National Conference with International Participation

ENGINEERING MECHANICS 2008

Svratka, Czech Republic, May 12 – 15, 2008

JUDGEMENT OF POSSIBILITIES OF DECREASE OF VIBRATION MAGNITUDE OF FORCED RESPONSE BY ACTUATING KINEMATIC EXCITATION EFFECT

A. Markopoulos*, J. Ondrouch, P. Ferfecki *****

Summary: *The task is to determine time history of a kinematic excitation so that after the initial transient component dies out, the magnitude of displacement a kinematicaly excited system has been lower than the magnitude of the system without kinematic excitation. The best solution of the investigated problem can be calculated by means of a procedure using minimization of the functional. However, numerical simulations shows that due to complexity of analysis proposed approach is not useful for solving systems with more than one of degree of freedom. They also tell that the best approaches to decrease a vibration magnitude of a rotor system supported by hydrodynamic bearings are methods using linearization equation of motion.*

1. Úvod

Se vzrůstem produktivity práce, výkonů strojů a nárůstem jejich provozních rychlostí se zvětšují nežádoucí kmity a dochází k zvýšenému namáhání strojních součástí. Mechanické kmitání je přítomno prakticky při chodu každého stroje. U zařízení, jakými jsou vibrační dopravníky, třídiče, apod., je mechanické kmitání nepostradatelné k jejich funkci, ale u většiny strojů je kmitání nežádoucí. Tyto nežádoucí projevy nastávají např. u rotorových soustav uložených v hydrodynamických ložiskách při otáčkách rotoru ležících v oblasti tzv. víření a tlučení oleje.

Možnosti vhodné volby časového průběhu výchylky kinematického buzení pro potlačení ustáleného kmitání vynuceného silou harmonického průběhu jsou nejdříve zkoumány na mechanické soustavě s jedním stupněm volnosti popsané lineární, resp. nelineární pohybovou rovnicí. Na základě nabytých poznatků bylo kinematické buzení aplikováno k potlačení

* Ing. Alexandros Markopoulos: Department of Mechanics, VŠB-Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba; tel.: +420 597 325 752; fax: +420 597 321 287; e-mail: alexandros.markopoulos.fs@vsb.cz

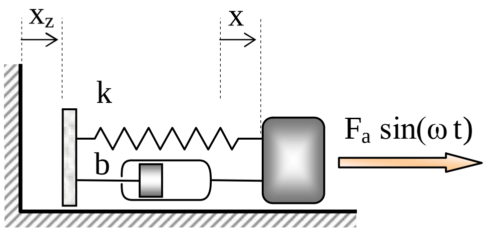
** Prof. Ing. Jan Ondrouch, CSc.: Centre of Intelligent Systems & Structures IT AS CR, branch of Ostrava, VŠB-Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba; tel.: +420 597 323 182; fax: +420 597 321 287; e-mail: jan.ondrouch@vsb.cz

*** Ing. Petr Ferfecki, Ph.D.: Center of Advanced Innovation Technologies, VŠB-Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15; 708 33 Ostrava-Poruba; tel.: +420 597 325 752, fax: +420 597 321 228; e-mail: petr.ferfecki@vsb.cz

kmitání způsobeného odstředivými silami u rotorové soustavy uložené v hydrodynamických ložiskách. Pohybová rovnice rotorové soustavy je sestavena pro absolutně tuhý hřídel uložený ve dvou hydrodynamických ložiskách. Do pohybové rovnice jsou hydrodynamické síly zahrnuty pomocí vektoru nelineární silové vazby, jehož prvky jsou stanoveny za předpokladu krátkého kavitovaného ložiska válcového průřezu. Pomocí navržených přístupů je dosaženo podstatného snížení velikosti amplitudy kmitání při otáčkách ležících i v oblasti tzv. víření a tlučení oleje.

2. Pohybové rovnice mechanického systému s kinematickým buzením

Návrh časového průběhu výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ potlačujícího účinky buzením harmonickou silou je zkoumán na mechanické soustavě z obr. 1 popsané diskrétním modelem s jedním stupněm volnosti.



Obr. 1: Model mechanického systému

Sestavená pohybová rovnice je v závislosti na vyjádření pružné a tlumicí charakteristiky lineární (1) nebo nelineární (2) a (3).

Jestliže lze předpokládat lineární závislosti pružných a tlumících sil v mechanickém systému (obr. 1), pak lze pohybovou rovnici zapsat jako

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot (\dot{x} - \dot{x}_z) + \Omega_0^2 \cdot (x - x_z) = f_a \cdot \sin(\omega \cdot t), \text{ kde } \delta = \frac{b}{2 \cdot m},\ \Omega_0^2 = \frac{k}{m},\ f_a = \frac{F_a}{m} \tag{1}$$

a x je zobecněná souřadnice, x_z je výchylka kinematického buzení, $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{x}_z$ je zobecněná rychlost, zobecněné zrychlení a rychlost kinematického buzení (tečka nad použitým symbolem představuje derivaci podle času t), δ je konstanta doznívání, Ω_0 je frekvence vlastního netlumeného kmitání, f_a je poměr amplitudy budící síly F_a k hmotnosti m, b je koeficient tlumení, k je lineární tuhost pružiny a ω je úhlová frekvence budící síly.

V případě nelineární závislosti pružných a tlumicích sil je zkoumána pohybová rovnice pro Duffingův (2) a van der Polův typ pohybové rovnice (3)

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot (\dot{x} - \dot{x}_z) + \Omega_0^2 \cdot (x - x_z) + \beta \cdot (x - x_z)^3 = f_a \cdot \sin(\omega \cdot t), \text{ kde } \beta = \frac{k_1}{m}, \tag{2}$$

$$\ddot{x} + \left[\varepsilon \cdot (x - x_z)^2 - 2 \cdot \delta\right] \cdot (\dot{x} - \dot{x}_z) + \Omega_0^2 \cdot (x - x_z) = f_a \cdot \sin(\omega \cdot t), \text{ kde } \varepsilon = \frac{\rho}{m} \tag{3}$$

a k_1 je koeficient nelineární tuhosti pružiny a ρ je koeficient. O mechanickém systému z obr. 1 se předpokládá, že v počátečním čase t_0 jsou předepsány tyto počáteční podmínky: $x(t_0) = x_0$ a $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

3. Stanovení časového průběhu výchylky kinematického buzení

Úkolem je určit časový průběh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$, tak aby amplituda zobecněné souřadnice x po odeznění přechodového děje u kinematicky a harmonicky buzeného systému byla menší než u systému bez kinematického buzení.

K určení takovéhoto průběhu kinematického buzení byly otestovány tři základní varianty jeho návrhu. V prvních dvou variantách návrhu $x_z(t)$ se předpokládá, že eliminací účinků harmonického silového buzení se dosáhne kinematickým buzením zavedeným v protifázi silovému buzení a ve třetí variantě návrhu $x_z(t)$ se využívá poznatků z teorie optimálního řízení dynamických systémů.

3.1 Stanovení časového průběhu výchylky kinematického buzení pro mechanický systém popsán lineární pohybovou rovnicí

a.) Přibližný odhad výchylky kinematického buzení $x_z(t)$.

Pro slabě tlumený mechanický systém ($\delta \approx 0$) se pohybová rovnice (1) upraví na

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 \cdot x = \Omega_0^2 \cdot x_z + f_a \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{4}$$

a účinky harmonického buzení se vyruší, jestliže se $x_z(t)$ předpokládá ve tvaru

$$x_z = \frac{-f_a}{\Omega_0^2} \sin(\omega \cdot t). \tag{5}$$

b.) Návrh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ pro odhadnutý tvar jeho časového průběhu.

Průběh výchylky kinematického buzení se předpokládá, že je stejně jako silové buzení harmonické se stejnou úhlovou frekvencí

$$x_z(t) = x_{z,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_z), \tag{6}$$

kde $x_{z,A}$ je hledaná amplituda výchylky kinematického buzení a φ_z je jeho fázový posuv. Pohybovou rovnici (1) lze upravit na

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \Omega_0^2 \cdot x = 2 \cdot \delta \cdot \dot{x}_z + \Omega_0^2 \cdot x_z + f_a \cdot \sin(\omega \cdot t). \tag{7}$$

Neznámé parametry kinematického buzení $x_{z,A}$, φ_z se vypočítají po dosazení (6) do pravé strany (7), o které se předpokládá, že se v každém časovém okamžiku rovná nule

$$x_{z,A} = \frac{-f_a}{\sqrt{\Omega_0^4 + (2 \cdot \delta \cdot \omega)^2}}, \; tg\varphi_z = \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\Omega_0^2}. \tag{8}$$

c.) Návrh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ na základě optimálního řízení dynamického systému.

Pohybová rovnice řízeného dynamického systému (1) se vyjádří ve stavovém prostoru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, x_z, \dot{x}_z, t), \text{ kde } \mathbf{x} = \{x_1 \quad x_2\}^T, \; \dot{\mathbf{x}} = \{\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2\}^T, \; x_1 = x, \; x_2 = \dot{x}. \tag{9}$$

Problém určení optimálního průběhu $x_z(t)$ vede na variační problém Lagrangeova typu, jehož rozšířený funkcionál se podle Štecha (1999) vyjádří ve tvaru

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_1 \to \infty} \left\{ g(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \cdot \left[\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, x_z, \dot{x}_z, t) \right] \right\} dt \to \min, \tag{10}$$

kde $g(\mathbf{x}, t)$ je funkce kritéria kvality řízení, $\boldsymbol{\lambda}$ je Lagrangeův vektor a t_0, t_1 je počáteční a koncový čas řízení. Lagrangeova úloha se řeší, tak že se pro rozšířený funkcionál (10) napíšou Eulerovy-Lagrangeovy rovnice a jejich řešením se získá extremála průběhu $x_z(t)$, jak je např. uvedeno v Štecha (1999). Pomocí tohoto způsobu výpočtu největší obtíže nastávají při řešení soustavy Eulerových-Lagrangeových rovnic doplněných o soubor počátečních a okrajových podmínek, ze kterých se určuje průběh $x_z(t)$ a soustava se zpravidla musí řešit numerickými metodami.

Dosazením lineární pohybové rovnice (1) převedené do stavového prostoru (9) a funkce kritéria kvality řízení, která byla zvolena ve tvaru odchylky čtverce zobecněné souřadnice x_1 od žádané hodnoty w a w=0m se rozšířený funkcionál vyjádří ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{J} = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & (x_1 - w)^2 + \lambda_1 \cdot (\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot \big[\dot{x}_2 - f_a \cdot \sin(\omega \cdot t) - \\ & - 2 \cdot \delta \cdot \dot{x}_z - \Omega_0^2 \cdot x_z + 2 \cdot \delta \cdot x_2 + \Omega_0^2 \cdot x_1 \big] \Big\} dt, \end{aligned} \tag{11}$$

kde Lagrangeův vektor je $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1 \quad \lambda_2\}^T$.

Minimalizující řešení rozšířeného funkcionálu lineární pohybové rovnice (11) doplněného o počáteční a koncové podmínky (pro tzv. pevný čas a volný konec) lze vyjádřit v uzavřeném tvaru

$$x_z(t) = \left(-w - \frac{F_a \cdot b \cdot \omega}{b^2 \cdot \omega^2 + k^2} \right) \cdot e^{\frac{-k}{b} t} + w - \frac{F_a \cdot k}{b^2 \cdot \omega^2 + k^2} \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_a \cdot b \cdot \omega}{b^2 \cdot \omega^2 + k^2} \cos(\omega \cdot t). \tag{12}$$

Vypočítaný časový průběh kinematického buzení $x_z(t)$ (12) je nezávislý na počátečních podmínkách a po odeznění přechodového kmitání se zatlumí první výraz v (12), a pak průběh kinematického buzení $x_z(t)$ je harmonického časového průběhu, který je stejný jako v případě (6).

3.2. Stanovení časového průběhu výchylky kinematického buzení pro mechanický systém popsán pohybovou rovnicí Duffingova typu

a.) Přibližný odhad výchylky kinematického buzení $x_z(t)$.

V této variantě se výchylka kinematického buzení pro nelineární rovnici Duffingova typu (2) odhadne, analogickým způsobem jako u lineární pohybové rovnice, z její linearizované rovnice.

b.) Návrh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ pro odhadnutý tvar jeho časového průběhu (6).

Průběh výchylky kinematického buzení (6) se opět předpokládá ve stejném tvaru jako u lineární pohybové rovnice. Velikost neznámé amplitudy $x_{z,A}$ a fázového posuvu φ_z výchylky kinematického buzení se určí z Duffingovy rovnice (2) linearizované harmonickou linearizací podle Kožešník (1979) a to analogickým způsobem jako u lineární pohybové rovnice

$$\ddot{x}+2\cdot\delta\cdot(\dot{x}-\dot{x}_z)+\left(\Omega_0^2+\frac{3}{4}\beta\cdot A^2\right)\cdot(x-x_z)=f_a\cdot\sin(\omega\cdot t), \tag{13}$$

kde A je amplituda kmitání, která se vypočítá z rovnice (14)

$$\left[\left(-\omega^2+\Omega_0^2+\frac{3}{4}\beta A^2\right)^2+(2\delta\omega)^2\right]A^2=f_a^2, \tag{14}$$

amplituda $x_{z,A}$ a fázový posuv φ_z kinematického buzení je

$$x_{z,A}=\frac{-f_a}{\sqrt{\left(\Omega_0^2+\frac{3}{4}\beta\cdot A^2\right)^2+(2\cdot\delta\cdot\omega)^2}},\ tg\varphi_z=\frac{2\cdot\delta\cdot\omega}{\Omega_0^2+\frac{3}{4}\beta\cdot A^2}. \tag{15}$$

c.) Návrh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ na základě optimálního řízení dynamického systému.

Dosazením nelineární pohybové rovnice (2) převedené do stavového prostoru a funkce kritéria kvality řízení ve stejném vyjádření jako u lineární pohybové rovnice se získá rozšířený funkcionál ve tvaru

$$\begin{aligned}\bar{J}=\int_{t_0}^{t_1}\Big\{&(x_1-w)^2+\lambda_1\cdot(\dot{x}_1-x_2)+\lambda_2\cdot\big[\dot{x}_2-f_a\cdot\sin(\omega\cdot t)-2\cdot\delta\cdot\dot{x}_z-\Omega_0^2\cdot x_z+\\&+2\cdot\delta\cdot x_2+\Omega_0^2\cdot x_1+\beta\cdot(x_1-x_z)^3\big]\Big\}dt,\end{aligned} \tag{16}$$

Hledání minima tohoto funkcionálu vede na soustavu diferenciálních rovnic a k jejich řešení se musí použít numerické metody.

3.3 Stanovení časového průběhu výchylky kinematického buzení pro mechanický systém popsán pohybovou rovnicí van der Polova typu

a.) Přibližný odhad výchylky kinematického buzení $x_z(t)$.

V této variantě se výchylka kinematického buzení odhadne stejným způsobem jako u předchozího typu pohybové rovnice.

b.) Návrh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ pro odhadnutý tvar jeho časového průběhu (6).

Neznámá amplituda $x_{z,A}$ a fázový posuv φ_z výchylky kinematického buzení je určena z van der Polovy rovnice (3) linearizované harmonickou linearizací podle Kožešník (1979)

$$\ddot{x}+\left(\frac{1}{4}\varepsilon\cdot A^2-2\cdot\delta\right)\cdot(\dot{x}-\dot{x}_z)+\Omega_0^2\cdot(x-x_z)=f_a\cdot\sin(\omega\cdot t), \tag{17}$$

$$\left[\left(-\omega^2+\Omega_0^2\right)^2+\left(\frac{1}{4}A^2\cdot\varepsilon-2\cdot\delta\right)^2\cdot\omega^2\right]\cdot A^2=f_a^2, \tag{18}$$

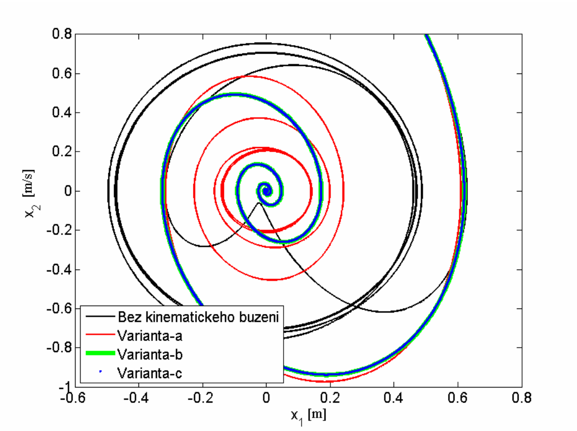
$$x_{z,A} = \frac{-f_a}{\sqrt{\Omega_0^4 + \left[\left(\frac{1}{4}A^2 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \delta\right) \cdot \omega\right]^2}}, \quad tg\varphi_z = \frac{\left(\frac{1}{4}A^2 \cdot \varepsilon - 2 \cdot \delta\right) \cdot \omega}{\Omega_0^2}. \tag{19}$$

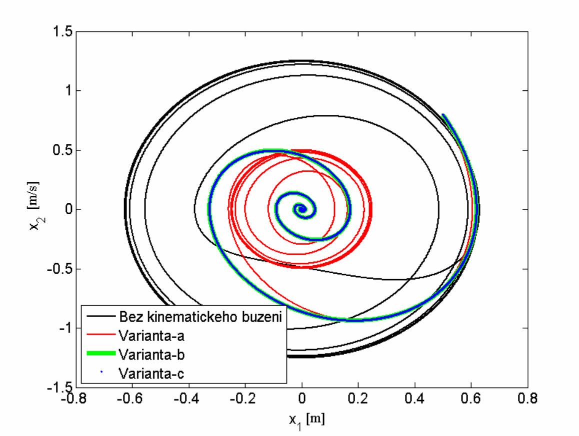
c.) Návrh výchylky kinematického buzení $x_z(t)$ na základě optimálního řízení dynamického systému.

Postupem uvedeným výše lze sestavit rozšířený funkcionál pro van der Polovu rovnici. Ovšem numerickými experimenty provedenými v programovém souboru MATLAB se nepodařilo pomocí funkce (bvp4c) implementované v tomto programu vypočítat řešení Eulerovy-Lagrangeovy soustavy (tj. soustava diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami), a proto byl tento rozšířený funkcionál za účelem dalších výpočtů zjednodušen.

4. Výsledky numerických simulací – lineární pohybová rovnice

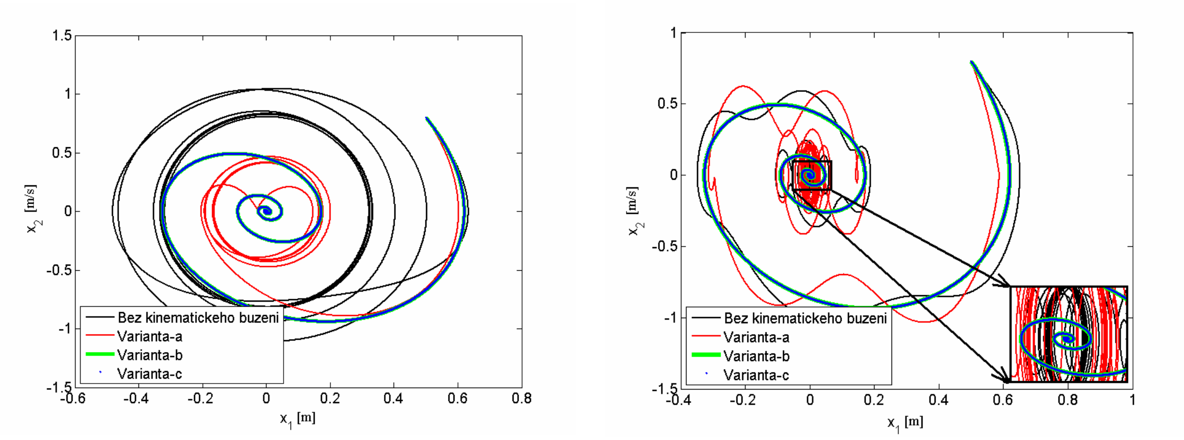
Potlačení amplitudy ustáleného kmitání vybuzeného silou harmonického časového průběhu pomocí kinematického buzení bylo numericky otestováno na mechanickém systému popsaného lineární pohybovou rovnicí s těmito parametry: m=1kg, b=0.8Nsm^{-1}, k=4Nm^{-1}, F_a=1N a ω=1.5rad·s^{-1}, ω=2rad·s^{-1}, ω=2.5rad·s^{-1} a ω=10rad·s^{-1} a počátečními podmínkami: x_0=0.5m a $\dot{x}_0 = 0.8\,\mathrm{ms}^{-1}$.





Obr. 2: Trajektorie ve fázové rovině pro ω=1.5rad·s^{-1} (vlevo) a ω=2rad·s^{-1} (vpravo)

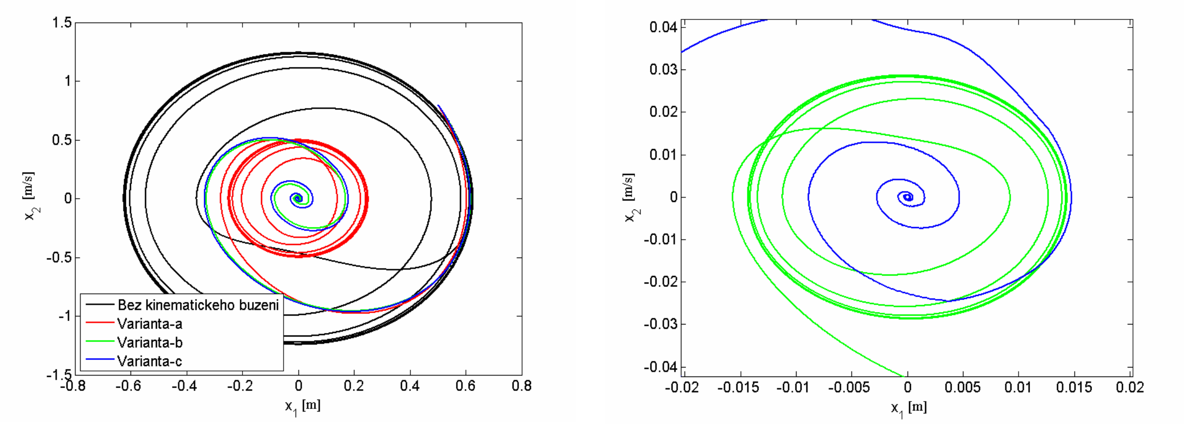
Pomocí skoro všech variant návrhů časových průběhů kinematického buzení (obr. 2 a obr. 3), se podařilo snížit amplitudu kmitání odezvy u mechanického systému popsaného lineární pohybovou rovnicí. Jen v případě přibližného odhadu návrhu kinematického buzení (tj. varianty-a) nebylo pro vyšší úhlovou frekvenci budící síly ω=10rad·s^{-1} dosaženo snížení amplitudy výchylky odezvy (pravý obr. 3). Na základě průběhu kinematického buzení sestaveného z optimálního řízení dynamického systému (12) a z odhadnutého tvaru jeho časového průběhu (6) byla vypočítána prakticky stejná odezva a pro $t \to \infty$ se její hodnota blíží k $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$.



Obr. 3: Trajektorie ve fázové rovině pro ω=2.5rad·s^{-1} (vlevo) a ω=10rad·s^{-1} (vpravo)

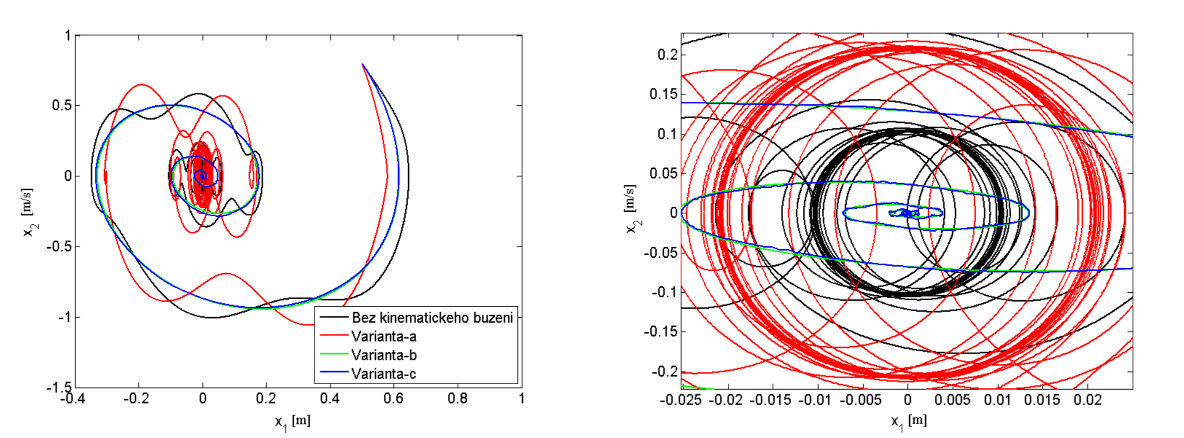
5. Výsledky numerických simulací – nelineární pohybová rovnice Duffingova typu

Navržené způsoby výpočtů časového průběhu výchylky kinematického buzení byly otestovány numerickými simulacemi na pohybové rovnici Duffingova typu s následujícími parametry: m=1kg, b=0.8Nsm^{-1}, k=4Nm^{-1}, k_1=0.4Nm^{-3}, F_a=1N, ω=2rad·s^{-1} a ω=10rad·s^{-1} a stejné hodnoty počátečních podmínek jako u lineární pohybové rovnice.



Obr. 4: Trajektorie ve fázové rovině pro ω=2rad·s^{-1} (vlevo) a detail kmitání v okolí počátku souřadnicového systému (vpravo)

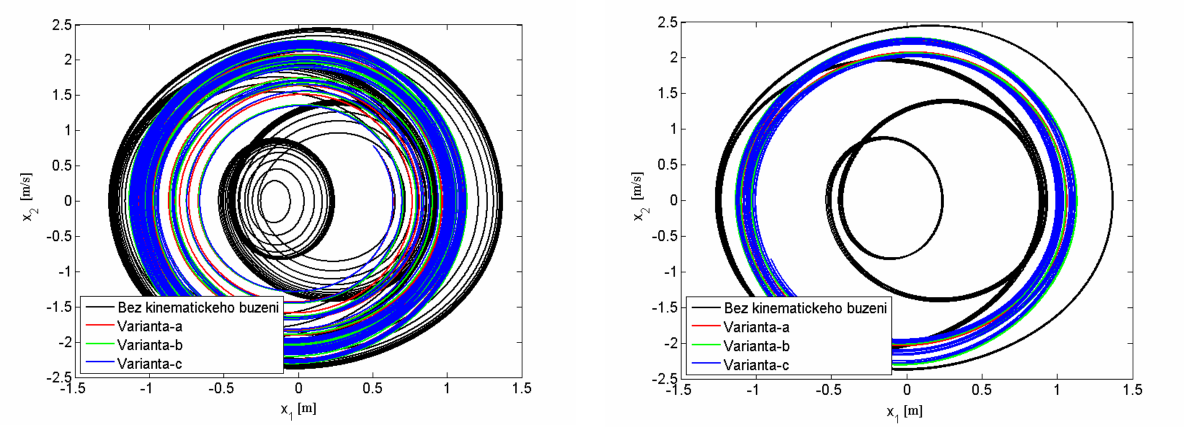
Návrhem kinematického buzení z jeho odhadnutého tvaru časového průběhu výchylky (6) linearizované Duffingovy rovnice (13) se podařilo snížit amplitudu výchylky odezvy minimálně 40x vzhledem k odezvě vypočítané bez kinematického buzení viz obr. 4 a obr. 5. Průběh výchylky kinematického buzení stanovený z optimálního řízení dynamického systému byl vypočítán numerickou integrací a amplituda odezvy z tohoto přístupu je přibližně pro ω=2rad·s^{-1} cca 50x menší než u varianty-b. Naopak pro větší hodnotu úhlové frekvence ω=10rad·s^{-1} je dosaženo většího potlačení kmitání odezvy u varianty-b než u varianty-c, a to cca 10x. Varianta-a z přibližného odhadu návrhu kinematického buzení není pro vyšší hodnoty úhlové frekvence budící síly vhodná (obr. 5).



Obr. 5: Trajektorie ve fázové rovině pro ω=10rad·s^{-1} (vlevo) a detail kmitání v okolí počátku souřadnicového systému (vpravo)

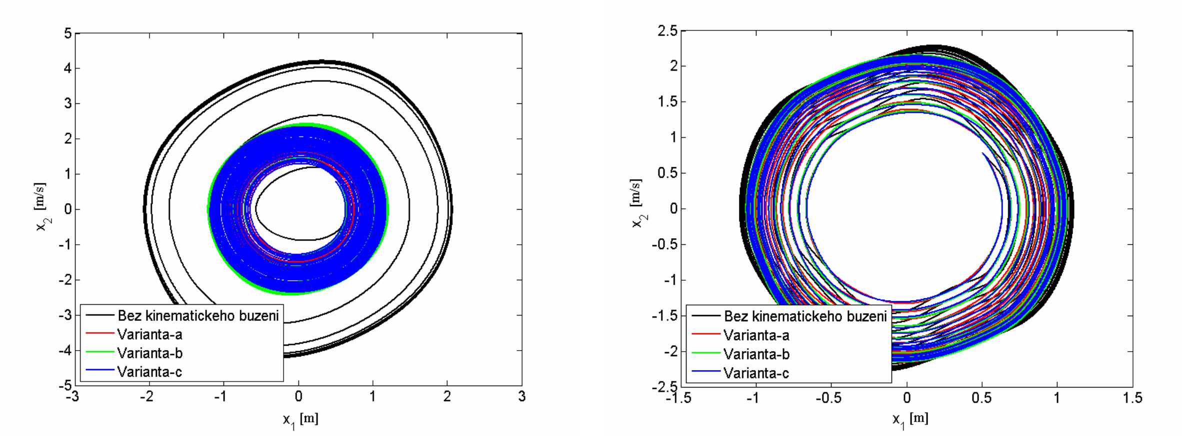
6. Výsledky numerických simulací – nelineární pohybová rovnice van der Polova typu

Numerické výpočty potlačení amplitudy ustáleného kmitání s pohybovou rovnicí van der Polova typu byly uskutečněny s těmito parametry: m=1kg, b=0.1Nsm^{-1}, k=4Nm^{-1}, ρ=0.32Nsm^{-3}, F_a=1N, ω=1.5rad·s^{-1}, ω=2rad·s^{-1}, ω=2.5rad·s^{-1} a ω=10rad·s^{-1} a počáteční podmínky byly zvoleny stejné jako v předchozích případech.

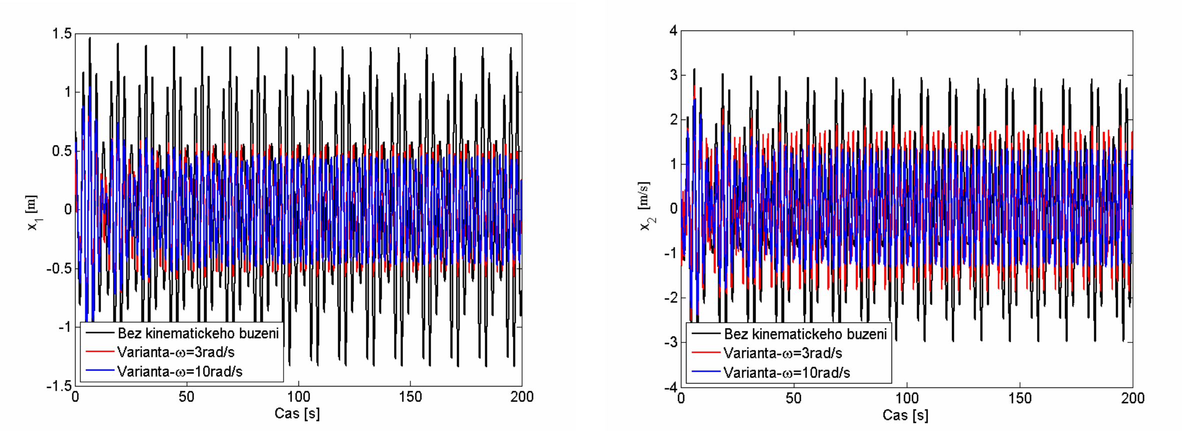


Obr. 6: Trajektorie ve fázové rovině pro ω=1.5rad·s^{-1} (vlevo) a ustálené kmitání (vpravo)

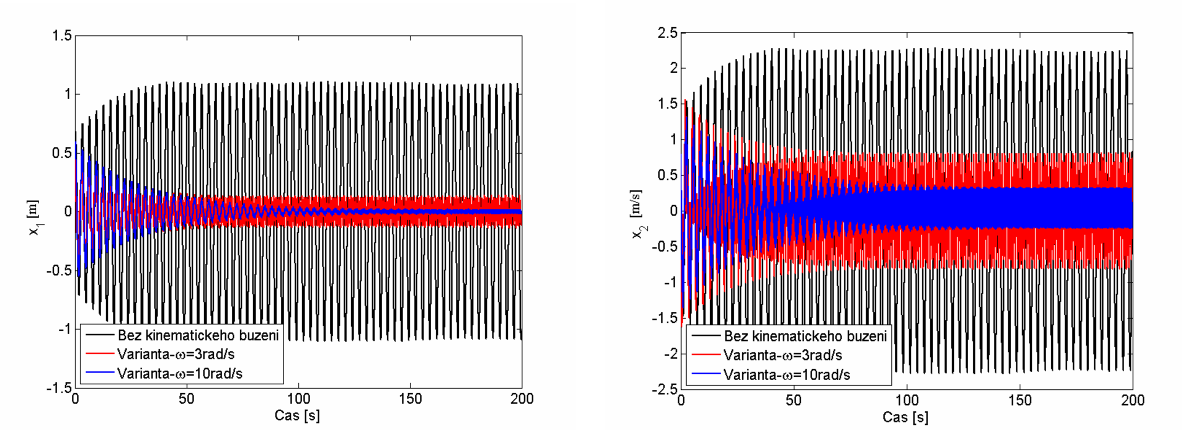
Numerickými simulacemi se ukázalo, že snížení velikosti amplitudy odezvy s kinematickým buzením je problematické a pomocí všech vyzkoušených návrhů kinematického buzení se zjistily skoro stejné, a to většinou nepříliš úspěšné výsledky (obr. 6 a obr. 7). Vypočet odezvy mechanického systému s kinematickým buzením stanoveným i z optimálního řízení dynamického systému se dosáhlo pouze nevýznamného snížení amplitudy odezvy, protože „původní“ funkcionál se musel zjednodušit, neboť jinak nebylo možno nalézt jeho řešení. Pouze v okolí úhlové frekvence budící síly o hodnotě ω=2rad·s^{-1} se kinematickým buzením amplituda odezvy snížila cca 2x (levý obr. 7), protože na odezvě se dominantním způsobem projevuje úhlová frekvence shodná s frekvencí budící síly.



Obr. 7: Trajektorie ve fázové rovině pro ω=2rad·s^{-1} (vlevo) a trajektorie ve fázové rovině pro ω=10rad·s^{-1} (vpravo)



Obr. 8: Časový průběh zobecněné souřadnice (vlevo) a časový průběh zobecněné rychlosti (vpravo) pro ω=2.5rad·s^{-1}



Obr. 9: Časový průběh zobecněné souřadnice (vlevo) a časový průběh zobecněné rychlosti (vpravo) pro ω=10rad·s^{-1}

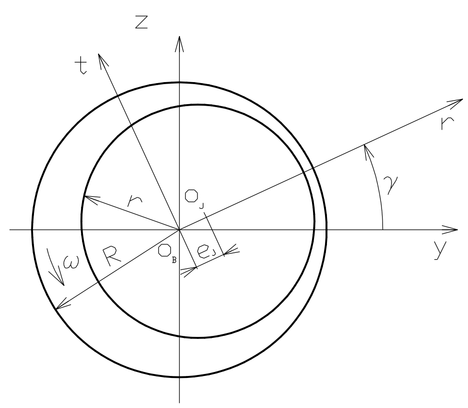
Na základě předchozích výsledků bylo přistoupeno k numerických experimentům s volbou kinematického buzení s frekvencí odlišnou od budící síly. Zvětšováním frekvence kinematického buzení odhadnutém ve tvaru $x_z(t)=-f_a/\,\Omega_0^2\cdot sin(n\cdot\omega\cdot t)$ se s rostoucím násobkem frekvence budící síly *n* snižovala amplituda odezvy mechanického systému, jak je znázorněno pro dvě hodnoty úhlové frekvence budící síly na obr. 8 a obr. 9.

7. Možnosti stanovení kinematického buzení u mechanického systému s jedním stupněm volnosti

Kinematickým buzením s frekvencí rovnou frekvenci silového buzení lze potlačit amplitudu ustáleného vynuceného kmitání. U mechanické soustavy popsané lineární pohybovou rovnici lze docílit úplného potlačení vynuceného kmitání. V případě pohybové rovnice Duffingova typu se pro uvažované parametry podařilo podstatně snížit amplitudu odezvy vynuceného kmitání. Kvůli významným nelineárním projevům v pohybové rovnici van der Polova typu je obtížné s navrženými přístupy pro stanovení kinematického buzení snížit amplitudu odezvy. Provedené numerické experimenty pro van der Polovu rovnici ukázaly, že efektivní je zvolit větší úhlovou frekvenci kinematického buzení než je frekvence budící síly. Nově vytvořený postup výpočtu kinematického buzení založený na hledání extrému funkcionálu je efektivním nástrojem, jestliže lze vyřešit příslušnou soustavu Euler-Lagrangeových diferenciálních rovnic k výpočtu extremály řešené úlohy.

Zkušenosti získané z numerických simulací při návrhu časového průběhu výchylky kinematického buzení na mechanické soustavě popsané s jedním stupněm volnosti jsou zhodnoceny při návrhu kinematického buzení potlačující účinky buzení odstředivých sil rotorové soustavy uložené v hydrodynamických ložiskách.

8. Pohybová rovnice rotorové soustavy uložené v hydrodynamických ložiskách



Obr. 10: Souřadnicové systémy

Modelové rotorové soustavě jsou přirazeny následující vlastnosti: (i) hřídel je považován za absolutně tuhý, (ii) gyroskopické účinky hřídele a ložiska jsou zanedbány, (iii) ložiskové síly jsou určeny z řešení Reynoldsovy rovnice a za předpokladu válcového krátkého kavitovaného (π film) ložiska podle Zapoměl (2000), (iv) rotorová soustava je zatížena odstředivou silou způsobenou nevyváženosti hřídele a jeho vlastní tíhou a (v) rotor se otáčí konstantní úhlovou rychlostí.

Za těchto předpokladů je v pevném souřadnicovém systému sestavena soustava pohybových rovnic rotorové soustavy

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} = -2\cdot\mathbf{f}_L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)+\mathbf{f}_{ST}+\mathbf{f}_A(t),$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{Bmatrix} y_J \\ z_J\end{Bmatrix},\quad \dot{\mathbf{q}}=\begin{Bmatrix} \dot{y}_J \\ \dot{z}_J\end{Bmatrix},\quad \ddot{\mathbf{q}}=\begin{Bmatrix} \ddot{y}_J \\ \ddot{z}_J\end{Bmatrix}, \qquad (20)$$

$$\mathbf{f}_L = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ST} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_A = \begin{Bmatrix} m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{Bmatrix},$$

kde y_J, z_J, $\dot{y}_J, \dot{z}_J$ a $\ddot{y}_J, \ddot{z}_J$ jsou posuvy, rychlosti a zrychlení ve středu čepu hřídele ve vodorovné a svislé rovině kmitání (obr. 10), m je hmotnost hřídele, e je nevyváženost hřídele, ω je úhlová rychlost otáčení hřídele, t je čas, g je gravitační zrychlení a f_y je vodorovná a f_z je svislá složka ložiskové síly

$$f_y = f_r \cdot \cos\gamma - f_t \cdot \sin\gamma\,, \; f_z = f_r \cdot \sin\gamma + f_t \cdot \cos\gamma\,, \tag{21}$$

kde pro *cos(γ)* a *sin(γ)* platí

$$\cos(\gamma) = \frac{y_J - y_B}{e_J}, \; \sin(\gamma) = \frac{z_J - z_B}{e_J}, \; e_J = \sqrt{(z_J - z_B)^2 + (y_J - y_B)^2} \tag{22}$$

a e_J je excentricita mezi středem ložiskové pánve O_B a středem čepu ložiska O_J, viz obr. 10.

Vodorovná a svislá složka ložiskové síly (21) v pevném souřadnicovém systému se vyjádří pomocí radiální f_r a tečné f_t složky ve spolurotujícím souřadnicovém systému a její složky jsou uvedeny v Zapomněl (2000) a pro válcové krátké kavitované ložisko jsou

$$\begin{aligned} f_r &= \eta \cdot R \cdot L \cdot \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \cdot \left[(\omega - 2 \cdot \dot{\gamma}) \frac{\varepsilon_J^2}{(1-\varepsilon_J^2)^2} + \frac{\pi \cdot (1 + 2 \cdot \varepsilon_J^2) \cdot \dot{\varepsilon}_J}{2 \cdot (1 - \varepsilon_J^2)^{5/2}} \right], \\ f_t &= -\eta \cdot R \cdot L \cdot \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \cdot \left[(\omega - 2 \cdot \dot{\gamma}) \frac{\pi \cdot \varepsilon_J}{4 \cdot (1-\varepsilon_J^2)^{3/2}} + \frac{2 \cdot \varepsilon_J \cdot \dot{\varepsilon}_J}{(1 - \varepsilon_J^2)^2} \right] + 2 \cdot R \cdot L \cdot p\,, \end{aligned} \tag{23}$$

kde

$$\delta = R - r\,, \; \varepsilon_J = e_J / \delta\,,$$

$$\dot{\varepsilon}_J = \frac{(\dot{y}_J - \dot{y}_B) \cdot \cos(\gamma) + (\dot{z}_J - \dot{z}_B) \cdot \sin(\gamma)}{\delta}, \; \dot{\gamma} = \frac{-(\dot{y}_J - \dot{y}_B) \cdot \sin(\gamma) + (\dot{z}_J - \dot{z}_B) \cdot \cos(\gamma)}{\varepsilon_J} \tag{24}$$

a δ je radiální mezera, R je poloměr ložiskové pánve, r je poloměr čepu ložiska, L je délka ložiska, η je dynamická viskozita oleje a p je tlak okolního prostředí na čelech ložiska.

Jestliže rotorová soustava příčně nekmitá a je zatížena časově neproměnným zatížením, pohybová rovnice (20) se redukuje na tvar

$$\mathbf{0} = -2 \cdot \mathbf{f}_L(\mathbf{q}_{ST}, \mathbf{0}) + \mathbf{f}_{ST}\,, \tag{25}$$

kde $\mathbf{q}_{ST}$ je vektor posuvů ve středu čepu hřídele v rovnovážné poloze.

Nelineární vazbový vektor hydrodynamických ložisek $\mathbf{f}_L$ v pohybové rovnici (20) lze rozvinout do Taylorovy řady, ve které se uváží absolutní a lineární členy a pak se pohybová rovnice upraví do tvaru

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \mathbf{D}_B \cdot \dot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \mathbf{D}_K \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}_{ST} + \mathbf{f}_A(t) - 2 \cdot \mathbf{f}_L(\mathbf{q}_{ST}, \mathbf{0}) + 2 \cdot \mathbf{D}_K \cdot \mathbf{q}_{ST}\,, \tag{26}$$

$$\mathbf{D}_B = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{ST},\\ \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}}}, \quad \mathbf{D}_K = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}}\right]_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{ST},\\ \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}}}.$$

Stabilita rovnovážné polohy rotorové soustavy se posuzuje podle velikosti reálných částí vlastních čísel linearizované pohybové rovnice. Rovnovážná poloha je stabilní, pokud jsou reálné části všech vlastních čísel pohybové rovnice tzv. rušivého pohybu záporné, jak je uvedeno v práci Ferfecki (2005).

8.1 Pohybová rovnice kinematicky buzené rotorové soustavy uložené v hydrodynamických ložiskách

Za předpokladu, že působící kinematické buzení na ložisková pouzdra nezávisí na posuvu a rychlosti rotorové soustavy, pak toto buzení představuje přídavné zatížení a pohybová rovnice rotorové soustavy uložené v hydrodynamických ložiskách kinematicky buzených se zapíše ve tvaru

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} = -2\cdot\mathbf{f}_L(\mathbf{q}-\mathbf{q}_k,\dot{\mathbf{q}}-\dot{\mathbf{q}}_k,t)+\mathbf{f}_{ST}+\mathbf{f}_A(t),\ \mathbf{q}_k = \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix},\ \ \dot{\mathbf{q}}_k = \begin{Bmatrix} \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{Bmatrix}, \tag{27}$$

kde $\mathbf{q}_k$ je vektor posuvů kinematického buzení a $\dot{\mathbf{q}}_k$ je vektor rychlostí kinematického buzení a q_y, q_z, $\dot{q}_y$ a $\dot{q}_z$ jsou složky posuvů a rychlostí kinematického buzení působící ve vodorovném a svislém směru kmitání.

9. Výsledky numerických simulací s rotorovou soustavou uloženou v hydrodynamických ložiskách

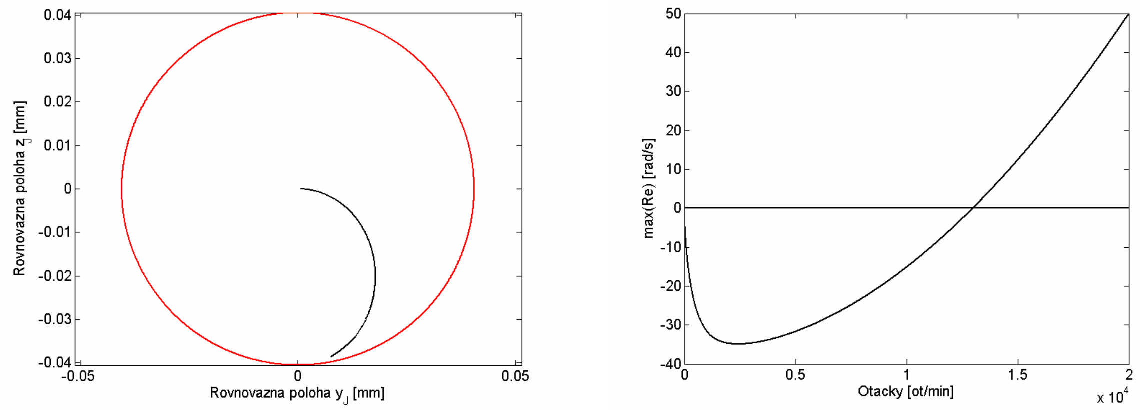
Numerické experimenty jsou provedeny s rotorovou soustavou navrhnutou ve společnosti TECHLAB, s.r.o., za účelem prozkoumání potlačení nestabilit pohybu rotoru vyvolaných hydrodynamickými ložisky.

Tato rotorová soustava je složena z hřídele poháněného elektromotorem a uloženého ve dvou stejných radiálních hydrodynamických ložiskách, jenž lze budit silou obecného průběhu vyvolanou piezoaktuátory. Parametry zkoumané rotorové soustavy a hydrodynamických ložisek jsou většinou převzaty z výzkumné zprávy Šimek (2007) a jejich hodnoty jsou tyto: L=0.015m délka ložiska, R=15.0105mm poloměr ložiskové pánve, r=14.97mm poloměr čepu ložiska, e =1.65·10^{-5}m nevyváženost hřídele, m=0.780kg hmotnost hřídele, η=0.004Pa·s dynamická viskozita oleje, p=0Pa tlak na čelech ložiska a g=9.81m·s^{-2} gravitační zrychlení.

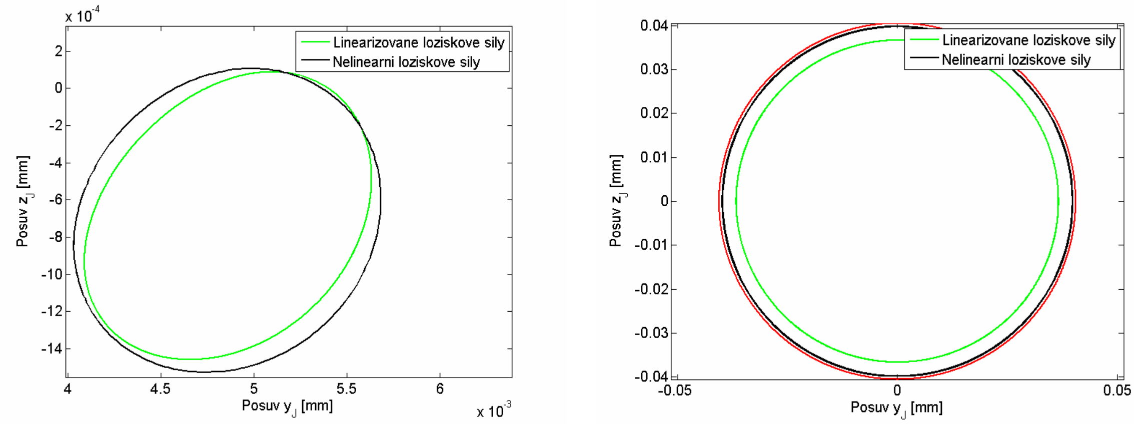
Uvedené výpočetní postupy byly algoritmizovány v programovém systému MATLAB R2007a a ke stanovení odezvy rotorové soustavy na buzení odstředivými silami a případně i kinematické buzení pro lineární (26) a nelineární (20) vyjádření vazbového vektoru hydrodynamických ložisek byly použity integrační metody implementované v MATLABu a konkrétně se jednalo o funkce Ode45 a Ode23s.

Rovnovážná poloha rotorové soustavy je určena v otáčkovém rozsahu (10÷30000)min^{-1} a polohy středů čepů ložisek uvnitř ložiskové mezery jsou vykresleny na levém obr. 11 a na všech obrázcích uvedených níže je obrys ložiskové mezery vykreslen kružnicí červené barvy. Závislost největší reálné části vlastních čísel na otáčkách rotorové soustavy je zobrazena na pravém obr. 11 a rovnovážná poloha je stabilní v rozsahu (10÷12980) min^{-1}.

Ustálený tvar trajektorie středu čepu hřídele rotorové soustavy buzené odstředivými silami pro lineární a nelineární silové vyjádření vektoru hydrodynamických sil je vypočítán s otáčkami ležícími ve stabilní a nestabilní oblasti (obr. 12). Pro zvolenou hodnotu otáček rotorové soustavy je trajektorie středu čepu hřídele s nelineárním vyjádřením ložiskových sil větší než u linearizované silové vazby.



Obr. 11: Řada rovnovážných poloh středů čepů hřídele (vlevo) a závislost největší reálné části vlastních čísel na otáčkách rotorové soustavy (vpravo)



Obr. 12: Trajektorie středu čepu pro otáčky 3000min^{-1} (vlevo) a 7000min^{-1} (vpravo)

Na následujících obrázcích (obr. 13 až obr. 18) jsou vykresleny trajektorie středu čepu hřídele (vlevo) a Fourierovy obrazy časových průběhů posuvů ve vodorovném směru kmitání (vpravo) u rotorové soustavy buzené pouze odstředivou silou způsobenou nevyváženosti hřídele a včetně kinematického buzení. Časové průběhy výchylek kinematického buzení $q_y(t)$ a $q_z(t)$ byly zvoleny v následujících tvarech

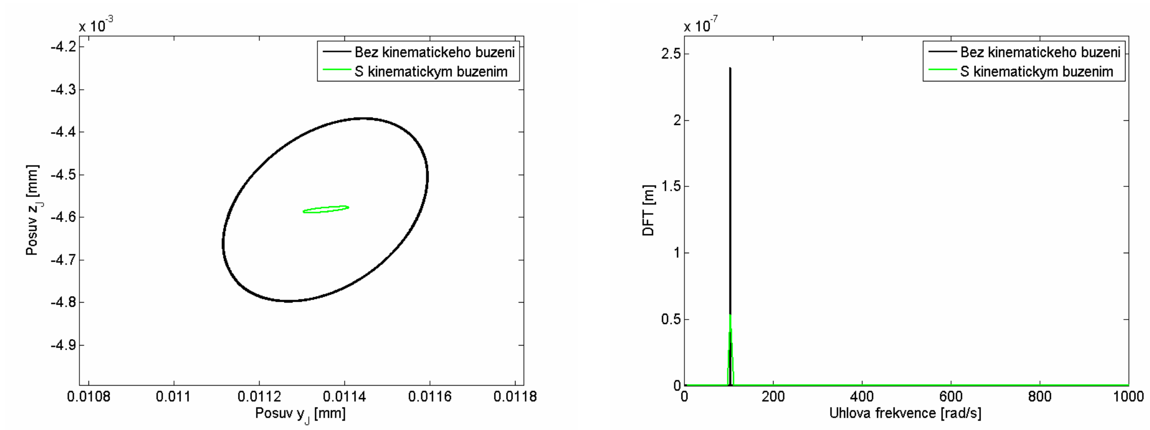
$$
\begin{aligned}
q_y(t) &= q_{yy,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{yy}) + q_{yz,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{yz}), \\
q_z(t) &= q_{zy,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{zy}) + q_{zz,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{zz}),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

kde je

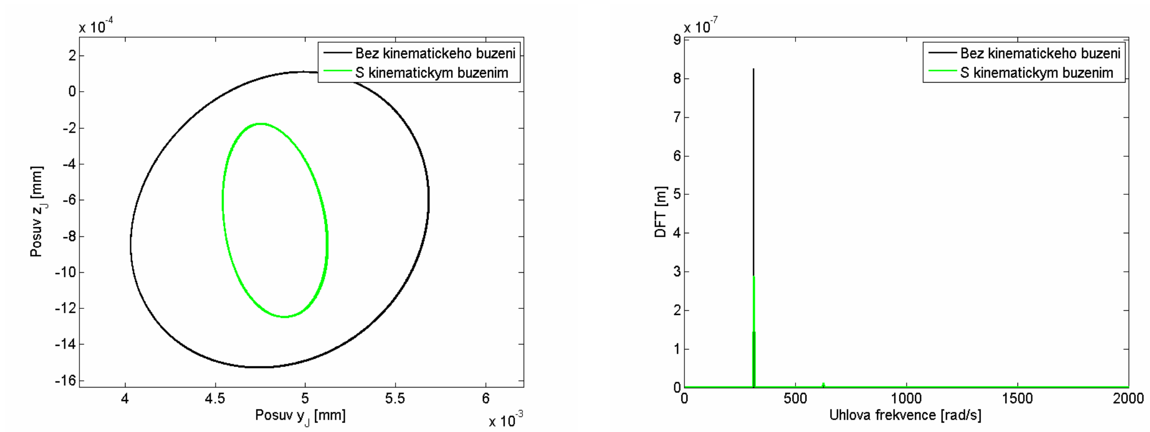
$$q_{yy,A} = \frac{-m \cdot e \cdot \omega^2}{2 \cdot \sqrt{(D_K)_{11}^2 + (D_B)_{11}^2}}, \; q_{yz,A} = \frac{-m \cdot e \cdot \omega^2}{2 \cdot \sqrt{(D_K)_{12}^2 + (D_B)_{12}^2}},$$

$$q_{zy,A} = \frac{-m \cdot e \cdot \omega^2}{2 \cdot \sqrt{(D_K)_{21}^2 + (D_B)_{21}^2}}, \; q_{zz,A} = \frac{-m \cdot e \cdot \omega^2}{2 \cdot \sqrt{(D_K)_{22}^2 + (D_B)_{22}^2}}, \tag{29}$$

$$tg\varphi_{yy} = \frac{(D_B)_{11} \cdot \omega}{(D_K)_{11}}, \; tg\varphi_{yz} = \frac{(D_B)_{12} \cdot \omega}{(D_K)_{12}}, \; tg\varphi_{zy} = \frac{(D_B)_{21} \cdot \omega}{(D_K)_{21}}, \; tg\varphi_{zz} = \frac{(D_B)_{22} \cdot \omega}{(D_K)_{22}}.$$

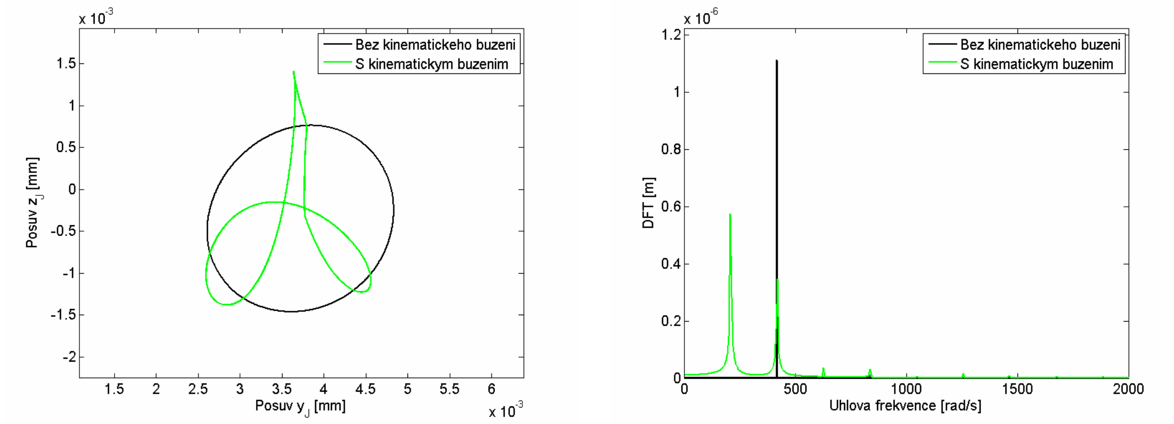


Obr. 13: Trajektorie středu čepu pro otáčky 1000min^{-1} (vlevo) a Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném směru (vpravo)

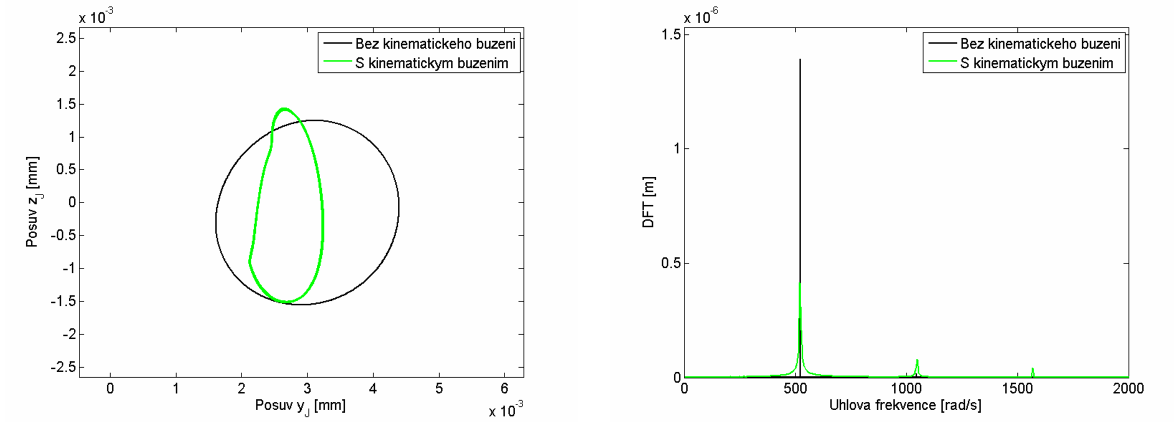


Obr. 14: Trajektorie středu čepu pro otáčky 3000min^{-1} (vlevo) a Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném směru (vpravo)

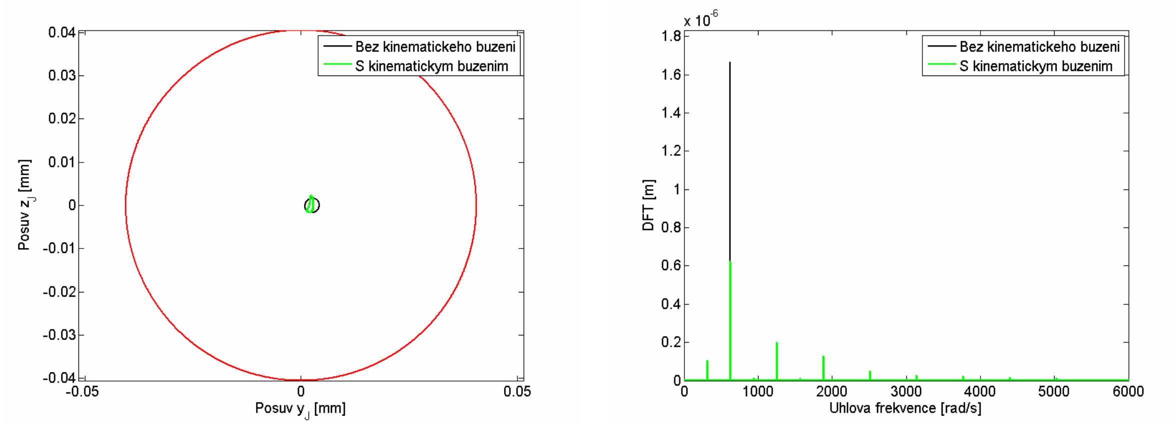
Amplitudy a fázové posuvy zvoleného průběhu kinematického buzení (28) jsou dopočítávány z Jacobiho matic $\mathbf{D}_K$ a $\mathbf{D}_B$ sestavených z vazbového vektoru hydrodynamických sil. Pomocí tohoto způsobu výpočtu kinematického buzení se podařilo podstatně snížit amplitudy ustálené složky odezvy v oblasti otáček nacházejícími se pod prvními ohybovými otáčkami (obr. 13 a obr. 14) a otáčkami v oblasti tzv. tlučení oleje obr. 18 se amplitudu odezvy podařilo snížit cca 10x. Na základě vypočítaných časových průběhů posuvů a jejich Fourierových transformací se ukázalo, že kmitání je kvaziperiodické (obr. 18).



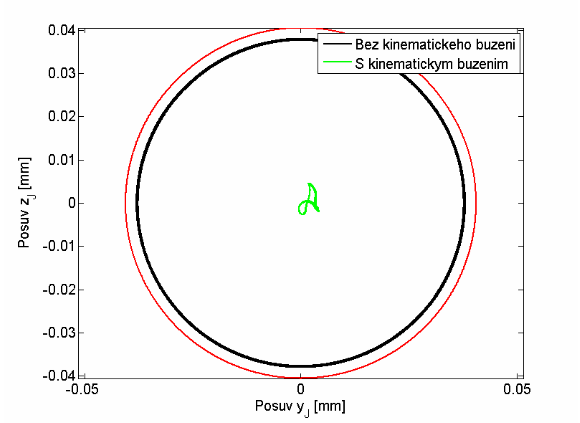
Obr. 15: Trajektorie středu čepu pro otáčky 4000min^{-1} (vlevo) a Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném směru (vpravo)

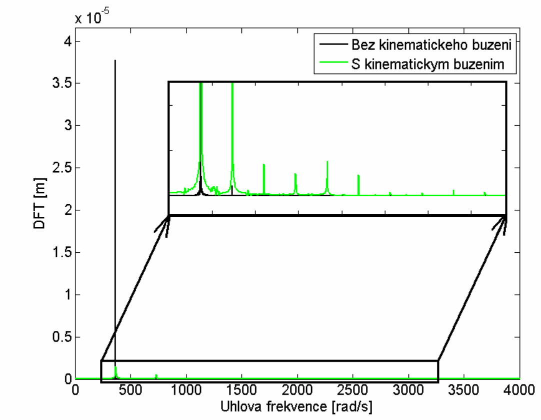


Obr. 16: Trajektorie středu čepu pro otáčky 5000min^{-1} (vlevo) a Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném směru (vpravo)



Obr. 17: Trajektorie středu čepu pro otáčky 6000min^{-1} (vlevo) a Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném směru (vpravo)





Obr. 18: Trajektorie středu čepu pro otáčky 7000min^{-1} (vlevo) a Fourierova transformace z časového průběhu posuvů ve vodorovném směru (vpravo)

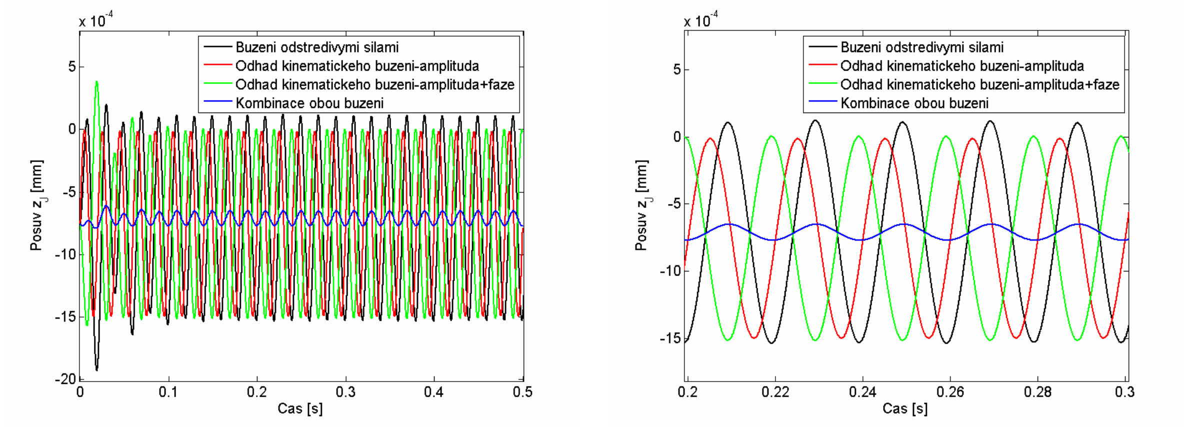
Výše uvedeným návrhem průběhu kinematického buzení se nepodařilo významněji snížit amplitudu odezvy v rozsahu otáček cca (4000÷6000)min^{-1}, proto byl vytvořen další způsob jeho návrhu. Časové průběhy výchylky kinematického buzení se uvažují v těchto tvarech

$$q_y(t) = q_{y,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_y),$$
$$q_z(t) = q_{z,A} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_z), \tag{30}$$

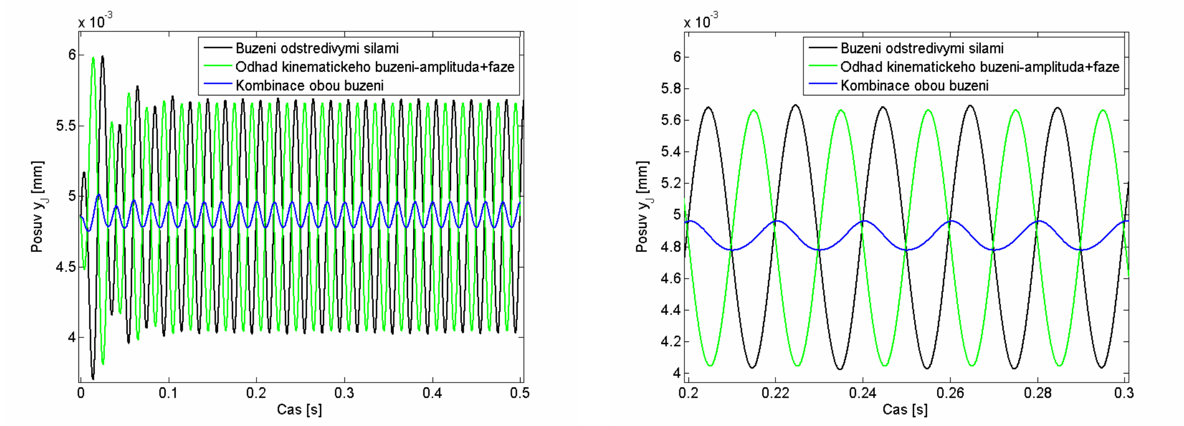
kde neznámé amplitudy $q_{y,A}$ a $q_{z,A}$ a fázové posuvy φ_y a φ_z kinematického buzení jsou určeny postupem, ve kterém se předpokládá platnost principu superpozice řešení. Nejdříve je vypočítána odezva rotorové soustavy buzené pouze odstředivými silami a pro odhadnuté velikosti amplitud $q_{y,A}$ a $q_{z,A}$ kinematického buzení je dále vypočítána odezva rotorové soustavy jen kinematicky buzené. Tento krok se opakuje tak dlouho, až jsou odhadnuty amplitudy kinematického buzení ve vodorovném a svislém směru kmitání, pro které je vypočítána velikost amplitudy odezvy blízká hodnotě od odstředivých sil. V dalším kroku jsou na základě vzájemných fázových posuvů průběhů odezvy od odstředivých sil a od kinematického buzení určeny fázové posuvy, tak aby oba průběhy byly v protifázi a případně jsou provedeny malé korekce v odhadech amplitud kinematického buzení. Nakonec je vypočítána odezva rotorové soustavy buzené kinematicky a odstředivými silami.

Tímto postupem byly pro otáčky rotorové soustavy o velikosti 3000min^{-1} určeny amplitudy $q_{y,A} = 0.80 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$, $q_{z,A} = 0.75 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$ a fázové posuvy kinematického buzení $\varphi_y = \pi\,\mathrm{rad}$, $\varphi_z = 4.4\,\mathrm{rad}$ a ve svislém a vodorovném směru kmitání se velikost amplitudy odezvy snížila cca 8x vzhledem k buzení od odstředivých sil (obr. 19, obr. 20 a obr. 23).

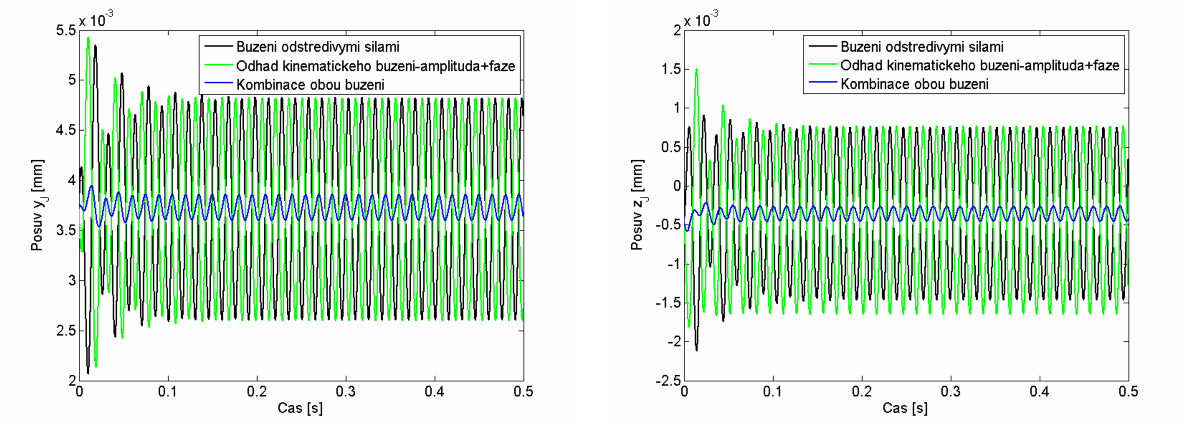
Podobně dobrých výsledků bylo dosaženo pro otáčky rotorové soustavy o velikosti 4000min^{-1}, když byly amplitudy a fázové posuvy kinematického buzení ve vztazích (30) určeny s těmito parametry $q_{y,A} = q_{z,A} = 1.1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $\varphi_y = \pi\,\mathrm{rad}$, $\varphi_z = 4.4\,\mathrm{rad}$ a ve vodorovném a svislém směru kmitání se velikost amplitudy odezvy rotorové soustavy snížila cca 9x (obr. 21 a obr. 23).



Obr. 19: Časový průběh posuvů čepu ve svislém směru kmitání (vlevo) a detail kmitání mezi 0.2s-0.3s (vpravo) a pro 3000min^{-1} rotorové soustavy



Obr. 20: Časový průběh posuvů čepu ve vodorovném směru kmitání (vlevo) a detail kmitání mezi 0.2s-0.3s (vpravo) a pro 3000min^{-1} rotorové soustavy

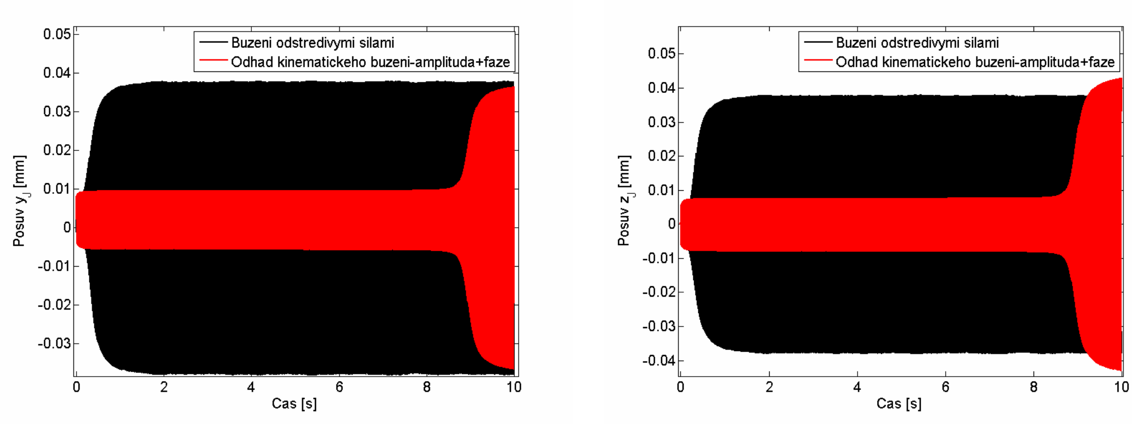


Obr. 21: Časový průběh posuvů čepu ve vodorovném (vlevo) a svislém (vpravo) směru kmitání a pro 4000min^{-1} rotorové soustavy

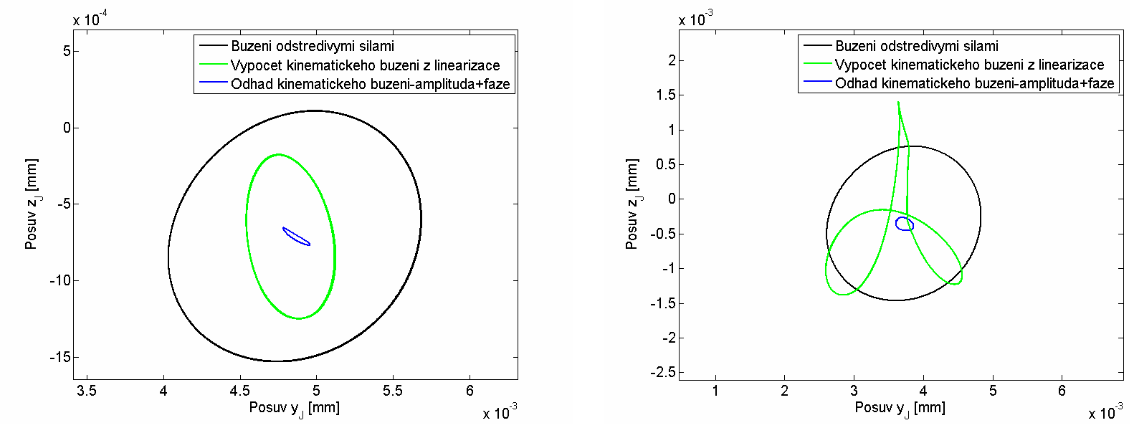
Nicméně tento postup stanovení průběhu výchylky kinematického buzení se ukázal, že je nevhodný pro otáčky rotorové soustavy nacházející se v oblasti tzv. tlučení oleje. Numerickými simulacemi s průběhem kinematického buzení odhadnutým ve tvaru

$$\begin{aligned} q_y(t) &= q_{y,A} \cdot \sin(0.5 \cdot \omega \cdot t - \varphi_y), \\ q_z(t) &= q_{z,A} \cdot \sin(0.5 \cdot \omega \cdot t - \varphi_z), \end{aligned} \tag{31}$$

kde je respektován dominantní vliv 1/2 otáčkové frekvence, tak ani ve tvaru (30) se nepodařilo určit velikosti amplitud kinematického buzení, jejichž odezva by měla amplitudu blízkou odezvě způsobené odstředivými silami. I když byla vyzkoušena řada hodnot amplitud kinematického buzení, tak byla vypočítána odezva s mnohem menší amplitudou nebo naopak s mnohem větší amplitudou než byla od buzení odstředivými silami. Na obr. 22 je zobrazen typický časový průběh posuvů na buzení odstředivými silami a kinematické buzení stanovený pro amplitudy o velikosti $q_{y,A} = 0.5845 \cdot 10^{-5}$ m, $q_{z,A} = 0.5845 \cdot 10^{-6}$ m a nulové hodnoty fázových posuvů φ_y a φ_z, protože měly nevýznamný vliv na velikost vypočítané amplitudy odezvy.

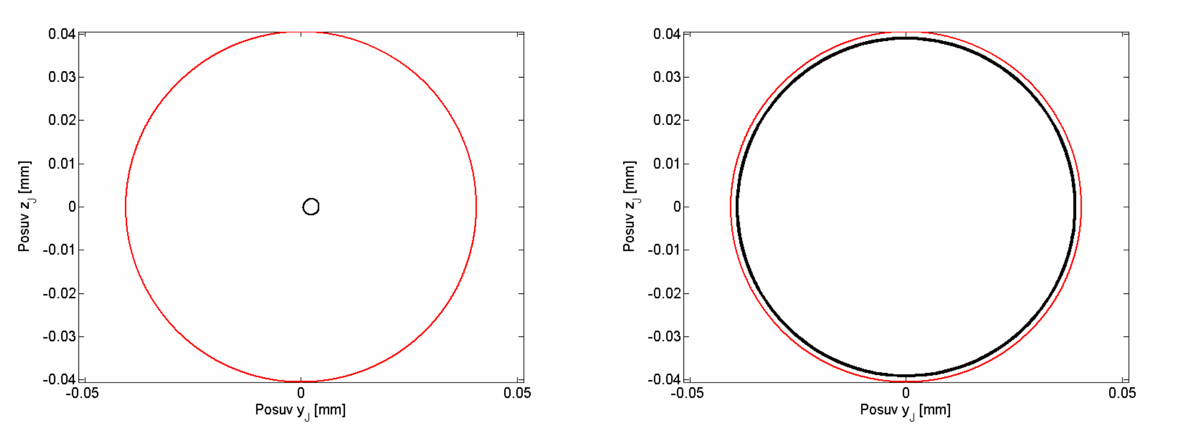


Obr. 22: Časový průběh posuvů čepu ve vodorovném (vlevo) a svislém (vpravo) směru kmitání a pro 7000min^{-1} rotorové soustavy



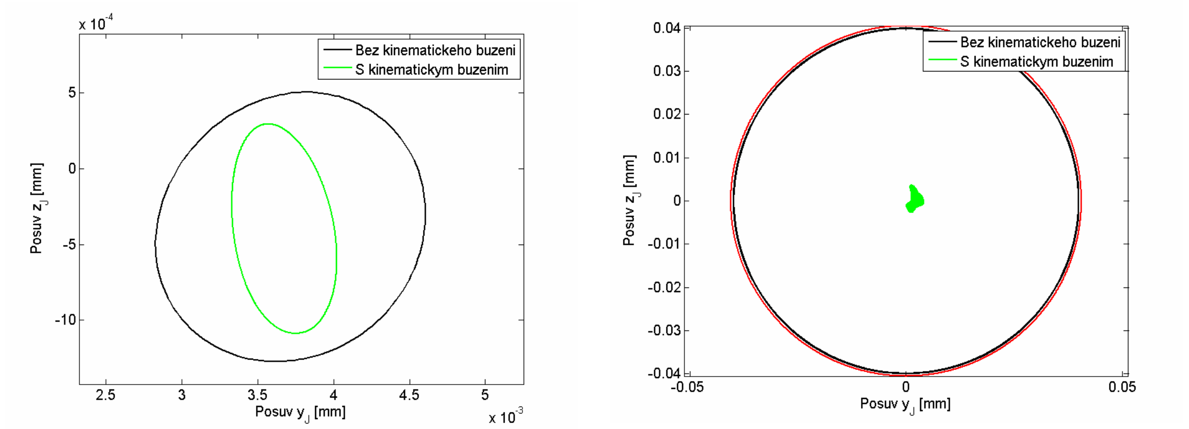
Obr. 23: Porovnání trajektorií středu čepu hřídele pro dva způsoby stanovení kinematického buzení a otáčky 3000min^{-1} (vlevo) a 4000min^{-1} (vpravo)

Provedením upřesňujících výpočtů se zjistilo, že k přiblížení trajektorie středu čepu hřídele k okraji ložiskového pouzdra dochází při otáčkách v rozmezí (6550-6555) min^{-1}, viz obr. 24 a jejich hodnota nezávisela na velikosti nevyváženosti (byla změněna v rozsahu ±20%).



Obr. 24: Trajektorie středu čepu hřídele pro otáčky 6550min^{-1} (vlevo) a 6555min^{-1} (vpravo)

Potlačení amplitudy buzení od odstředivých sil s kinematickým buzením stanoveným ze vztahů (28) a (30) bylo otestováno pro zvýšenou a sníženou hodnotu nevyváženosti o 20% a na obr. 25 jsou vykresleny výsledky s průběhem kinematického buzení stanovým podle vztahu (28) a sníženou hodnotou nevyváženosti.



Obr. 25: Trajektorie středu čepu hřídele pro otáčky 4000min^{-1} (vlevo) a 8000min^{-1} (vpravo)

10. Závěry

Cílem bylo vyzkoušet různé přístupy k návrhu časového průběhu výchylky kinematického buzení k potlačení ustálené složky kmitání vybuzené silou harmonického průběhu. V první části této práce jsou představeny tři způsoby stanovení kinematického buzení mechanického systému s jedním stupněm volnosti popsaného lineární a nelineární pohybovou rovnicí. Provedenými numerickými experimenty se potvrdilo, že navrženým průběhem kinematického buzení s úhlovou frekvencí stejnou jako má budící síla lze docílit podstatného snížení amplitudy kmitání, jak bylo ukázáno na celé řadě zkoumaných úloh.

Na základě zkušeností z numerických experimentů získaných během stanovení průběhu kinematického buzení mechanického systému popsaného s jedním stupněm volnosti byly vytvořeny a numericky ověřeny dva přístupy návrhu kinematického buzení u rotorové soustavy uložené v hydrodynamických ložiskách. Kinematickým buzením určeným pomocí těchto přístupů se podařilo podstatně snížit amplitudu odezvy rotorové soustavy způsobené buzením odstředivými silami v rozsahu otáček $(10 \div 10000)\mathrm{min}^{-1}$, a tedy i v oblasti otáček, když se hydrodynamické ložisko nachází v režimu tzv. víření a tlučení oleje.

Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován za podpory grantu č. 101/07/1345 Grantové agentury České republiky a výzkumného záměru MSM 6198910027 s názvem Výpočetně náročné počítačové simulace a optimalizace.

Literatura

Ferfecki, P. (2005) Počítačové modelování rotorové soustavy uložené v radiálních aktivních magnetických ložiskách. Doktorská disertační práce, VŠB – TU Ostrava, Fakulta strojní, Ostrava.

Juliš, K. Brepta, R. a kol. (1987) Mechanika II. díl. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha.

Kožešník, J. (1979) Kmitání mechanických soustav. ACADEMIA, Praha.

Svoboda, R. (2007) Teoretická analýza vlivu vnějšího buzení ložiskových pouzder na dynamické vlastnosti rotoru. Technická zpráva č. 07 – 301, TECHLAB s.r.o., Praha.

Šimek, J. (2007) Zařízení pro aktivní řízení kluzných ložisek s cílem potlačení nestability rotoru. Výzkumná zpráva č. 07-404, TECHLAB s.r.o., Praha.

Štecha, J. (1999) Optimální rozhodování a řízení. Skriptum, vydavatelství ČVUT, Elektrotechnická fakulta, Praha.

Zapoměl, J. (2000) Přístupy k dynamické analýze příčného kmitání rotorových soustav s kapalinnými ložisky metodou počítačového modelování. Disertační práce k získání vědecké hodnosti DrSc., VŠB – TU Ostrava, Fakulta strojní, Ostrava.