdilo se i zde, že tvar PDF ve stacionárním stavu a délka přechodového procesu jsou velmi citlivé vůči hladině hustoty buzení K_{aa} .

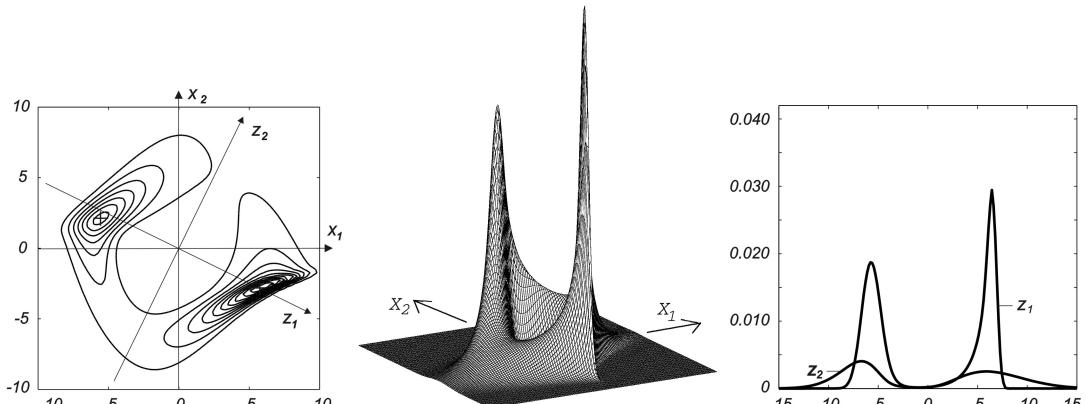
Z hlediska průběhu samotných výpočtů dodejme, že zavedení hustoty K_{aa} libovolnou hodnotou na intervalu $K_{aa} \in (0.2, 6.0)$ nečinilo během výpočtu žádné potíže. Rozdělení na dvě čí



(a) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.1, \beta^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{bb} = 0.50, K_{ab} = 0.0.$



(b) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.3, \beta^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{bb} = 0.50, K_{ab} = 0.0.$



(c) $\omega_0^2 = 1.0, \omega_b = 0.3, \beta^2 = 0.1, K_{aa} = 0.80, K_{bb} = 0.50, K_{ab} = 0.50.$

Obrázek 12: Van der Polova soustava ve stacionárním stavu při současném působení aditivního a multiplikativního náhodného buzení; budící procesy w_a, w_b : nezávislé ($K_{ab} = 0$) - části (a), (b); procesy w_a, w_b závislé ($K_{ab} > 0$) - část (c).

více etap, tak jako v případě Duffingovy soustavy, nebylo nutné.

Pro poměrně vysokou hodnotu $K_{aa} = 4.0$ při absenci multiplikativního buzení má přechodový proces PDF od zahájení buzení až po stacionární stav rysy podobné s vývojem pro Duffingovu soustavu za srovnatelných podmínek. Pro tuto hodnotu hustoty aditivního buzení připomíná výsledný stacionární stav PDF výsledek pro Duffingovu soustavu, i když pootočený kolem svislé osy cca o $\pi/4$. To znamená dva dominantní stacionární body a jedno nestacionární sedlo v počátku. Stočení osy maxim PDF (přibližně osa z_1) oproti ose x_1 je typickým znakem PDF odezvy ve všech zkoumaných případech. S tím souvisí skutečnost, že vrstevnicový diagram není nikdy souměrný podle os x_1, x_2 ani podle z_1, z_2 . Z toho vyplývá asymetrie vzestupné a sestupné fáze odezvy ve smyslu širokého pásma frekvenční skladby odezvy.

Pokud sledujeme podrobně při daném zadání přechodový proces, zjistíme, že poté co vývoj PDF opustí výrazně unimodální podobu odpovídající počáteční podmínce, střídavě roste jeden a současně klesá druhý vrchol bimodálního tvaru. Tento jev je zde ještě výraznější než v případě Duffingovy soustavy, jak jsme viděli v předchozí kapitole. Také tentokrát však postupně ztrácí alternující charakter a směřuje ke stacionárnímu stavu, který se vyznačuje středovou symetrií PDF vzhledem k počátku.

K výrazně rozdílné podobě PDF ve stacionárním stavu se dostaneme pro malé hodnoty K_{aa} . Je-li $K_{aa} = 0.2$, dospěje PDF až k téměř rotačnímu tvaru s hlubokou "proláklinou" kolem počátku. Je to stav, kdy soustava působí silně jako rezonátor se samobuzením, které vyplývá z negativní lineární části útlumu. Tento jev je dán existencí stabilního limitního cyklu, který je za uvedených podmínek zadání deterministické části úlohy a při nízké hodnotě K_{aa} pro Van der Polovu rovnici typický.

Ve druhé skupině výpočtů byl zaveden multiplikativní šum, popř. respektována jeho korelace s aditivním buzením. Vycházelo se z počáteční podmínky (12) při $x_{1,0} = 0, x_{2,0} = 0$, tj. z "téměř jisté" klidové polohy. Při některých kombinacích vstupních dat bylo třeba výpočet provést v několika etapách podobně, jako se postupovalo u Duffingovy soustavy pro nízké hodnoty K_{aa} .

Porovnejme pět typických případů pro středně velkou hustotu aditivního šumu $K_{aa} = 0.8$ při $\omega_0^2 = 1.0, \beta^2 = 0.1$. V obr. 11, 12 jsou zobrazeny výsledky týkající se pouze stacionárního stavu. Jejich uspořádání je stejné, jako na obr. 10 pro Duffingovu soustavu. Ve všech pěti případech se na vrstevnicovém diagramu rýsuje (na různém stupni ostrosti) limitní cyklus typický pro Van der Polovu rovnici v dané oblasti parametrů deterministické části zadání. Obr. 11 se týká případu pro samotné aditivní buzení, tedy navazující na první skupinu výpočtů. Vliv lineární části útlumu na portrét odezvy je značný. Pro vyšší hodnoty ($\omega_b = 0.3$) se PDF výrazně větší měrou soustřeďuje kolem limitního cyklu, viz obr. 11 (b). Odpovídající axonometrické zobrazení ukazuje silnou proměnnost PDF na hřebenové křívce s nejpravděpodobnější polohou ve dvou bodech ležících na ose z_1 . Tento obraz demonstriuje téměř deterministickou odezvu v jednoduchém limitním cyklu. Z obr. 11 (a) ($\omega_b = 0.1$) je viditelná silnější stochastická povaha odezvy a dominantní role první harmonické v limitním cyklu. Pokles stochastické a vzhůru deterministické složky odezvy se vzhůru útlumu ω_b vyplývá z posilování záporné lineární části útlumu, a tudíž ze zvyšování míry nestability soustavy v počátku. Odezva je pak dána převážně procesem restabilizace vlivem nelineární části útlumu, který získá kladné hodnoty až ve větších výchylkách.

Při působení multiplikativního šumu v lineární části útlumu obraz limitního cyklu při větších hodnotách ω_b začíná ztrácet unimodální charakter a zjevně nabírá vyšší harmonické složky. PDF má sklon se více rozšiřovat směrem k počátku a omezovat se směrem ven mimo útvar patrný ve vrstevnicových diagramech na obr. 12 (a), (b). Zavedením pozitivní vzájemné korelace obou šumů ztrácí obraz PDF symetrii podle počátku, viz obr. 12 (c), tak jako u Duffingovy soustavy. Popisované tendenze závislosti polohy nejdůležitějších bodů PDF na parametrech soustavy a vnějšího buzení jsou patrný ze svislých řezů v obr. 11 (a), (b) a v obr. 12 (a) - (c), které jsou vedeny osami z_1, z_2 . Z porovnání obr. 12 (a) a (b) vyplývá, že v případě spolupůsobení multiplikativního šumu se vzhůru útlumu ω_b uplatňuje ještě výrazněji než při buzení pouze aditivním šumem.

6. Závěr

Fokker-Planckova rovnice představuje významný nástroj pro analýzu pravděpodobnostního popisu odezvy dynamických soustav podrobených aditivnímu a multiplikativnímu náhodnému buzení gaussovskými bílými šumy. Řešení této rovnice analytickými či semi-analytickými prostředky však má omezené možnosti. Zdá se, že Metoda konečných prvků může zaujmout významné místo mezi použitelnými metodami numerického řešení této rovnice. Velmi pozitivní je skutečnost, že MKP je schopna odhalit řadu jevů, které zůstávají skryty pro analytické postupy. Ukázkové příklady tří soustav s jedním stupněm volnosti a s aditivním a multiplikativním buzením (lineární, Duffingova, Van der Polova) ukázaly dobré numerické vlastnosti MKP při zavedení hustoty vnějšího buzení v poměrně širokém rozsahu. Porovnání analytických a přibližných výsledků s výsledky analýzy MKP ukázalo téměř dokonalou shodu.

Je však třeba respektovat řadu specifických vlastností Fokker-Planckova operátora, kterými se liší od operátorů typických pro lineární či nelineární mechaniku přetvárných těles. Hlavními rozdíly je nesymetrie FP operátora, nutnost definovat jej na oblasti většinou s teoreticky nekončeně velkými rozmezími, které musí být přiměřeně omezeny. MKP však přináší ze své podstaty výhodu, která je nenahraditelná při použití analytických metod. Tou je snadné zavedení prakticky libovolných tvarů oblasti, na nichž se má rovnice řešit, a jakékoli matematicky přípustné a věcně smysluplné kombinace okrajových podmínek. Nestandardní je obecně velká mnohorozměrnost prvků. Ta bude vyžadovat zavést speciální metody integrace založené např. na metodě Monte-Carlo. V každém případě však nelze počítat se složitějšími typy approximace.

Přes optimistické počáteční zkušenosti zůstává řada otevřených otázek. Ty se týkají numerické spolehlivosti a stability při zavádění různých typů multiplikativních šumů, mnohorozměrných prvků, formulace počátečních podmínek, rozeznání nutnosti etapizace výpočtu, atd. Možné cesty k řešení některých z těchto otázek jsou však již naznačeny v předchozím textu.

Poděkování

Autor děkuje Grantové agentuře ČR (grant č. 103/06/0099), grantové agentuře AV ČR (grant č. A2 071401) a výzkumnému záměru ÚTAM AV0Z 20710524, za jejichž podpory vznikla tato práce.

Literatura

- Arnold L. (1998) *Random Dynamical Systems*. Springer, Berlin.
- Bergman L.A., Heinrich J.C. (1981) Petrov-Galerkin finite element solution for the first passage probability and moments of first passage time of the randomly accelerated free particle. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **27**, 345-362.
- Bergman L.A., Spencer B.F. (1992) Robust numerical solution of the transient Fokker-Planck equation for nonlinear dynamical systems. In: *Proc. IUTAM Symposium Nonlinear Stochastic Mechanics* (N.Bellomo, F.Casciati eds). University Turin, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, pp.49-60.
- Bergman L.A., Spencer B.F., Wojtkiewicz S.F., Johnson E.A. (1996) Robust numerical solution of the Fokker-Planck equation for second order dynamical system under parametric and external white noise excitation. In: *Proc. Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics* (W. Langford, W. Kliemann, N. Sri Namachchivaya, eds). American Mathematical Society, pp. 23-27.
- Bolotin V.V. (1979) *Random Vibrations of Elastic Systems* (in Russian). Nauka, Moskva.
- Di Paola M., Vasta M. (1997) Stochastic integro-differential and differential equations of nonlinear systems excited by parametric poisson pulses. *Int.Jour. Non-linear Mechanics*, **8**, 855-862.
- Gihman I.I., Skorohod A.V. (1972) *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin.

- Grasman J., van Herwaarden, O.A. (1999) *Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Applications*. Springer, Berlin.
- Grigoriu M. (1996) Response of dynamic systems to Poisson white noise. *Jour. Sound and Vibration*, **195**, 375-389.
- Kloeden, P.E., Platen E. (1992) *Numerical solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin.
- Langley, R.S. (1985) A finite element method for the statistics of nonlinear random vibration. *Jour. Sound Vibration*, **101**, 41-54.
- Langtangen H.P. (1991) A general numerical solution method for Fokker-Planck equations with applications to structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **6**, 33-48.
- Lin Y.K., Cai G.Q. (1995) *Probabilistic Structural Dynamics - Advanced Theory and Applications*. McGraw - Hill, New York.
- Masud A., Khurram R. (2004) A multiscale-stabilized finite element method for the advection-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 1997-2018.
- Masud A., Bergman, L.A. (2005) Application of multi-scale finite element methods to the solution of the Fokker-Planck equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 1513-1526.
- Náprstek J. (2005) Some properties and applications of eigen functions of the Fokker-Planck operator. In: *Proc. Engineering Mechanics 2005* (V.Fuis et al. eds). ÚMT VUT Brno, Svatka, CD ROM, 12pp.
- Náprstek, J., Král, R. (2008) Outline of numerical solution of the Fokker-Planck equation by means of the Finite Element Method. In: *Proc. Dynamics of Machines 2008* (L. Pešek edt.). IT ASCR, Praha, 2008, pp.77-86.
- Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. (1987) *Stochastic Differential Systems - Analysis and Filtering*. J. Willey, Chichester.
- Schueller G.I. (edt.) (1997) A state of the art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics - Special Issue*, **12**, 197-32.
- Spencer B.F., Bergman L.A. (1993) On the numerical solution of the Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Dynamics*, **4**, 357-372.
- Soize, C. (2001) Transient responses of dynamical systems with random uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **17**, pp.363-372.
- Vasta M. (1995) Exact stationary solution for a class of non-linear systems driven by non-normal delta-correlated processes. *Int.Jour. Non-linear Mechanics*, **30**, 407-418.
- Weinstein, E.M., Benaroya, H. (1994) The van Kampen expansion for the Fokker-Planck equation of a Duffing oscillator. *Jour. Statistical Physics*, **77**, p.667-679.
- Wojtkiewicz S., Johnson E., Bergman L.A., Grigoriu M., Spencer B.F. (1999) Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: Solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **168**, 73-89.