National Conference with International Participation

ENGINEERING MECHANICS 2008

Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2008

AUTO-PARAMETRIC CHARACTER OF A STRUCTURE COUPLED WITH A SPHERICAL PENDULUM DAMPER

J. Náprstek, C. Fischer *

Summary: *The non-linear auto-parametric system with three degrees of freedom is investigated. System consists of a slender structure with one degree of freedom coupled with a spherical pendulum damper with two degrees of freedom. A harmonic external force is considered. A semi-trivial solution and its stability are analyzed. Special attention is paid to the resonance domain. The semi-trivial solution can lose its stability and various post-critical regimes occur. Three different types of the resonance domain are investigated. Their main properties depend significantly on dynamic parameters of the system and of the external excitation amplitude. Practical recommendations are focused to keep stability of the semi-trivial state.*

1. Úvod

Ve stavební i strojní praxi se vyskytují různé typy zařízení, které slouží ke zmírnění dynamických účinků vnějšího buzení. Je možné zmínit například štíhlé stavební konstrukce vystavené dynamickým účinkům větru, základy rotačních strojů, dopravní prostředky anebo potrubí, na které působí buzení umělého původu. Útlumu kmitání je věnováno mnoho knih a odborných článků, viz např. den Hartog (1956), Náprstek (1998, 2000), Náprstek, O.Fischer (1999), Pospíšil et al. (2006). Mezi nejpopulárnější tlumicí systémy patří kyvadlové tlumiče a podobná zařízení. Jsou laciné, nenáročné na údržbu a spolehlivé, viz např. Koloušek et al. (1984), Náprstek, Pirner (2002). Dynamické chování kyvadla je však výrazně složitější než všeobecně používaný lineární model s jedním stupněm volnosti, pracující pouze ve vertikální rovině (xz), viz obr. 1. Tento model je možno akceptovat pouze v případě, že amplitudy buzení v bodě závěsu jsou velmi malé a frekvence nezasahuje do rezonanční oblasti kyvadla.

Chování reálného kyvadla popisuje nelineární systém. V závislosti na jeho parametrech pak dochází k různým typům rezonančního chování, kdy systém ztrácí stabilitu. Systém se dostane do některého z postkritických stavů. Následky mohou být pro tlumenou konstrukci fatální. Proto je třeba důkladně studovat podmínky vzniku a stability nelineární prostorové odezvy.

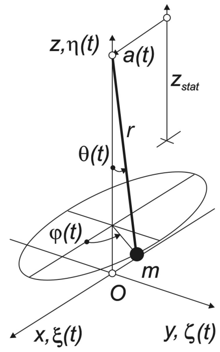
Postkritické stavy v rezonanční oblasti mohou být stabilní či nestabilní, stacionární či nestacionární. S rostoucí frekvencí buzení systém na počátku rezonanční oblasti opustí kmitání ve vertikální rovině (xz) a samovolně se rozkmitá v příčném směru. Pohyb získá prostorový charakter. Nad horním okrajem rezonanční oblasti příčná složka pohybu zmizí a obnoví se stabilní řešení ve vertikální rovině (xz). Existence a úroveň stability jednotlivých typů řešení při průchodu rezonanční oblastí závisí na geometrii kyvadla a struktuře buzení. Širokopásmové buzení, zvláště má-li náhodný charakter, může v praxi vést k odezvě, která opustí obvyklý pohyb ve vertikální rovině. Kyvadlo ztratí svůj účel a začne konstrukci ovlivňovat negativně.

*Ing. Jiří Náprstek, DrSc., RNDr. Cyril Fischer, PhD.
Institute of Theoretical and Applied Mechanics ASCR, v.v.i.; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
naprstek@itam.cas.cz, fischerc@itam.cas.cz

2. Matematický model s kinematickým buzením

Uvažujme v prvním kroku sférické kyvadlo s kinematickým buzením $a(t)$ v bodě závěsu. Sférické kyvadlo je třeba popisovat jako silně nelineární autoparametrický systém. Odezva je v nejjednodušším případě popsána dvojicí nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu, které jsou vzájemně provázány pouze nelineárními členy.

Autoparametrické systémy byly v posledních desetiletích intenzivně studovány. Teoretické základy pro práci s takovými systémy uveřejnili patrně poprvé Haxton, Barr (1974). Během času se objevila řada prací pojednávajících analytické, numerické i experimentální aspekty autoparametrických systémů, viz např. Hatwal et al. (1983), Bajaj et al. (1994), avšak zejména Tondl, Nabergoj et al. (1994a, 1994b, 1994c, 1997) a mnoho dalších prací. K dispozici je rovněž řada monografií, např. Tondl et al. (1991, 2000), které prezentují shrnující přehled použitelných metod a výsledků.



Obrázek 1: Schema soustavy a použitých souřadnic.

Matematický model má tvar soustavy dvou Lagrangeových rovnic druhého druhu doplněných lineárním tlumením, které vycházejí z kvadratického tvaru Rayleighovy funkce. Diferenciální soustavu přibližně vyjádříme v kartézských souřadnicích podle obr. 1. Důvodem je průhlednější mechanismus přechodu prostorového pohybu v pohyb rovinný a možnost přímé limitace poruch k nule. Podrobné odvození a další rozbor, viz Náprstek, C.Fischer (2007):

$$\left.\begin{array}{ll} \ddot{\xi} + \dfrac{1}{2r^2}\xi(\xi^2+\zeta^2)^{\bullet\bullet} + \dfrac{1}{2}\omega_b\dot{\xi} + \omega_0^2(\xi + \dfrac{1}{2r^2}\xi(\xi^2+\zeta^2)) \;=\; -\ddot{a}\;, & (a) \\ \ddot{\zeta} + \dfrac{1}{2r^2}\zeta(\xi^2+\zeta^2)^{\bullet\bullet} + \dfrac{1}{2}\omega_b\dot{\zeta} + \omega_0^2(\zeta + \dfrac{1}{2r^2}\zeta(\xi^2+\zeta^2)) \;=\; 0\;. & (b) \end{array}\right\} \quad (1)$$

kde $\omega_0^2 = g/r$ je vlastní frekvence lineárního kyvadla.

Jednotlivé rovnice uvedené soustavy jsou na lineární úrovni vzájemně nezávislé, jsou provázané pouze nelineárními členy. Každou ze složek odezvy ξ, ζ je možno považovat za libovolně malou nezávisle na druhé a spojitě ji limitovat k nule.

Abychom prozkoumali semi-triviální řešení, dosaďme do rovnic (1) $\zeta = 0$ a jako buzení použijme harmonickou funkci:

$$a(t) = a_0 \sin\omega t\;. \quad (2)$$

Zatímco (1b) je identicky splněno, z rovnice (1a) dostaneme:

$$\ddot{\xi}(1+\frac{\xi^2}{r^2}) + \frac{1}{r^2}\xi\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\omega_b\dot{\xi} + \omega_0^2\xi(1+\frac{1}{2r^2}\xi^2) - a_0\omega^2\sin\omega t = 0\;. \quad (3)$$

Řešení rovnice (3) budeme hledat ve tvaru:

$$\xi_0 = a_c\cos\omega t + a_s\sin\omega t\;. \quad (4)$$

Koeficienty a_c, a_s jsou pro obecné řešení závislé na čase: $a_c = a_c(t)$, $a_s = a_s(t)$. Pokud však pro danou frekvenci buzení ω existuje stacionární řešení, budou $a_c(t), a_s(t)$ konvergovat pro rostoucí t ke konstantám. Na druhou stranu, pokud pro nějaké budicí frekvence bude mít řešení silně nestacionární charakter, budou amplitudy pro měnící se t ležet na periodické nebo i jiné křivce. Proto je možno koeficienty a_c, a_s považovat za konstantní pouze tehdy, když očekáváme stacionární odezvu, viz např. monografie Arnold (1978), Guckenheimer, Holmes (1983), atd.

Jako první krok se pokusíme vyhodnotit frekvenční charakteristiky systému, který se pohybuje pouze ve vertikální rovině (xz), tzn. za podmínek daných rovnicí (3). Tato frekvenční charakteristika bude platná pouze pro takové budicí frekvence, pro které existuje stacionární řešení. Vztah (4) dosadíme do rovnice (3) a uplatníme operaci harmonické rovnováhy. Po úpravách získáme následující podmínky:

$$\left.\begin{array}{ll} a_c\left((\omega_0^2-\omega^2)+\dfrac{1}{2r^2}\left(\dfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)(a_c^2+a_s^2)\right)+\dfrac{1}{2}\omega\omega_b\cdot a_s \;=\; 0\;, & (a)\\ a_s\left((\omega_0^2-\omega^2)+\dfrac{1}{2r^2}\left(\dfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)(a_c^2+a_s^2)\right)-\dfrac{1}{2}\omega\omega_b\cdot a_c \;=\; a_0\cdot\omega^2\;. & (b)\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Umocněním a součtem obou rovnic získáme vztah pro amplitudu odezvy:

$$R_\xi^2\left[\omega^2\omega_b^2+4\left((\omega_0^2-\omega^2)+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)R_\xi^2\right)^2\right]-4\omega^4a_0^2 \;=\; 0\;,\quad R_\xi^2=a_c^2+a_s^2\;. \qquad (6)$$

Pokud zvyšujeme a_0 nebo ω_b (amplitudu buzení nebo koeficient tlumení), můžeme získat sadu rezonančních křivek jako funkci budicí frekvence. Podle počtu reálných kořenů rovnice (6), v závislosti na koeficientech a_0, ω_b, nemusí rezonanční křivky v některých intervalech ω reprezentovat jednoznačné funkce. Obr. 2 (a) ukazuje sadu rezonančních křivek pro pevnou amplitudu buzení a rostoucí koeficient útlumu, obr. 2 (b) pak případ fixovaného koeficientu tlumení a rostoucí amplitudu buzení. Obrázky byly vytvořeny s uvážením následujících parametrů kyvadla: $r = 1.0m, g = 9.81ms^{-2}, \omega_0 = 3.13s^{-1}$. Z hlediska fyzikální interpretace obou obrázků je třeba mít na paměti omezení vyplývající ze zjednodušení zavedených soustavou rovnic (1). Měknoucí charakteristika systému i oblasti nestability pocházející z víceznačnosti rezonančních křivek jsou dostatečně patrné.

Jako druhý krok posoudíme stabilitu semi-triviálního řešení. Vymezení intervalů stability umožní určit definiční obory parametrů, pro které není zaručena existence stacionárního řešení (4). Řešení soustavy (1) napíšeme ve tvaru součtu semi-triviálního řešení ξ_0, viz rovnice (4), a malých perturbací u resp. v v jednotlivých souřadnicích:

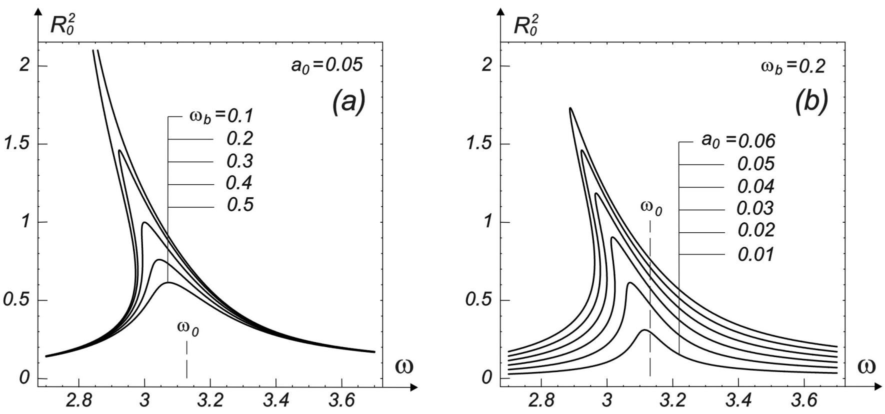
$$\left.\begin{array}{llll} \xi \;=\; \xi_0 \;+\; u & \quad (u=u(t))\;, & \quad (a)\\ \zeta \;=\; 0 \;+\; v & \quad (v=v(t))\;. & \quad (b)\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Po dosazení (7) do soustavy (1) využijeme faktu, že výraz (4) je řešení rovnice (1a). V souladu s předpokladem ponecháme v rovnici pouze členy s prvními mocninami u, v a jejich derivací. V okolí hranic stability je možné obě perturbace psát v následujícím tvaru:

$$\left.\begin{array}{ll} u(t) \;=\; u_c\cos\omega t+u_s\sin\omega t\;, & \quad (a)\\ v(t) \;=\; v_c\cos\omega t+v_s\sin\omega t\;. & \quad (b)\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Aproximace (8) dosadíme do soustavy (1) a uplatníme operaci harmonické rovnováhy. Výsledkem budou dvě nezávislé algebraické soustavy pro u_c, u_s a v_c, v_s:

$$\left.\begin{array}{r} \left[(\omega_0^2-\omega^2)+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)(3a_c^2+a_s^2)\right]u_c+ \\ \left[\tfrac{1}{2}\omega\omega_b+\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)a_ca_s\right]u_s \;=\; 0\;, \\ \left[\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)a_ca_s-\tfrac{1}{2}\omega\omega_b\right]u_c+ \\ \left[(\omega_0^2-\omega^2)+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)(a_c^2+3a_s^2)\right]u_s \;=\; 0\;, \end{array}\right\} \qquad (9)$$



Obrázek 2: Rezonanční křivky jako amplitudy semi-triviálního řešení; (a) konstantní amplituda buzení, proměnný útlum; (b) konstantní útlum, proměnná amplituda buzení.

$$\left.\begin{aligned}
&\left[(\omega_0^2-\omega^2)+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)a_c^2+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2+\omega^2\right)a_s^2\right]v_c+ \\
&\qquad\qquad\qquad\left[\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)a_ca_s+\tfrac{1}{2}\omega\omega_b\right]v_s \;=\; 0\;, \\
&\left[\tfrac{1}{r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)a_ca_s-\tfrac{1}{2}\omega\omega_b\right]v_c+ \\
&\qquad\left[(\omega_0^2-\omega^2)+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)a_s^2+\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2+\omega^2\right)a_c^2\right]v_s \;=\; 0\;.
\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Soustavy rovnic (9), (10) jsou homogenní a nezávislé na amplitudě buzení, závisí pouze na budicí frekvenci a parametrech dynamického systému. Abychom dostali netriviální řešení u_c, u_s, resp. v_c, v_s, determinanty soustav (9), resp. (10) musí být nulové. Tím jsou definovány dvě nezávislé podmínky:

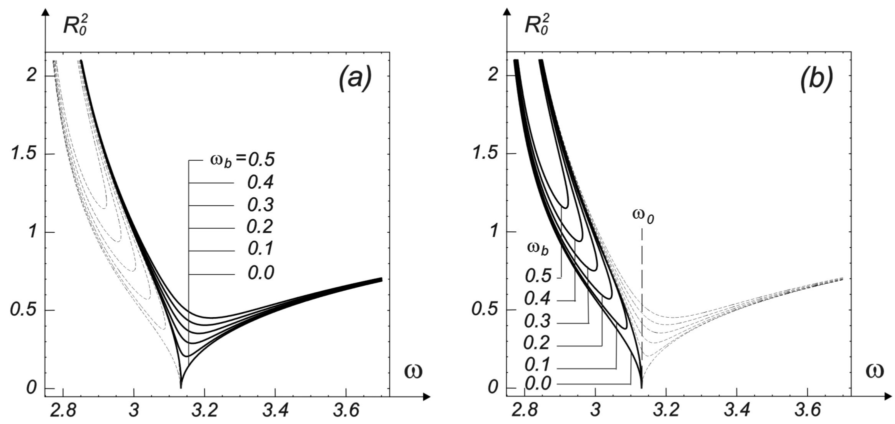
$$\left.\begin{aligned}
&R_u^2\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)\left(3R_u^2\tfrac{1}{2r^2}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)+4(\omega_0^2-\omega^2)\right)+ \\
&(R_u^2=u_c^2+u_s^2)\qquad\qquad\qquad +(\omega_0^2-\omega^2)^2+\tfrac{1}{4}\omega^2\omega_b^2 \;=\; 0\;,\qquad (a) \\
&R_v^2\left(\tfrac{\omega_0^2}{2r^2}(\omega_0^2-\omega^2)+R_v^2\tfrac{1}{4r^4}\left(\tfrac{3}{4}\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\tfrac{1}{4}\omega_0^2+\omega^2\right)\right)+ \\
&(R_v^2=v_c^2+v_s^2)\qquad\qquad\qquad +(\omega_0^2-\omega^2)^2+\tfrac{1}{4}\omega^2\omega_b^2 \;=\; 0\;.\qquad (b)
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Rovnice (11) je možno interpretovat jako podmínky, které rozdělují rovinu (R_0^2, ω) na stabilní a nestabilní oblast.

Obr. 3 shrnuje hranice stability obou typů pro koeficienty útlumu $\omega_b \in (0.0; 0.5)$, jak vyplývají z rovnice (11). Plné čáry v obr. 3 (a) odpovídají hranicím oblasti stability nulové hodnoty proměnné ζ. Tuto křivku nazveme hranicí stability ζ. Překročení jednotlivých křivek zleva-zprava nebo zdola znamená, že souřadnice ζ ztrácí stabilní nulovou hodnotu a odezva systému získá charakter prostorové křivky. Má-li odezva opustit nestabilní oblast, je nutné buďto snížit amplitudu buzení pod naznačený limit, anebo zvýšit-snížit frekvenci.

Plné čáry v obr. 3 (b) ukazují hranice, kde odezva soustavy pro konkrétní a_0, ω_b ztrácí jednoznačnost a odpovídající rezonanční křivka má dvě stabilní a jednu nestabilní část. Tuto křivku budeme nazývat hranice stability ξ.

Obr. 4 přehledně ukazuje vztah rezonančních křivek a hranic stability pro různé konfigurace parametrů. Obrázky ve sloupcích odpovídají pevné hodnotě útlumu a proměnné amplitudě buzení, zatímco obrázky v jednotlivých řádcích mají stejnou amplitudu buzení. Je zřejmé, že nestabilita v proměnné ζ a okamžik, kdy odezva začíná mít prostorový charakter, nastává



Obrázek 3: Hranice stability semi-triviálního řešení pro různé hodnoty tlumení: (a) kolmo k rovině (xy) - hranice ζ; (b) v rovině (xy) plane - hranice ξ.

v intervalu $\omega \in (e_1, e_2)$, který obsahuje frekvenci ω_0. Délka tohoto intervalu pak závisí na amplitudě buzení a koeficientu útlumu. Interval nestability může zmizet úplně, jako na obr. 4 (ac), anebo mít nezanedbatelnou velikost, jako např. na obr. 4 (ca). Doporučení pro realizaci tlumičů je pak nasnadě: koeficient útlumu nesmí poklesnout pod jistý limit. V opačném případě totiž hrozí omezení účinnosti kyvadla zvláště pro širokopásmové buzení.

3. Postkritická odezva v rezonanční oblasti

3.1. Všeobecné poznámky

Vraťme se k rovnici (1). Rámcový přehled o jejím chování v rezonanční oblasti $\omega \in (c_1, e_2)$, je možné získat z numerických simulací. Ukazuje se, že v tomto intervalu se objevuje několik typů rezonanční odezvy. Z Fourierovy transformace numericky vypočtené odezvy je vidět, že odezva obsahuje v celé rezonanční oblasti pouze jednu harmonickou složku, která odpovídá budicí frekvenci ω. Pouze pro silně nestacionární odezvu se objevuje několik menších složek v těsném okolí ω. Žádné skutečné sub- nebo superharmonické složky nebyly pozorovány. Tento výsledek je v souladu s pracemi: Abarbanel et al. (1990), Hammel (1990).

Na základě těchto pozorování je možno považovat následující základní řešení za dostatečně obecné:

$$\left.\begin{aligned} \xi(t) &= a_c(t)\cos\omega t + a_s(t)\sin\omega t\,, && (a)\\ \zeta(t) &= b_c(t)\cos\omega t + b_s(t)\sin\omega t\,. && (b) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

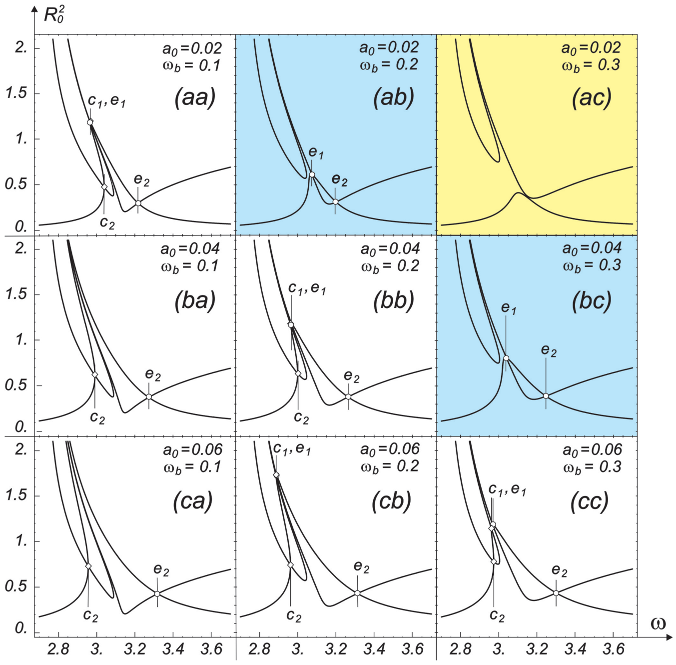
Protože uvažujeme čtyři neznámé funkce namísto původních dvou, můžeme definovat dvě dodatečné podmínky, což využijeme při zápisu prvních derivací:

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi(t) &= -a_c\omega\sin\omega t + a_s\omega\cos\omega t\,, && (a)\\ \dot\zeta(t) &= -b_c\omega\sin\omega t + b_s\omega\cos\omega t\,. && (b) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

kde $a_c = a_c(t), a_s = a_s(t), b_c = b_c(t), b_s = b_s(t)$. Dále zřejmě platí:

$$\left.\begin{aligned} \ddot\xi(t) &= -a_c\omega^2\cos\omega t - a_s\omega^2\sin\omega t\ -\dot a_c\omega\sin\omega t + \dot a_s\omega\cos\omega t\,, && (a)\\ \ddot\zeta(t) &= -b_c\omega^2\cos\omega t - b_s\omega^2\sin\omega t\ -\dot b_c\omega\sin\omega t + \dot b_s\omega\cos\omega t\,. && (b) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Po dosazení výrazů (12), (13), (14) do diferenciální soustavy (1) provedeme opět operaci harmonické rovnováhy. Po delších úpravách získáme soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé



Obrázek 4: Stabilní a nestabilní oblasti v rovině (R^2, ω) pro tři amplitudy buzení $a_0 = 0.02, 0.04, 0.06$ (řádky) a tři hodnoty tlumení $\omega_b = 0.1, 0.2, 0.3$ (sloupce); body e_1, e_2 or c_1, c_2 vyjadřují začátek a konec intervalu nestability ζ, resp. ξ ; typy rezonančních oblastí: bílé pole - 1. typ, modré pole - 2. typ, žluté pole - 3. typ.

amplitudy a_c, a_s, b_c, b_s:

$$\omega \begin{bmatrix} -2a_c a_s, & 4r^2 + 3a_c^2 + a_s^2, & -a_s b_c - a_c b_s, & 3a_c b_c + a_s b_s \\ -4r^2 - a_c^2 - 3a_s^2, & 2a_c a_s, & -a_c b_c - 3a_s b_s, & a_s b_c + a_c b_s \\ -a_s b_c - a_c b_s, & 3a_c b_c + a_s b_s, & -2b_c b_s, & 4r^2 + 3b_c^2 + b_s^2 \\ -a_c b_c - 3a_s b_s, & a_s b_c + a_c b_s, & -4r^2 - b_c^2 - 3b_s^2, & 2b_c b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_c \\ \dot{a}_s \\ \dot{b}_c \\ \dot{b}_s \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_c \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_c^2 + a_s^2 + b_c^2\right)\Omega_1 + b_s^2 \Omega_3\right) + 2a_s \left(2\omega_b \omega r^2 + b_c b_s \Omega_4\right) \\ -8\omega^2 a_0 r^2 + a_s \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_c^2 + a_s^2 + b_s^2\right)\Omega_1 + b_c^2 \Omega_3\right) - 2a_c \left(2\omega_b \omega r^2 - b_c b_s \Omega_4\right) \\ b_c \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_c^2 + b_c^2 + b_s^2\right)\Omega_1 + a_s^2 \Omega_3\right) + 2b_s \left(2\omega_b \omega r^2 + a_c a_s \Omega_4\right) \\ b_s \left(8\Omega_2 r^2 + \left(a_s^2 + b_c^2 + b_s^2\right)\Omega_1 + a_c^2 \Omega_3\right) - 2b_c \left(2\omega_b \omega r^2 - a_c a_s \Omega_4\right) \end{bmatrix} , \qquad (15)$$

kde jsme označili:

$$\Omega_1 = 3\omega_0^2 - 4\omega^2 \ , \ \Omega_2 = \omega_0^2 - \omega^2 \ , \ \Omega_3 = \omega_0^2 + 4\omega^2 \ , \ \Omega_4 = \omega_0^2 - 4\omega^2 \ . \qquad (16)$$

Je nutné připomenout, že rovnice (15) mají význam pouze za podmínky, že operace harmonické rovnováhy má smysl, tzn. pokud existují příslušné integrály a jsou konečné. Aby tato podmínka byla splněna, musí se amplitudy a_c, a_s, b_c, b_s v čase měnit výrazně pomaleji než funkce $\sin \omega t$.

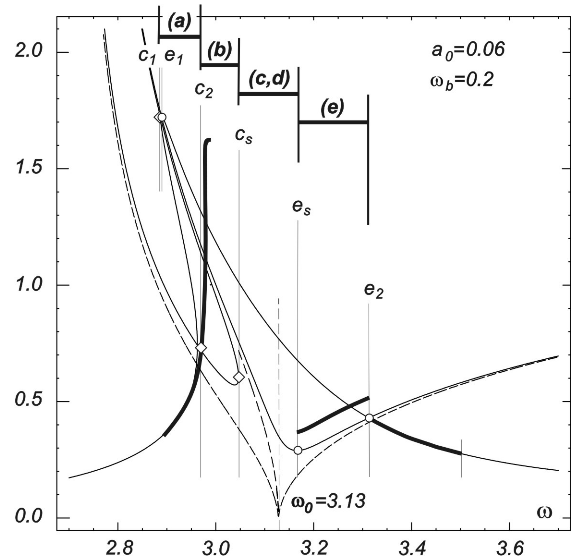
Soustava (15) není (až na některé speciální případy) řešitelná analyticky. Pro některé zajímavé případy, zejména pro případy použité v obr. 4, byla proto řešena numericky. Použita byla kombinace Adamsovy a Gearovy metody v algoritmu predictor-corrector, jak je implementována v systému MATHEMATICA (Wolfram Inc.). V průběhu výpočtu byl testován Ljapunovův exponent, viz např. Moser (1973), Benettin et al. (1980).

Výsledky simulace řešení soustavy (1) a (15) jsou porovnány v následujících odstavcích. Ukazuje se, že existují tři vzájemné vztahy rezonanční křivky a hranic stability. Tyto vztahy pak určují charakter odezvy soustavy v rezonančním intervalu $\omega \in (c_1, e_2)$.

3.2. První typ rezonanční oblasti

První typ rezonance je charakterizován stavem, kdy rezonanční křivka protíná obě hranice stability ξ i ζ, viz obr. 4 (aa,ba,bc,bb,cb,cc). Existují body c_1, c_2, e_1, e_2, a i když $c_1 \leq e_1$, body c_1, e_1 zpravidla splývají. Za těchto podmínek je možno pozorovat v intervalu $\omega \in (c_1, e_2)$ čtyři různé rezonanční režimy. Reprezentantem tohoto stavu může být konfigurace $a_0 = 0.06m, \omega_b = 0.2s^{-1}$, viz obr. 4 (cb) a obr. 5.

(a) $\omega \in (c_1, c_2)$ - Odezva zůstává stabilní v rovině (xz), ζ je prakticky nulové. Amplituda rovinné odezvy dramaticky roste. Střední a horní větev rezonanční křivky je nestabilní. Horní větev není možno dosáhnout volbou vhodné počáteční podmínky při numerickém řešení. To proto, že oblast nad horní větví rezonanční křivky je rovněž nad hranicí stability ξ. Stabilita horní větve je "křehká" a zcela vymizí v bodě e_1, kde se horní větev setkává se střední větví, která je nestabilní z povahy problému. Řešení tíhne k jedinému, velmi stabilnímu stavu na spodní větvi rezonanční křivky, viz silnou čáru $\omega \in (c_1, c_2)$ v obr. 5. Tomuto stavu odpovídá časový průběh odezvy zobrazený na obr. 6 (a). Průmět složek ξ, ζ do roviny (xy) (po odeznění počátečního přechodového jevu) je ukázán ve čtverci na levé straně, zatímco časový průběh jednotlivých složek ξ, ζ je vykreslen na dvojici grafů na pravé straně obr. 6 (a). Rovinný charakter pohybu ke zřejmý.

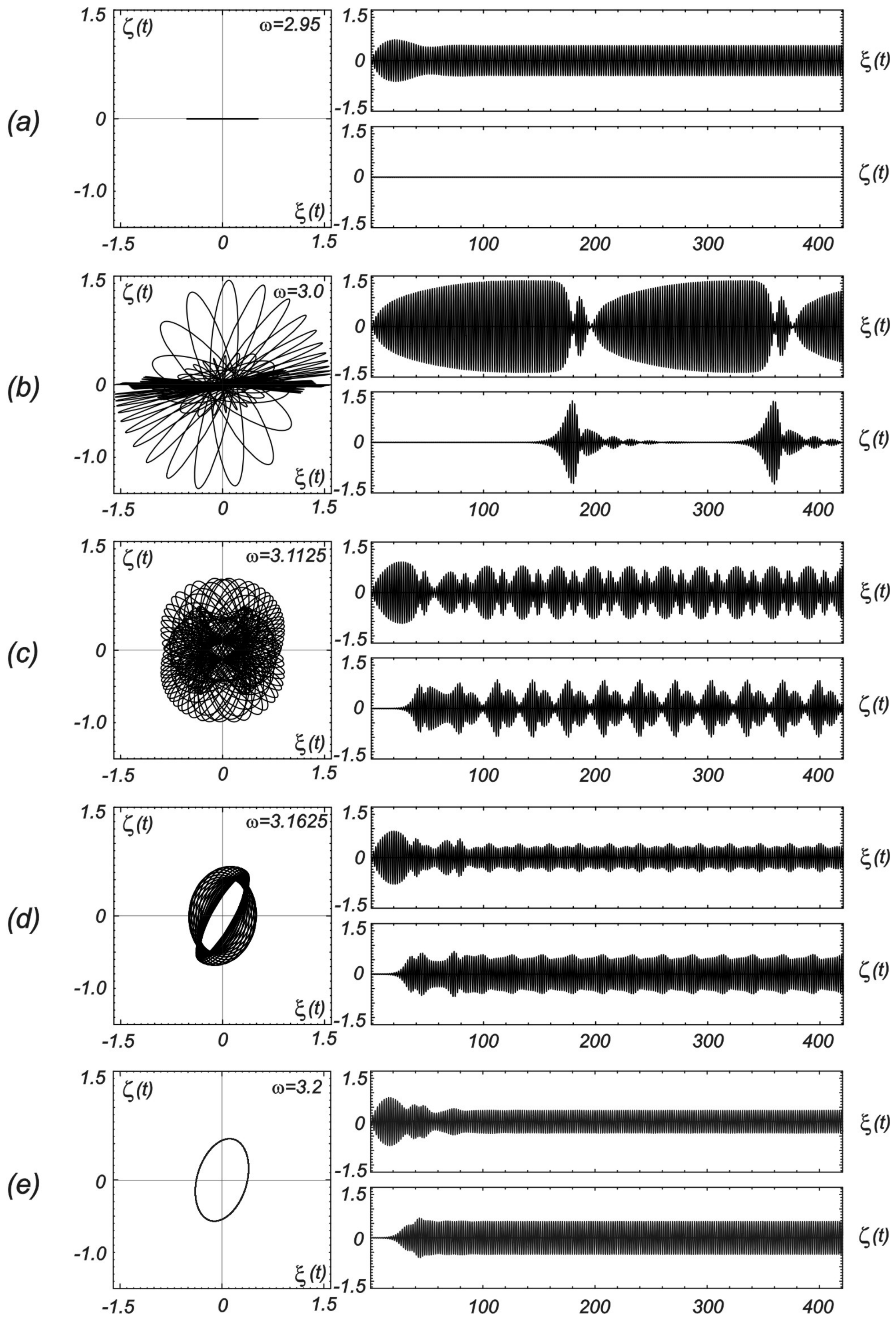


Obrázek 5: Podrobné schema prvního typu rezonanční oblasti $\omega \in (c_1, e_2)$ pro $a_0 = 0.06, \omega_b = 0.2$, viz obr.4(cb); pod-rezonanční oblast $\omega \in (0, c_1)$ a nad-rezonanční oblast $\omega \in (e_2, \infty)$ se stabilním semi-triviálním řešením.

(b) $\omega \in (c_2, c_s)$ - Objevuje se chaotická odezva, viz obr. 6 (b) (pro bližší seznámení s matematickým pojetím chaosu v nelineárních dynamických systémech viz např. Lichtenberg, Lieberman (1983), Schuster (1988), Ott (1993)). Odezva v obou složkách ξ, ζ tvoří zázněje, pohyb v souřadnici ξ je dominantní. Pohyby v souřadnici ζ mají charakter vybočení. Perioda těchto vybočení se s rostoucí budicí frekvencí zkracuje. Amplitudy již nekonvergují ke konstantám, zůstávají kvazi-periodické a jejich vnitřní struktura se mění i v rámci jednotlivých period. Převládající charakter složky ξ pramení v přítomnosti hranice stability ξ v tomto intervalu. Tomuto intervalu neodpovídá žádná část rezonanční křivky v obr. 5, neboť stacionární odezva v tomto případě neexistuje.

(c) $\omega \in (c_s, e_s)$ - Charakter odezvy je podobný jako v předchozím případě. Periody záznějů jsou krátké a pohybu se účastní obě složky takřka stejně. Soustava je mimo oblast nestability ξ, ale velmi hluboko v oblasti nestability ζ. To vede k chaotickému pohybu, který připomíná protáhlou hypocykloidu, obr. 6 (c). S dalším nárůstem ω až k hornímu okraji intervalu se odezva uklidňuje, záznějové efekty mizí, viz obr. 6 (d). Nicméně stále nemá smysl hovořit o rezonanční křivce. Ljapunovův exponent potvrzuje chaotický charakter odezvy v případech (b) a (c).

(d) $\omega \in (e_s, e_2)$ - Dolní okraj tohoto frekvenčního intervalu je dán minimem hranice stability ζ. Odezva soustavy dosahuje stacionární řešení reprezentované prostorovou křivkou připomínající elipsu, obr. 6 (e). Toto řešení je velmi stabilní, jak je ukázáno pomocí lineární perturbace, viz část 3 výše, anebo pomocí hodnot Ljapunovova exponentu. Protože je řešení stacionární, je možné zavést nějaký ekvivalent rezonanční křivky, například výraz $\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$, viz obr. 5. Výsledek však neodpovídá původní rezonanční křivce, ale hranici stability ζ. To nepřekvapuje,



Obrázek 6: První typ rezonanční oblasti pro $a_0 = 0.06, \omega_b = 0.2$, viz obr. 4 (cb); přímá integrace pro budicí frekvence ve čtyřech režimech odezvy: (a) $\omega \in (c_1, c_2)$, (b) $\omega \in (c_2, c_s)$, (cd) $\omega \in (c_s, e_s)$, (e) $\omega \in (e_s, e_2)$.

neboť soustava stále zůstává v oblasti nestability ζ a uvedené řešení je nejbližší stabilní stav. Tyto podmínky se zásadně liší od podmínek, pro něž byla určována původní rezonanční křivka.

Ve frekvenčních intervalech $\omega \in (0, c_1)$ a $\omega \in (e_2, \infty)$ existuje stabilní řešení v rovině (xz), jak bylo ukázáno v předchozí části. Rovněž to platí pro interval $\omega \in (e_s, e_2)$. V těchto třech intervalech má řešení charakter stabilní uzavřené křivky, jak se ukazuje z numerického řešení, viz obr. 6 (a), 6 (e).

Pokusme se existenci těchto limitních cyklů potvrdit pomocí soustavy (15). Ustálená odezva v limitním cyklu je charakterizována konstantní amplitudou (pro $t \to \infty$). Proto musí být za těchto podmínek časové derivace $\dot{a}_c, \dot{a}_s, \dot{b}_c, \dot{b}_s$ rovny nule. Následně musí být nulová rovněž levá strana rovnice (15). Pravá strana tvoří algebraickou soustavu, kterou je možno upravit do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}
a_c \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) \ &+\ 2b_s S_A^2 \Omega_4 \ +\ 4a_s\omega_b\omega r^2 \ =\ 0 \\
a_s \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) \ &-\ 2b_c S_A^2 \Omega_4 \ -\ 4a_c\omega_b\omega r^2 \ =\ 8\omega^2 a_0 r^2 \\
b_c \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) \ &-\ 2a_s S_A^2 \Omega_4 \ +\ 4b_s\omega_b\omega r^2 \ =\ 0 \\
b_s \cdot (8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1) \ &+\ 2a_c S_A^2 \Omega_4 \ -\ 4b_c\omega_b\omega r^2 \ =\ 0
\end{aligned} \tag{17}$$

kde jsme označili:

$$R_A^2 = a_c^2 + a_s^2 + b_c^2 + b_s^2\ ; \quad S_A^2 = a_s b_c - a_c b_s \tag{18}$$

Hodnota R_A^2 musí být kladná, zatímco S_A^2 může nabývat libovolných reálných hodnot. První rovnici ze soustavy dvou rovnic pro neznámé R_A^2, S_A^2 získáme tak, že jednotlivé rovnice (17) umocníme a sečteme. Druhá rovnice pak vznikne jako rozdíl součinu prvé a čtvrté rovnice (17) a součinu druhé a třetí rovnice soustavy (17). Po dalších úpravách je možno psát:

$$\begin{aligned}
&R_A^2 \cdot [(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)^2 + 4S_A^4\Omega_4^2 + 16\omega_b^2\omega^2 r^4] - \\
&\qquad -8S_A^4(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)\Omega_4 \ =\ 64\omega^4 a_o^2 r^4 \qquad (a) \\
&S_A^2 \cdot [2R_A^2(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)\Omega_4 - \\
&\qquad -(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)^2 - 16\omega_b^2\omega^2 r^4 - 4S_A^4\Omega_4^2] \ =\ 0 \qquad (b)
\end{aligned} \tag{19}$$

Tím jsme nahradili čtyři amplitudy dvěma parametry R_A^2, S_A^2 podle rovnice (18). První z nich je možno interpretovat jako zobecněnou celkovou efektivní amplitudu zahrnující obě složky odezvy (12). Parametr S_A^2 pak charakterizuje fázový posuv. Rovnici (19b) je možno splnit, pokud (i) $S_A^2 = 0$ anebo (ii) $S_A^2 \neq 0$ a výraz v závorce bude nulový. První případ znamená, že vektory $[a_c, a_s], [b_c, b_s]$ jsou rovnoběžné, a proto (s ohledem na (12)) platí: $\xi(t)/\zeta(t) = const$ pro libovolné t. To reprezentuje pohyb ve vertikální rovině, jak bylo rozebráno výše. Vskutku, dosadíme-li $S_A^2 = 0$ do první rovnice (19a), dostaneme rovnici (6), která reprezentuje rezonanční křivku semi-triviálního řešení, platnou pouze ve stabilní oblasti řešení. Proto případ $S_A^2 = 0$ charakterizuje limitní cykly v intervalech $\omega \in (0, c_2)$ a $\omega \in (e_2, \infty)$, kde je možno složky pohybu $\xi(t), \zeta(t)$ považovat za synchronní.

Případ, kdy $S_A^2 \neq 0$ odpovídá intervalu $\omega \in (e_s, e_2)$. V tomto případě můžeme vydělit rovnici (19b) faktorem S_A^2. Je ihned vidět, že výraz S_A^2 se v rovnici (19a,b) objevuje jen jako S_A^4. Je proto možné připustit záporné hodnoty S_A^2. Po eliminaci neznámé S_A^4 ze soustavy (19a,b) získáme:

$$(8\Omega_2 r^2 + R_A^2\Omega_1)[(R_A^2\omega_o^2 + 4\Omega_2 r^2)^2 + 4\omega_b^2\omega^2 r^4] = 8\Omega_4\omega^4 a_o^2 r^4 \tag{20}$$

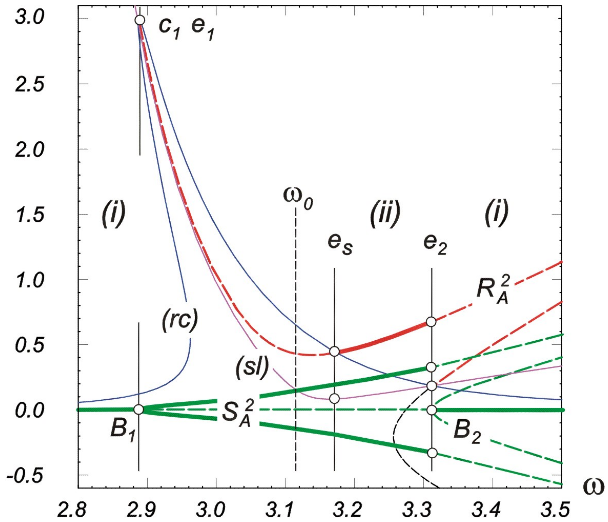
Parametry R_A^2, S_A^2 vykreslené v závislosti na ω, jak byly vypočteny podle rovnic (18)-(20) pro již dříve užité hodnoty parametrů, jsou vykresleny na obr. 7. Na vodorovné ose se objevují dva bifurkační body B_1, B_2. Oba souvisí s fázovým posunem S_A^2. Obecný výraz, vzniklý eliminací R_A^2 z rovnice (19b), je možno vyjádřit ve tvaru

$$S_{A,i}^2(\alpha + \beta S_{A,i}^4 + \gamma S_{A,i}^8) = 0 \quad (i = 1 - 5) \tag{21}$$

Protože kořen $S^2_{A,5} = 0$, budou další kořeny $S^4_{A,i}(i = 1 - 4)$ buďto (i) dva komplexně sdružené komplexní kořeny, nebo (ii) jeden kladný a jeden záporný reálný kořen, anebo (iii) dva různé kladné reálné kořeny. Aplikace odmocniny pak dá (i) žádnou, (ii) dvě anebo (iii) čtyři reálné větve pro S^2_A. Bifurkační body B_1, B_2 pak oddělují jednotlivé naznačené frekvenční intervaly. Navíc poloha B_1 vyplývá rovněž z podmínky existence násobného kořene $S^2_A = 0$.

Jednotlivé části křivky pro R^2_A jsou vykresleny rovněž v obr. 7. Je zde vidět vztah mezi větvemi S^2_A a R^2_A pro jednotlivé frekvenční intervaly. Větev $S^2_A = 0$ odpovídá rezonanční křivce. Její vztah s hranicí stability ζ je zřejmý. Souřadnice ω jejich průsečíku e_2 a poloha B_1 splývají.

Ještě je třeba zmínit vlastnosti stability vypočtených parametrů R^2_A, S^2_A. Obě bifurkace typu pitchfork S^2_A jsou zřejmé. Stabilní a nestabilní části křivek jsou vykresleny plnou, resp. čárkovanou čarou. Triviální stabilní řešení ($S^2_A = 0$), které reprezentuje pohyb ve vertikální rovině, existuje v intervalu $\omega \in (0, B_1)$. V intervalu $\omega \in (B_1, B_2)$ existují dvě stabilní netriviální a jedno nestabilní triviální řešení. Pro $\omega > B_2$ zbývá jedno stabilní triviální a čtyři nestabilní netriviální řešení S^2_A. Stejné členění odpovídá i R^2_A s výjimkou intervalu $\omega \in (B_1, e_s)$, kde se R^2_A velmi rychle mění. Proto v tomto intervalu neexistuje žádný limitní cyklus.



Obrázek 7: R^2_A, S^2_A - amplituda a fázový posuv; spojitá křivka - stabilní část, čárkovaná křivka - nestabilní část; $(rc), (sl)$ - rezonanční křivka, resp. hranice stability ζ; B_1, B_2 - bifurkační body křivek S^2_A; $B_1 \equiv c_1, e_1$, $B_2 \equiv e_2$; e_s - minimum hranice stability ζ a průsečík (rc) s křivkami R^2_A; (i), (ii) - typy limitního cyklu.

3.3. Druhý typ rezonanční oblasti

Druhý typ je charakterizován případem, kdy rezonanční křivka protíná pouze hranici stability ζ. Existují jen body e_1, e_2, viz obr. 4 (ab, bc). Je možno očekávat dva režimy v intervalu $\omega \in (e_1, e_2)$.

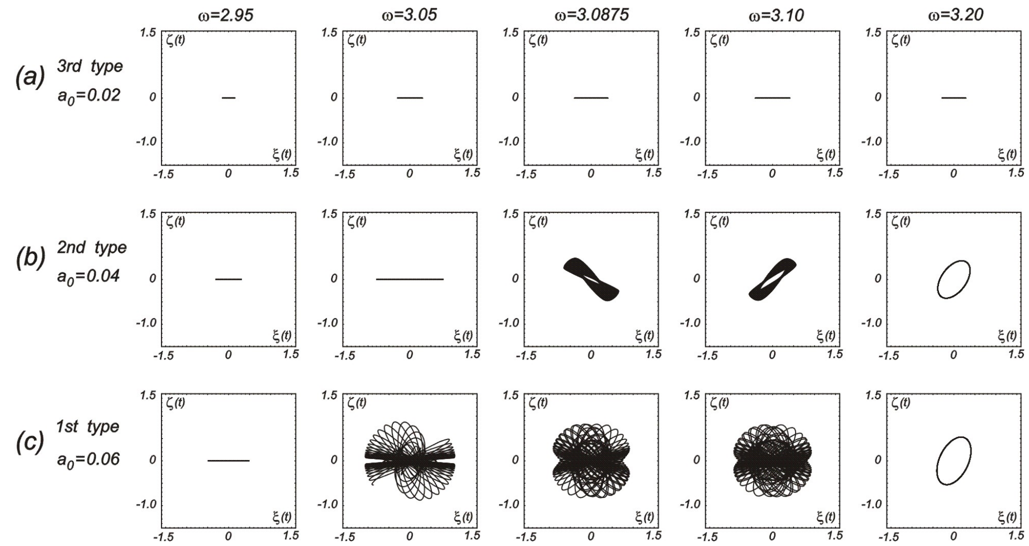
(a) $\omega \in (e_1, e_s)$ - Poté, co nastane ztráta stability ζ, je přenos energie mezi souřadnicemi ξ a ζ patrný podobně jako při alternativách (b,c) předchozí části. Záznějové jevy však nejsou tak dramatické a neliší se příliš od stacionárního řešení popsaného v odstavci (d), viz obr. 8 (b).

(b) $\omega \in (e_s, e_2)$ - Stabilizované řešení porovnatelné s řešením pojednaným v odstavci (d) výše, viz obr. 8 (b).

3.4. Třetí typ rezonanční oblasti

V tomto případě se rezonanční křivka neprotíná s žádnou hranicí stability, soustava neopouští vertikální rovinu (xz). Semi-triviální řešení zůstává stabilní pro libovolné ω; viz obr. 4 (ac) a obr. 8 (a).

Obr. 8 ukazuje průměty kyvadla do roviny (xy) pro různé hodnoty vstupních parametrů a ukazuje všechny pojednané typy rezonančních oblastí. Jeho význam je možno shrnout následovně. Všechny tři části (obr. (a),(b),(c)) jsou spočteny pro stejný koeficient útlumu $\omega_b = 0.3$ a pro rostoucí amplitudu buzení $a_0 = 0.02, 0.04, 0.06$. Porovnání obr. 8 (c) s (xy) průmětem v levém sloupci obr. 6 ($a_0 = 0.06, \omega_b = 0.2$) ukazuje silnou závislost odezvy na koeficientu



Obrázek 8: Tři typy rezonančních oblastí pro tlumení $\omega_b = 0.3$; průběh odezvy v času v rovině xy; řádek (a) obr. 4 (ac) - třetí typ, řádek (b) obr. 4 (bc) - druhý typ, řádek (c) obr. 4 (cc) - první typ; ve všech řádcích jsou znázorněny typické režimy odezvy při průchodu rezonanční oblastí.

útlumu. Je možno říci, že charakter odezvy je velmi citlivý na změnu jak amplitudy buzení, tak koeficientu útlumu, a především závisí na vzájemné poloze rezonanční křivky systému s jedním stupněm volnosti (tzn. s potlačenou složkou ζ) a hranic stability obou složek ξ a ζ.

Podívejme se blíže na případ, kdy rezonanční křivka semi-triviálního řešení mine hranici stability ξ a dotkne se hranice stability ζ, viz obr. 4 (ac), 8 (a), které reprezentují třetí typ rezonanční oblasti. V praxi použité kyvadlo by tuto oblast nemělo nikdy opustit.

Určíme podmínky pro parametry $a_0, \omega_b, \omega, R^2$ takové, aby systém bezpečně spadal do třetího typu rezonanční oblasti. Dotyk rezonanční křivky a hranice stability ζ nastane v okamžiku, kdy obě křivky mají společný právě jeden bod v rovině ω, R^2. Ze vztahů (6) a (11b) pak vyplývá dvojice implicitních rovnic:

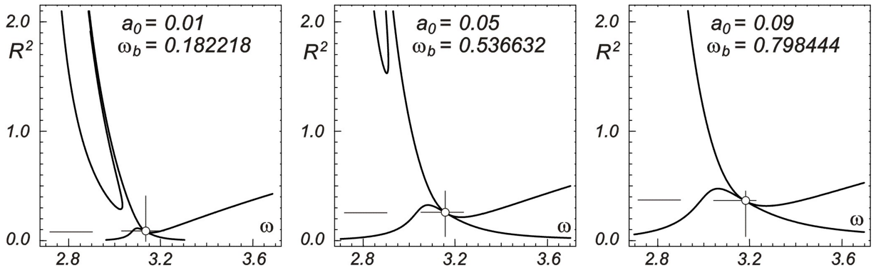
$$
\begin{aligned}
F_1: \quad & R^2\left[\omega^2\omega_b^2 + 4\left(\Omega_2 + \tfrac{1}{8r^2}\Omega_1 R^2\right)^2\right] - 4\omega^4 a_0^2 \;=\; 0 \quad \text{(a)} \\
F_2: \quad & R^2\left(\tfrac{\omega_0^2}{2r^2}\Omega_2 + R^2\tfrac{1}{64r^4}\Omega_1\Omega_3\right) + \Omega_2^2 + \tfrac{1}{4}\omega^2\omega_b^2 \;=\; 0 \quad \text{(b)}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

V témže bodě ω musí být složky tečných vektorů obou křivek rovnoběžné. Složky tečných vektorů je možno zapsat v parametrickém tvaru:

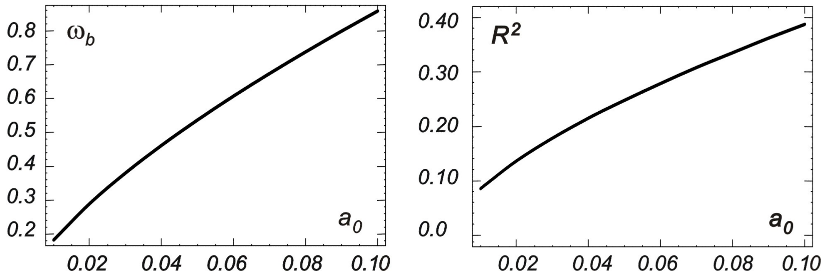
$$
\begin{aligned}
-\partial F_1/\partial R^2 &= -[16r^4(\omega_b^2\omega^2 + 4\Omega_2^2) + 3R^4\Omega_1^2 + 32r^2R^2\Omega_1\Omega_2]/16r^4 \\
\partial F_1/\partial\omega &= [16R^2\omega(2\omega_b^2 r^4 - (2r^2 + R^2)(R^2\Omega_1 + 8r^2\Omega_2)) - 256\omega^3 a_0^2]/16r^4 \\
-\partial F_2/\partial R^2 &= [-32r^2\Omega_2\omega_0^2 - 2R^2\Omega_1\Omega_3]/64r^4 \\
\partial F_2/\partial\omega &= 16\omega(2r^4(\omega_b^2 - 8\Omega_2) - 4r^2R^2\omega_0^2 + R^4\Omega_4)/64r^4
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Jejich vektorový součin $\Delta = [-\partial F_1/\partial R^2 \cdot \partial F_2/\partial\omega + \partial F_1/\partial\omega \cdot \partial F_2/\partial R^2]$ musí být nulový, a proto platí:

$$
\begin{aligned}
\Delta = {} & [16r^4(\omega^2\omega_0^2) + 32\Omega_1\Omega_2R^2 + 3\Omega_1^2R^4][R^4\Omega_4 - 4r^2R^2\omega_0^2 + 2r^4(\omega_0^2 - 8\Omega_2)] - \\
& -[R^2(2\omega_b^2 r^4 - (2r^2 + R^2)(8r^2\Omega_2 + \Omega_1R^2)) - 16\omega^2 a_0^2][32r^2\omega_0^2\Omega_2 + 2R^2\Omega_1\Omega_3] \;=\; 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$



Obrázek 9: Třetí typ rezonanční oblasti; vztah rezonanční křivky a ζ hranice stability pro amplitudy buzení $a_0 = 0.01, 0.05, 0.09$.



Obrázek 10: Podmínka zachování režimu ve třetím typu rezonanční oblasti při amplitudě buzení a_0; minimální potřebný útlum ω_b (levá část) a odpovídající amplituda výchylky kyvadla R^2 (pravá část); frekvence ω dotykového bodu hranice stability ζ a rezonanční křivky se mění jen velmi málo v úzkém intervalu $\omega \in (3.14; 3.18)$.

Nelineární algebraickou soustavu (22), (24) pro neznámé parametry ω_b, ω, R^2 je nutno vyčíslit pro různé hodnoty parametru a_0. Je třeba použít vhodnou numerickou proceduru a pečlivě vybírat počáteční přiblížení, abychom se vyhnuli nesmyslným výsledkům.

Některé numerické výsledky jsou vykresleny na obr. 9, 10. Je vidět, že při rostoucí amplitudě buzení a_0 je nutné zvyšovat odpovídajícím způsobem koeficient útlumu ω_b. Hranice stability ξ není nikdy dosažena a posunuje se pryč od bodu dotyku rezonanční křivky a hranice stability ζ, viz obr. 9. Koeficient útlumu ω_b potřebný k udržení soustavy ve třetím typu rezonanční oblasti je ukázán na obr. 10 spolu s odpovídající amplitudou tlumiče R^2. Frekvence ω bodu dotyku se mění jen zvolna v intervalu (zhruba) $\omega \in (3.14; 3.18)$.

4. Kyvadlo s vazbou na konstrukci

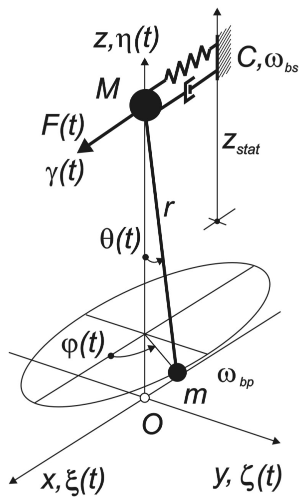
Vraťme se k soustavě (1). Předpokládejme, že kyvadlo je součástí konstrukce, kterou idealizujeme lineární soustavou s jedním stupněm volnosti, který je vyjádřen pohybem hmoty M ve směru x. Celá soustava spolu s kyvadlem tak má tři stupně volnosti a je buzena jednou vnější silou $F(t)$ ve směru x, viz obr. 11.

Zopakujeme postup založený na energetických bilancích, Hamiltonově funkcionálu a Rayleighově kvadratické funkci. Dospějeme tak k soustavě tří Lagrangeových rovnic v souřadnicích θ, ϕ, γ. Zavedením přibližné transformace do kartézských souřadnic dostaneme soustavu tří rovnic, která je rozšířením soustavy (1):

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma} + \kappa\ddot{\xi} + 2\omega_{bs}\dot{\gamma} + \omega_{0s}^2\gamma &= F_r(t)\,, && (a)\\
\ddot{\xi} + \frac{1}{2r^2}\xi(\xi^2+\zeta^2)^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}\omega_{bp}\dot{\xi} + \omega_{0p}^2\Big(\xi + \frac{1}{2r^2}\xi(\xi^2+\zeta^2)\Big) + \ddot{\gamma} &= 0\,, && (b) \qquad (25)\\
\ddot{\zeta} + \frac{1}{2r^2}\zeta(\xi^2+\zeta^2)^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}\omega_{bp}\dot{\zeta} + \omega_{0p}^2\Big(\zeta + \frac{1}{2r^2}\zeta(\xi^2+\zeta^2)\Big) &= 0\,. && (c)
\end{aligned}$$

V rovnicích (25) jsme označili:

$\xi(t), \zeta(t), \gamma(t)$ - složky odezvy;
$\omega_{0p}^2 = g/r, \omega_{bp}$ - "lineární" vlastní frekvence a útlum kyvadla,
$\omega_{0s}^2 = C/(M+m), \omega_{bs}$ - "opravená" vlastní frekvence a útlum konstrukce,
$F_r(t) = F(t)/(M+m)$ - vnější buzení soustavy ve směru x,
$\kappa = m/(M+m)$ - poměr hmotností.



Obrázek 11: Model konstrukce s kyvadlem.

Posuďme semi-triviální řešení a jeho stabilitu. Za těchto podmínek platí, že $\zeta_0 = 0$ a rovnice (25c) je splněna identicky. Semi-triviální řešení má dvě nenulové složky ξ_0, γ_0 nezávislé na lineární úrovni na ζ. Vnější buzení a nenulové složky semi-triviální odezvy píšeme ve tvaru:

$$F_r(t) = f_0 \sin \omega t \ , \ \gamma_0 = c_c \cos \gamma t + c_s \sin \gamma t \ , \quad \xi_0 = a_c \cos \gamma t + a_s \sin \gamma t. \tag{26}$$

Výrazy (26) dosadíme do rovnic (25a, b). Tak jako v předchozích případech uplatníme operaci harmonické rovnováhy. Po delších úpravách dostaneme pro amplitudy výchylek tyto rovnice:

$$R_\xi^2 \left[(\kappa\omega^4 \Omega_{3s} + \Omega_{5p}\Omega_{1s}^2)^2 + (\kappa\omega^4\Omega_{2s} + \Omega_{1s}^2(\Omega_{2p} + \tfrac{1}{8r^2}\Omega_{1p} \cdot R_\xi^2))^2 \right] = f_0^2 \omega^4 (\Omega_{2s}^2 - \Omega_{3s}^2) \tag{27}$$

$$R_\xi^2 \left(\Omega_{5p}^2 + (\Omega_{2p} + \tfrac{1}{8r^2}\Omega_{1p} \cdot R_\xi^2)^2 \right) = R_\gamma^2 \cdot \omega^4 \tag{28}$$

kde jsme označili:

$$\begin{aligned} &R_\xi^2 = a_c^2 + a_s^2 \ , && R_\gamma^2 = c_c^2 + c_s^2 \ , \\ &\Omega_{1s}^2 = 4\omega_{bs}^2\omega^2 + (\omega_{0s}^2 - \omega^2)^2, && \Omega_{2s} = \omega_{0s}^2 - \omega^2, \quad \Omega_{3s} = 2\omega_{bs}\omega, \\ &\Omega_{1p} = 3\omega_{0p}^2 - 4\omega^2, && \Omega_{2p} = \omega_{0p}^2 - \omega^2, \quad \Omega_{5p} = \omega_{bp}\omega/2. \end{aligned} \tag{29}$$

Rovnice (27) je nezávislá na (28). Je třetího stupně v R_ξ^2 a umožňuje vykreslit základní rezonanční křivku pohybu kyvadla (bez ohledu na nestabilní části). Z rovnice (28) potom následně plyne základní rezonanční křivka amplitudy výchylky konstrukce R_γ^2.

Hranice stability semi-triviálního řešení stanovíme podobně jako ve třetí kapitole. Semi-triviální řešení doplníme ve všech složkách poruchami, které následně rozepíšeme v harmonickém tvaru, viz (7), (8):

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + w \ , & w &= w_c \cos \omega t + w_s \sin \omega t \ , & (a) \\ \xi &= \xi_0 + u \ , & u &= u_c \cos \omega t + u_s \sin \omega t \ , & (b) \\ \zeta &= 0 + v \ , & v &= v_c \cos \omega t + v_s \sin \omega t \ . & (c) \end{aligned} \tag{30}$$

Výrazy z prvního sloupce v (30) dosadíme do soustavy (25). S využitím skutečnosti, že $(\gamma_0, \xi_0, 0)$ je semi-triviální řešení původní soustavy, a se zanedbáním vyšších mocnin a derivací všech tří poruch dostaneme ze soustavy (25) soustavu tří homogenních lineárních diferenciálních rovnic pro w, u, v. Rovnice pro w, u jsou spřažené, rovnice pro v je samostatná. Do těchto rovnic dosadíme podle druhého sloupce (30) a provedeme operaci harmonické rovnováhy. Dostaneme se k algebraickým soustavám, které jsou analogické (9), (10). Rovnicím (9) odpovídá homogenní soustava pro čtyři amplitudy w_c, w_s, u_c, u_s.

$$\begin{array}{lllll}
-\kappa\omega^2 \cdot u_c & & -\Omega_{2s} \cdot w_c & +\Omega_{3s} \cdot w_s & = 0 \quad (a) \\
& -\kappa\omega^2 \cdot u_s & -\Omega_{3s} \cdot w_c & +\Omega_{2s} \cdot w_s & = 0 \quad (b) \\
\left[\Omega_{2p} + \frac{\Omega_{1p}}{8r^2}(3a_c^2 + a_s^2)\right] \cdot u_c & + \left[\Omega_{5p} + \frac{\Omega_{1p}}{4r^2} a_c a_s\right] \cdot u_s & -\omega^2 \cdot w_c & & = 0 \quad (c) \\
\left[-\Omega_{5p} + \frac{\Omega_{1p}}{4r^2} a_c a_s\right] \cdot u_c & + \left[\Omega_{2p} + \frac{\Omega_{1p}}{8r^2}(a_c^2 + 3a_s^2)\right] \cdot u_s & & -\omega^2 \cdot w_s & = 0 \quad (d)
\end{array} \tag{31}$$

Hranice stabilního semi-triviálního řešení ve směru ξ jsou dány výrazem pro nulový determinant soustavy (31). Po eliminaci w_c, w_s se dalšími úpravami dostaneme k bi-kvadratické rovnici pro R_u^2:

$$\begin{split} \frac{3\Omega_{1s}^2\Omega_{1p}^2}{64r^4} R_u^4 + \frac{\Omega_{1p}}{2r^2}(\Omega_{1s}^2\Omega_{2p} - \kappa\omega^4\Omega_{2s})R_u^2 + \\ \Omega_{1s}^2(\Omega_{2p}^2 + \Omega_{5p}^2) - 2\kappa\omega^4(\Omega_{2s}\Omega_{2p} - \Omega_{3s}\Omega_{5p}) + \kappa^2\omega^8 = 0 \end{split} \tag{32}$$

Zpětným dosazením do soustavy (31) a s využitím vztahů (29) vznikne jednoduchý vzorec pro kvadrát amplitudy R_w^2:

$$R_w^2 = \frac{\kappa^2\omega^4}{\Omega_{1s}^2} R_u^2 \tag{33}$$

Amplitudy R_u^2, R_w^2 v rovnicích (32), (33) mají tvar:

$$R_u^2 = u_c^2 + u_s^2, \qquad R_w^2 = w_c^2 + w_s^2 \tag{34}$$

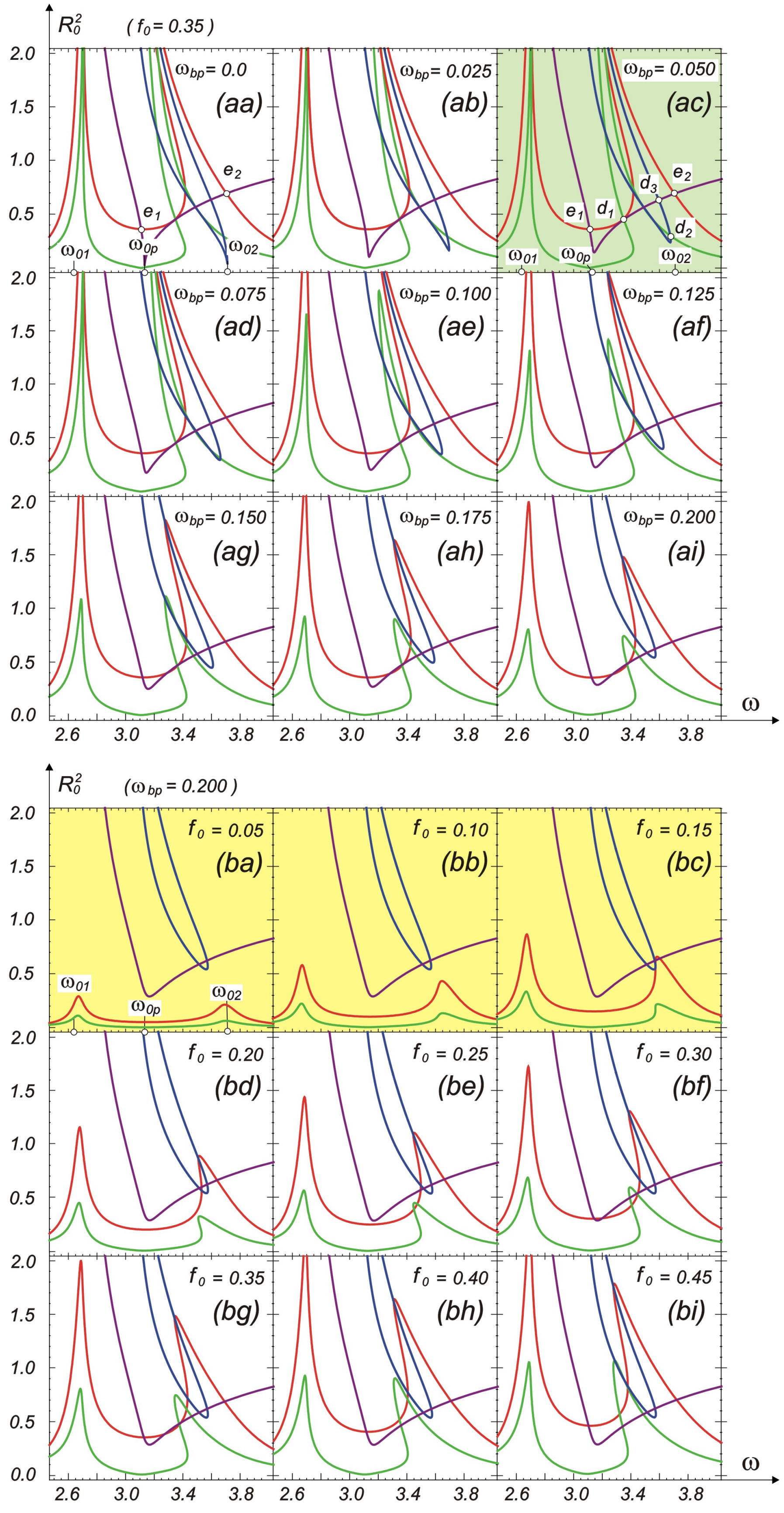
Rovnice (25c) je totožná s rovnicí (1b) a spolu s (30c) vede k téže podmínce stability dané rovnicí (11b) pro amplitudu R_v^2:

$$R_v^2 = v_c^2 + v_s^2 \tag{35}$$

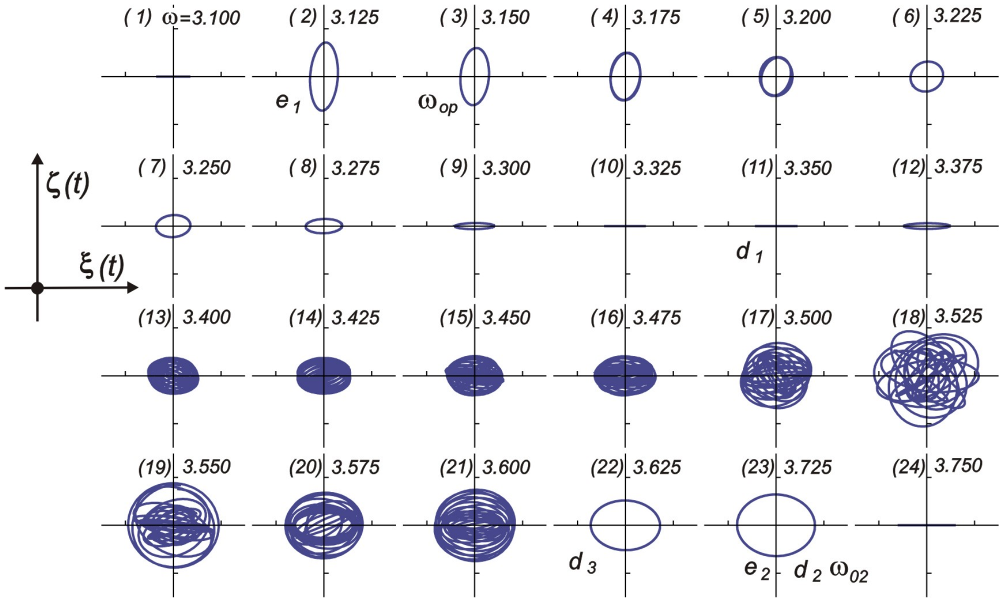
Sledujme vývoj rezonančních křivek R_γ^2, R_ξ^2, hranic stability R_u^2, R_v^2 a dalších vlastností soustavy podle obr. 11, resp. soustavy rovnic (25). Jako pevné volíme parametry: $r = 1.0m, \omega_{0p} = 3.13s^{-1}, \omega_{0s} = 3.00s^{-1}, \kappa = 0.1, \omega_{bs} = \omega_{bp}/4$. Z (25a, b) vyplývají vlastní frekvence "linearizovaného" modelu: $\omega_{01} = 2.670s^{-1}, \omega_{02} = 3.711s^{-1}$. Soustavu prověřujeme pro $\omega_{bp} \in (0.0, 0.200)$, krok $0.025s^{-1}$ při amplitudách buzení $f_0 \in (0.050, 0.500)$, krok 0.05. Vybrané výsledky jsou znázorněny jako funkce $\omega \in (2.5, 4.0)$ na obr. 12. V horní polovině obrázku (pole (aa) až (ai)) je znázorněn vývoj pro fixovanou amplitudu $f_0 = 0.35$ a rostoucí útlum ω_{bp}. Podobně je upravena dolní polovina obrázku (pole (ba) až (bi)), ze které je patrný vývoj těchže křivek při fixovaném útlumu $\omega_{bp} = 0.20s^{-1}$ a rostoucí amplitudě buzení f_0.

Z obrazu rezonančních křivek R_γ^2, R_ξ^2 (zelená, červená) ve všech 18 polích na obr. 12 jsou zřetelné dvě rezonanční oblasti. Vyšší z nich navazující na ω_{02} se vztahuje ke kyvadlu samotnému a nese znaky výrazně nelineárního systému s měknoucí charakteristikou. Nižší rezonanční oblast v okolí ω_{01} vyplývá z přidaného stupně volnosti, jímž jsme idealizovali pohyb samotné konstrukce. Vzhledem k lineární povaze (25a) odpovídá v této oblasti sestava rezonančních křivek spíše lineární soustavě, i když vliv silně nelineárního prvku je patrný i zde. Stoupající útlum ω_{bp} a snižující se amlituda buzení f_0 snižuje hodnoty rezonančních křivek ve vrcholech a může vést až k potlačení víceznačnosti rezonančních křivek v oblasti těsně pod bodem ω_{02}, viz obr. 12 (ba) až (bc).

Hranice stability R_u^2, resp. R_v^2 vypočtené pomocí rovnic (32), resp. (11b) jsou v těchto obrázcích zakresleny modrou, resp. fialovou barvou. Rezonanční oblast v okolí ω_{01} nepřináší z hlediska stability pohybu nic mimořádného. Obor druhé rezonanční oblasti má různý rozsah podle vzájemného vztahu rezonančních křivek a hranic stability. Podobně jako v minulé kapitole



Obrázek 12: Vztah rezonančních křivek R_ξ^2 (červená), R_γ^2 (zelená) a hranic stability ξ, ζ vyjádřených křivkami R_u^2 (modrá), R_v^2 (fialová); $\omega_{01} = 2.670s^{-1}, \omega_{0p} = 3.13s^{-1}, \omega_{02} = 3.711s^{-1}$;
- horní polovina (pole (aa) až (ai)): fixovaná amplituda $f_0 = 0.35$, útlum $\omega_{bp} \in (0.0, 0.20)$;
- dolní polovina (pole (ba) až (bi)): fixovaný útlum $\omega_{bp} = 0.20$, amplituda $f_0 \in (0.05, 0.45)$.



Obrázek 13: Odezva kyvadla v rovině (xy) v rezonanční oblasti pro stoupající $\omega \in (e_1, e_2)$ pro útlum $\omega_{bp} = 0.05$ a amplitudu $f_0 = 0.35$, viz obr. 12 (ac); číslo v závorce je pořadové číslo pole, k němu je připojena odpovídající frekvence.

můžeme i zde mluvit o několika typech rezonanční oblasti. Podle toho se řídí i počet a charakter intervalů, na které lze rezonanční oblast v konkrétním případě rozdělit (srovnej s rozborem prvního až třetího typu rezonančních oblastí v minulé kapitole).

Povšimněme si vývoje vztahu rezonančních křivek a hranic stability v dolní polovině obr. 12. V prvních třech polích $(ba) - (bc)$ můžeme mluvit o rezonanční oblasti třetího typu, tj. hranice stability nezasahují do rezonančních křivek (žluté zbarvení, viz obr. 4). Stav v poli (bc) může sloužit jako doporučení pro konstruktéra tlumiče, podobně jako jsme uvedli v závěru minulé kapitoly. Ostatní případy můžeme třídit podle toho, jak do rezonančních křivek zasahují hranice stability. V zásadě se dá říci, viz obr. 12 (aa), že rezonanční oblast začíná "dolním" průsečíkem rezonanční křivky R_ξ^2 a hranice stability R_v^2 - bod e_1 $(e_1 < \omega_{0p})$ a končí průsečíkem rezonanční křivky R_ξ^2 a hranice stability R_v^2 - bod (e_2), popř. dosahem hranice stability R_u^2 (modrá křivka). Při průchodu tímto úsekem se setkáme s různými režimy odezvy. Jsou typické nenulovou příčnou složkou odezvy ζ, a proto jsou nepřijatelné z hlediska praktické aplikace. Dodejme, že hranice R_u^2 (modrá křivka) při dalším zvyšování útlumu a amplitudy buzení se stane v zobrazeném oboru křivkou uzavřenou. Ta se postupně zmenšuje, až zcela vymizí, např. pro $f_0 = 0,8$ při $\omega_{bp} > 0.35$. Zdroj nestability ve složce ξ tak sice zmizí, neboť rezonanční křivky se stanou jednoznačnými, avšak soustava je stále hluboko v zóně nestability ζ, což vede ke vzniku stabilního limitního cyklu.

Proberme rezonanční oblast $\omega \in (e_1, e_2)$ pro případ $\omega_{bp} = 0.05, f_0 = 0.35$, viz sestava na obr. 12 (ac) - zelené pole v horní polovině obrázku. Odezva kyvadla v rovině (xy) vzhledem k bodu závěsu je ve význačných bodech ω znázorněna na obr. 13. Jedná se o výsledky simulace vycházející ze soustavy (25). Znázorněn je vždy jistý "kvazi-stacionární" stav, který nastane po odeznění účinků homogenních počátečních podmínek.

Stabilní stav semi-triviálního řešení je zřejmý z pole (1) na obr. 13 (podrezonanční oblast). Překonáme-li bod e_1 vznikne náhlým přechodem limitní cyklus, pole (2), který se chová jako silný atraktor. Příčná složka postupně klesá se zvyšujícím se ω, pole (2 - 9). Ve velmi krátkém intervalu je potom řešení téměř semi-triviální. Jedná se však pouze o kvantitativní shodu okolností, které vyplývají z toho, že R_ξ^2 se dotýká hranice stability R_v^2, bod d_1. Počínaje polem (12) se krátce obnoví limitní cyklus. Jak potvrdil velmi jemný frekvenční průzkum, tento limitní cyklus přejde náhle do chaotického stavu, který má nejprve stabilní charakter, vnější portrét se téměř nemění, pole (13 - 16) - víceznačná část rezonanční křivky. Potom se zvýší mohutnost odezvy, pole (17 - 21) - horní větev rezonanční křivky až po bod d_3. Zejména v oboru (17 - 21) dochází k výrazným záznějovým dějům nesymetrického přelévání energie v kvaziperiodickém režimu, neboť pohyb ztratí stabilitu v obou složkách, podobně jako v obr. 6 (b - d). Obecně vzato, tento stav se v zobrazení na rovinu (xy) projeví jako chaotický pohyb ohraničený vnější hranicí, popř. i vnitřní hranicí, kdy pohyb probíhá uvnitř útvaru připomínajícího mezikruží. Šířka tohoto útvaru se postupně zmenšuje a objeví se opět čistý stabilní limitní cyklus. V našem případě je v intervalu mezi obrazci (21, 22) odezva nestabilní v tom smyslu, že kolísá mezi chaotickým pohybem a limitním cyklem, jejichž portréty se téměř nemění. Počínaje polem (22) je limitní cyklus již stabilní, mění se jen málo až do bodu $\omega = e_2$, kde končí rezonanční oblast. V tomto bodě limitní cyklus náhle zmizí a obnoví se stabilní semi-triviální stav v nadrezonanční oblasti.

5. Závěr

Z analytického i numerického přístupu je zřejmé, že všeobecně používaný lineární model tlumicího kyvadla je přijatelný pouze pro velmi omezený rozsah parametrů kyvadla i uvažovaného buzení. Je třeba užívat model o dvou stupních volnosti, v kartézských či sférických souřadnicích, buzený harmonickým pohybem v bodě závěsu. V takovém případě je nutno podrobně zkoumat hranice dynamické stability a rezonanční chování. Uvažovaný systém je autoparametrický. Pro odhad stability semi-triviálního řešení, je třeba užít přibližnou aproximaci v kartézských souřadnicích, aby bylo možno definovat malou perturbaci v libovolné složce odezvy. Použitím metody harmonické rovnováhy se podařilo určit rezonanční křivku rovinné odezvy i hranice stability semi-triviálního řešení v obou složkách. Ukazuje se, že získané výsledky jsou kvantitativně přijatelné pouze mimo rezonanční interval, kdy je odezva stacionární.

Detailní analýza rezonanční oblasti ukázala, že je možné identifikovat tři rezonanční oblasti charakterizované rezonanční křivkou a hranicemi stability obou souřadnic. Pokud obě hranice stability protínají rezonanční křivku, je možné v rezonanční oblasti rozlišit čtyři různé rezonanční režimy. Druhý typ rezonanční oblasti je určen protnutím rezonanční křivky s hranicí stability ζ. V tomto případě se objevují dva různé režimy rezonance. Konečně třetí oblast rezonance je charakterizována rezonanční křivkou, která neprotíná žádnou z hranic stability. V tomto případě semi-triviální řešení zůstává v platnosti pro celou rezonanční oblast a hladce spojuje pod- a nadrezonanční intervaly.

Z praktického pohledu je důrazně doporučeno konstruovat tlumicí kyvadla tak, aby nedocházelo k žádnému protnutí rezonanční křivky a hranice stability. Zejména překročení hranice stability ξ by mohlo mít za následek negativní vliv kyvadla jak ve směru větru, tak i ve směru příčném. Vzhledem k tomu, že zatížení proudem vzduchu má širokopásmový účinek, parametry a detaily kyvadlového tlumiče musí být náležitě určeny.

Poděkování

Tato práce vznikla za laskavé podpory projektu Grantové agentury ČR č. 103/06/0099, projektů Grantové agentury AV ČR č. A2071401, IAA200710805 a Výzkumného záměru AV 0Z20710524.

Literatura

Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B. (1990) Prediction in chaotic nonlinear systems: Methods for time series with broadband Fourier spectra. *Physical Reviews A*, 41, 1742.

Arnold V.I. (1978) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York.

Bajaj A.K., Chang S.I., Johnson J.M. (1994) Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree of freedom system. *Nonlinear dynamics*, 5, 433-457.

Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn M. (1980) Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 2, Numerical application. *Meccanica*, 15, 21.

Guckenheimer J., Holmes P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York.

Hammel S.M. (1990) A noise reduction method for chaotic systems. *Physical Letters A*, 148, 421.

den Hartog J.P. (1956) *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York.

Hatwal H., Mallik A.K., Ghosh A. (1983) Forced nonlinear oscillations of an autoparametric system. *ASME Jour. Applied Mechanics*, 50, 657-662, 3.

Haxton R.S., Barr A.D.S. (1974) The autoparametric vibration absorber. *ASME Jour. Applied Mechanics*, 94, 119-125.

Koloušek V., Pirner M., Fischer O., Náprstek J. (1984) *Wind Effects on Civil Engineering Structures*. Elsevier, Amsterdam.

Lichtenberg A.J., Lieberman M.J. (1983) *Regular and Stochastic Motion*. Springer, New York.

Moser J. (1973) *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, Princeton.

Nabergoj R., Tondl A. (1994a) A simulation of parametric ship rolling: Effects of hull bending and torsional elasticity. *Nonlinear Dynamics*, 6, 265-284.

Nabergoj R., Tondl A., Virag Z. (1994b) Autoparametric resonance in an externally excited system. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, 2, 263-273.

Náprstek J. (1998) Non-linear self-excited random vibrations and stability of an SDOF system with parametric noises. *Meccanica*, 33, 267-277.

Náprstek J., Fischer O. (1999) Stochastic stability of slender profiles vibrations in wind. In: *Proc. 3rd Int. Conf. Eng. Aero-Hydroelasticity* (M. Balda, J. Horáček, eds). Inst.Thermomech., Prague, pp.302-308.

Náprstek J. (2000) Nonlinear stability of flutter-type vibrations in wind. In: *Proc. Flow Induced Vibrations FIV 2000* (S. Ziada, T. Staubli eds). HTA Luzern, Luzern, pp.445-454.

Náprstek J., Pirner M. (2002) Non-linear behaviour and dynamic stability of a vibration spherical absorber. In: *Proc. 15th ASCE Engineering Mechanics Division Conference* (A. Smyth et al. eds). Columbia Univ., New York, 10 pp. CD ROM.

Náprstek J., Fischer C. (2007) Auto-parametric semi-trivial and post-critical response of a spherical pendulum damper. In: *Proc. 11th Int.Conf. on Civ.Struct.Env. Engineering Computing* (B.H.V. Topping edt.). Civil-Comp Press, Malta St.Julian, 2007, CD paper #CC2007/2006/0020, 18 pgs.

Ott E. (1993) *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.

Pospíšil S., Náprstek J., Hračov S. (2006) Investigation of stability domains resulted from flow-structure interaction influenced by random noises. *Jour. Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 94: 883-893.

Schuster H.-G. (1988) *Deterministic Chaos*. 2nd ed. VCH, New York, 1988.

Tondl A., Nabergoj R. (1994c) Non-periodic and chaotic vibrations in a flow induced systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 4, 12: 2193-2202.

Tondl A. (1997) To the analysis of autoparametric systems. *Z. Angew. Math. Mech.*, vol77, 6, 407-418.

Tondl A. (1991) *Quenching of Self-Excited Vibrations*. Academia, Prague.

Tondl A., Ruijgrok T., Verhulst F., Nabergoj R. (2000) *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.