

NUMERICAL HOMOGENIZATION OF PLATE STRUCTURES

A. Somolová*, J. Zeman*

Summary: *The present contribution aims at the application of homogenization approaches to heterogeneous members subject to bending. The proposed approach is discussed with the emphasis given to the buckling behavior of perforated plates. The particular choice of perforated plates was motivated by the possibility to validate the derived homogenization procedures for thick and thin plates against the experimental data as well as the results of the detailed numerical modeling.*

1 Úvod

Homogenizační metody jsou použitelné ve stavební praxi při modelování značné části heterogenních materiálů a konstrukčních prvků s periodickou strukturou. Zatímco homogenizace v tahu, tlaku a smyku našla četné praktické aplikace, použití této metody při analýze ohýbaných konstrukcí není příliš frekventované. V tomto článku se budeme zabývat homogenizací perforovaných desek, tedy desek oslabených celou řadou malých otvorů.

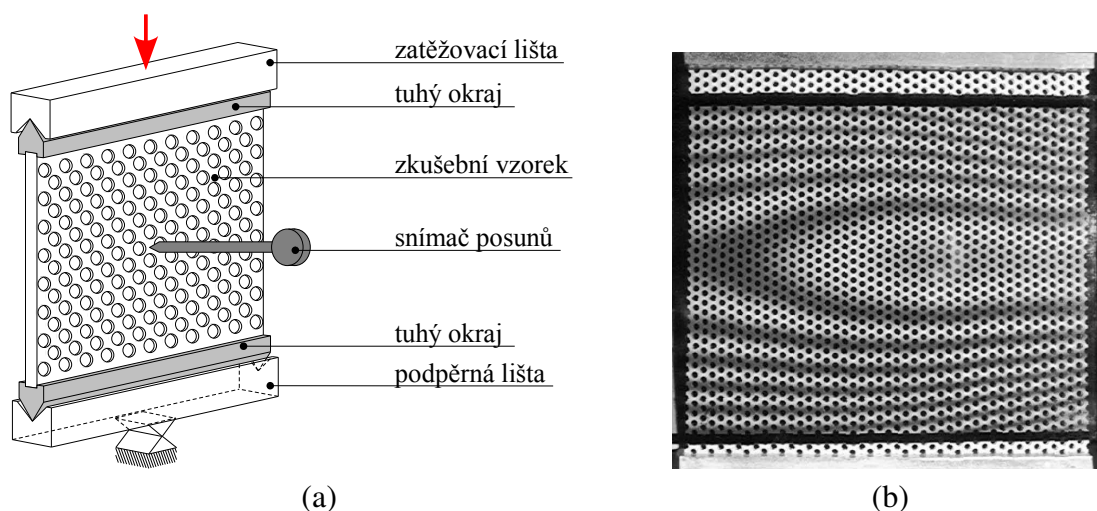
Nejčastěji se v praxi uplatňují děrované plechy s různou velikostí a tvarem vylehčujících otvorů. Možnosti použití perforovaných desek jsou značné, jako příklady lze uvést: výplňové desky zábradlí, prvky opláštění, podhledy, rošty, schodišťové stupně, kovové sedačky nebo tlumiče hluku. Perforované desky mohou také přinést materiálové úspory při navrhování tenkostěnných konstrukcí, pro které je často rozhodující stabilitní chování. Pevnost materiálu proto nebývá optimálně využita. Z tohoto důvodu je výhodné používat stěny vylehčené hustou sítí malých otvorů, jejichž kritické zatížení je několikrát větší, než zatížení plných stěn o stejné hmotnosti, tedy s redukovanou tloušťkou.

2 Průběh experimentu

Při praktickém návrhu konstrukcí z perforovaných desek je, obdobně jako u plnostěnných desek, nutno posoudit chování desky při jejím vybočení. To může být pro danou konstrukci rozhodujícím stavem namáhání. Příkladem studie, která se touto otázkou zabývá, je experimentální práce prováděná v Ústavu teoretické a aplikované mechaniky AV ČR (Drdácký and Lesák, 1992). Autoři systematicky zkoumali vliv tvaru otvorů, tloušťky stěny a stupně perforace na velikost kritické síly při zatížení desky v jednosměrném tlaku.

* Ing. Alena Somolová a Ing. Jan Zeman, Ph.D., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, tel: (+420)-2-2435-4472, fax: (+420)-2-2431-077, e-mail: somol@tiscali.cz

Schéma experimentu je uvedeno na obrázku 1a. Vzorky perforovaných desek měly rozměry 200×200 mm a byly vyrobeny z plexiskla s hodnotou modulu pružnosti $E = 3\,000$ MPa a Poissonova čísla $\nu = 0,4$. Bylo zatěžováno čtrnáct zkušebních vzorků, které se lišily tloušťkou desky (od 3 mm do 6 mm), počtem, velikostí a typem vylehčujících otvorů (kruh, čtverec a trojúhelník se zaoblenými rohy). Tyto vzorky byly kloubově uloženy na dvou protilehlých hranách do tuhého rámu a zbylé okraje byly volné. Pomocí rámu bylo vneseno do desky rovnoměrné zatížení tlakovou silou a následně byla určena kritická síla, při které došlo k vybočení konstrukce (viz obrázek 1b). Vzdálenost kloubových uložení byla 230 mm (z toho tuhý rám 2×15 mm).



Obrázek 1: Experiment: (a) schéma zatěžování, (b) tvar vybočení

3 Numerický model perforované desky

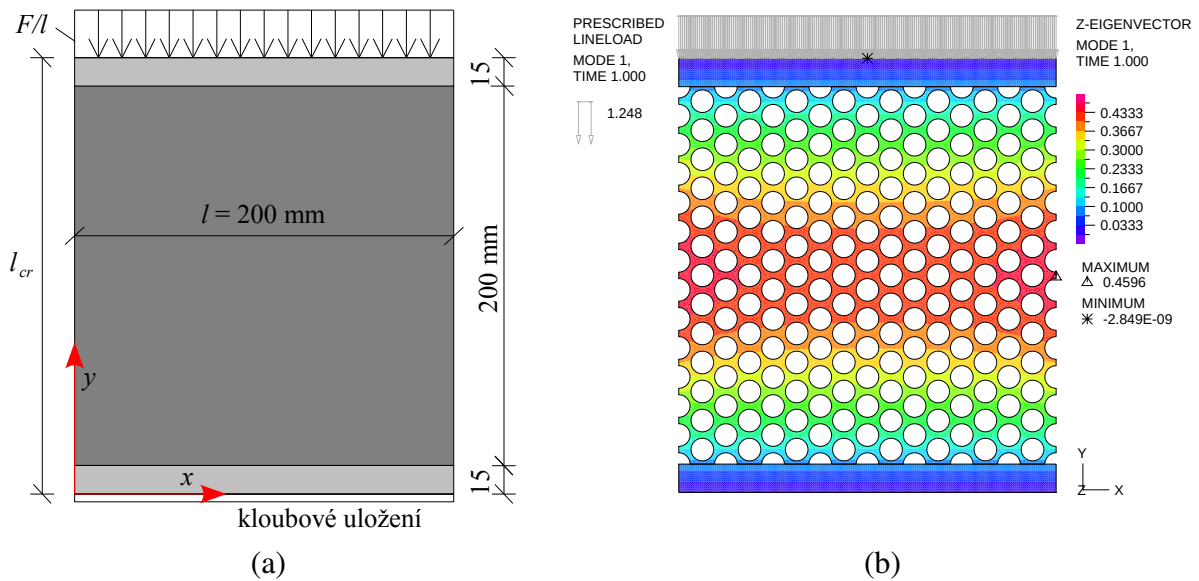
Vzhledem k tomu, že rozměr analyzované konstrukce (200×200 mm) je relativně malý, můžeme v tomto případě provést detailní stabilitní výpočet pro celou konstrukci bez zjednodušujících geometrických předpokladů. Výhodou tohoto přístupu je přesnost získaných výsledků, jeho aplikace je však výpočetně náročná (především pro rozsáhlejší konstrukce).

Kritická síla byla určena lineárním stabilitním výpočtem v konečněprvkovém systému ADINA® verze 8.1. Desky z plexiskla byly drženy a také zatěžovány prostřednictvím ocelových okrajů. Chování materiálů bylo uvažováno pružné s hodnotami modulu pružnosti a Poissonova čísla: pro plexisklo $E = 3\,000$ MPa, $\nu = 0,4$ a pro ocel $E = 210\,000$ MPa, $\nu = 0,3$. Konstrukce byla modelována jako tlustá deska se sítí tvořenou čtyřuzlovými prvky MITC,¹ které vycházejí z Mindlinovy deskové teorie (viz Brezzi and Bathe (1989)). Výpočet byl proveden pro všech čtrnáct geometrií. Schéma modelu a vlastní tvar vybočení pro jednu vybranou geometrii jsou znázorněny na obrázku 2.

4 Základní vztah stabilitní analýzy pro výpočet kritického zatížení

Principem homogenizačních metod je nahrazení komplikovaného heterogenního materiálu jistým fiktivním homogenizovaným materiálem, jehož vlastnosti odrážejí vlastnosti jednotlivých

¹ V programu ADINA® je tento prvek označen SHELL, viz manuál ADINA R & D (Inc.).



Obrázek 2: Numerický model perforované desky: (a) schéma, (b) tvar vybočení PWC 5-12

složek a jejich geometrické uspořádání. Vztah pro kritické zatížení tedy odvodíme pro případ analýzy homogenní desky. Předpokládáme-li, že je deska ve střednicové rovině namáhána zatížením, které vyvoluje měrné normálové síly $\overline{n_x}$, $\overline{n_y}$ a $\overline{n_{xy}}$, má silová podmínka rovnováhy sestavená na deformované konstrukci tvar

$$\begin{aligned} \overline{n_x}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) + 2\overline{n_{xy}}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) + \overline{n_y}(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) + \\ \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

kde m_x , m_y a m_{xy} jsou měrné ohybové a kroucí momenty. Při určení hodnoty kritického zatížení vyjdeme z této podmínky rovnováhy. Hodnoty měrných normálových sil a geometrických veličin jsou zřejmé z obrázku 2a. Vzhledem k působícímu zatížení a způsobu podepření konstrukce uvažujeme zjednodušeně vztah pro vybočení ve tvaru

$$w(x, y) = w_0 \sin \left(\frac{\pi y}{l_{cr}} \right).$$

Za tohoto předpokladu získáme z podmínky rovnováhy (1) vztah pro kritické zatížení

$$F_{cr} = l (D_{\kappa})_{22} \left(\frac{\pi}{l_{cr}} \right)^2. \quad (2)$$

Prvek deskové matice tuhosti $(D_{\kappa})_{22}$ určíme pomocí homogenizačních metod, ostatní geometrické veličiny jsou známé.

5 Homogenizace desek – obecné principy

V problému homogenizace tuhosti může být deska s periodickou strukturou uvažována jako trojrozměrné těleso nebo může být její deformace popsána jako dvourozměrný deskový problém s použitím Kirchhoffových předpokladů (pro tenkou desku) nebo Mindlinova modelu

(tlusté desky s vlivem zkosení). Dvourozměrný problém je výpočetně efektivnější, a proto jsou dále v tomto článku odvozeny vztahy pro homogenizaci desek pomocí kirchhoffovských a mindlinovských předpokladů.

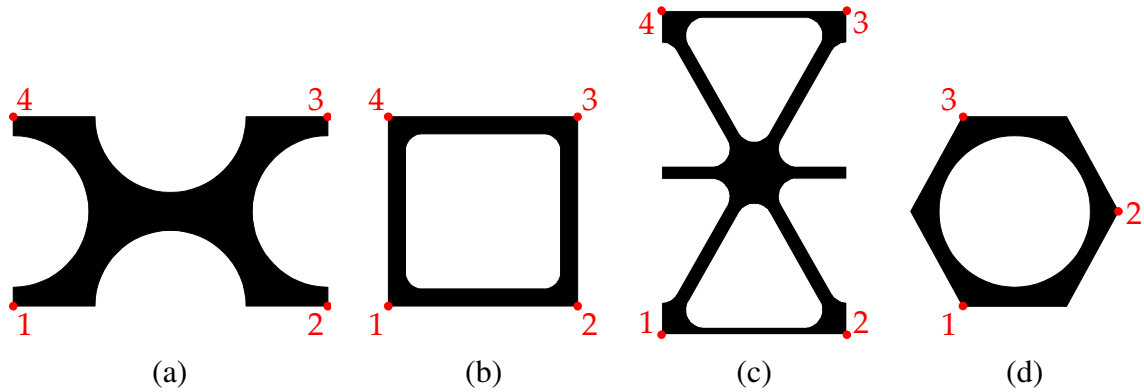
Z hlediska analýzy rozdělíme řešený problém na dvě úrovně: makroúroveň, která odpovídá analýze na úrovni desky Ω jako celku, a mikroúroveň, popisující chování konstrukce na úrovni jednotkové buňky $\hat{\Omega}$. Pro výstižnost tohoto řešení je nutno zajistit spolupůsobení mezi jednotlivými úrovněmi. Pokud je rozměr jednotkové buňky dostatečně malý vůči rozměrům konstrukce, analýza uvedená v (Lewiński, 1992) ukazuje, že vhodným modelem na makroúrovni je model tenké desky, nezávisle na modelu použitém na mikroúrovni.² Vlastní homogenizaci lze interpretovat názorným způsobem:

- Každému materiálovému bodu $\mathbf{x} = \{x, y\}^T \in \Omega$ na makroúrovni přisoudíme jednotkovou buňku $\hat{\Omega}$.
- Jednotkovou buňku „zatížíme“ makroskopickou (průměrnou) hodnotou křivosti $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \{\kappa_x(\mathbf{x}), \kappa_y(\mathbf{x}), \kappa_{xy}(\mathbf{x})\}^T$, tj. specifikujeme kinematické okrajové podmínky na mikroúrovni tak, aby platilo $|\hat{\Omega}|\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\boldsymbol{\kappa}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega}$, kde $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ označuje křivost v daném bodu jednotkové buňky $\hat{\mathbf{x}} = \{\hat{x}, \hat{y}\}^T \in \hat{\Omega}$.
- V závislosti na předepsaných podmínkách určíme průběh měrných ohybových a krouticích momentů $\hat{\mathbf{m}}$ na úrovni jednotkové buňky.
- Průměrná hodnota momentů $|\hat{\Omega}|\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\mathbf{m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega}$ pak definuje vztah na makroúrovni ve tvaru

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}_\kappa(\mathbf{x})\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

kde $\mathbf{D}_\kappa$ označuje homogenizovanou matici deskové tuhosti.

Poznamenejme, že vlastní výpočet průběhu momentů se liší v závislosti na tom, zda na mikroúrovni uvažujeme model tenké nebo tlusté desky.



Obrázek 3: Periodické jednotkové buňky

Na obrázku 3 jsou uvedeny příklady periodické jednotkové buňky (PUC) pro kruhové, čtvercové a trojúhelníkové vylehčující otvory. V následujícím textu jsou uvedeny homogenizační vztahy pro obdélníkovou PUC, pro šestiúhelníkovou buňku (viz obrázek 3d) jsou formulovány v (Somolová, 2007).

²Původní odvození uvedené v (Lewiński, 1992) je spíše založeno na intuitivních argumentech, rigorózní odvození v (Lewiński and Telega, 1999) je naopak značně technicky komplikované.

6 Homogenizace kirchhoffovských desek

V případě kirchhoffovských desek zatížených předepsanou makroskopickou hodnotou křivosti κ můžeme vyjádřit pootočení kolem jednotlivých os $\hat{x}$ a $\hat{y}$ ve tvaru

$$\hat{\varphi}_{\hat{x}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\varphi}_{\hat{x}}^*(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\varphi}_{\hat{y}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\varphi}_{\hat{y}}^*(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4)$$

kde $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}$ označuje pootočení, která by vznikla v homogenní jednotkové buňce pod účinky předepsané křivosti κ , zatímco $\hat{\varphi}^*$ označují členy vzniklé v důsledku perforace na mikroúrovni. Protože jsou vylehčující otvory uspořádány periodicky, jsou navíc tyto členy $\hat{\Omega}$ -periodické, tj. nabývají stejných hodnot na protilehlých stranách jednotkové buňky.

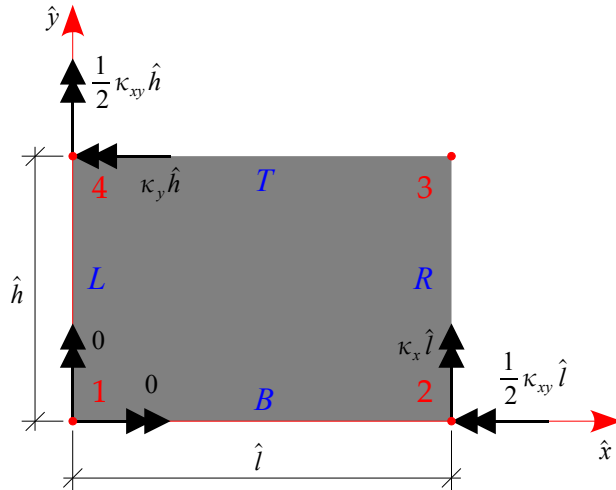
V případě homogenní jednotkové buňky by pro zatížení makroskopickou křivostí byla v každém bodu $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ konstantní hodnota křivosti. Z definice křivosti můžeme tedy odvodit vztahy pro homogenní části pootočení. Jejich konkrétní tvar určuje způsob podepření buňky ve vlastních výpočtech. V našem případě volíme vetknutí bodu 1 ($\hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}(1)} = \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(0, 0) = 0$ a $\hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}(1)} = \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(0, 0) = 0$), což vede k vyjádření jednotlivých pootočení ve tvaru

$$\hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = \kappa_x \hat{x} + \frac{1}{2} \kappa_{xy} \hat{y}, \quad \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\kappa_y \hat{y} - \frac{1}{2} \kappa_{xy} \hat{x}. \quad (5)$$

Z hlediska dalších výpočtů je výhodné parametrizovat průběh pootočení pomocí vybraných řídicích bodů **1, 2 a 4**, viz obrázek 4. Vzhledem k předpokládanému průběhu pootočení, viz (5), můžeme hodnoty pootočení v těchto bodech vyjádřit jako

$$\begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}(2)} \\ \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}(2)} \\ \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}(4)} \\ \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(\hat{l}, 0) \\ \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(\hat{l}, 0) \\ \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{\text{hmg}}(0, \hat{h}) \\ \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{\text{hmg}}(0, \hat{h}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hat{l}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\hat{h}}{2} \\ 0 & -\hat{h} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

což budeme zkracovat jako $\hat{\mathbf{r}}_{\hat{\varphi}} = \mathbf{B}_{\hat{\kappa}} \kappa$.



Obrázek 4: Předepsaná pootočení řídicích bodů PUC

Poznamenejme, že zatím byly určeny pouze podmínky pro pootočení $\hat{\varphi}$. Aby bylo zabráněno posunutí celé konstrukce ve směru osy $\hat{z}$ jako tuhého celku, předepíšeme například v bodu **1** nulovou hodnotu průhybu $\hat{w}$.

Po specifikaci průběhu pootočení $\hat{\varphi}^{\text{hmg}}$ přistoupíme k předepsání periodických okrajových podmínek. Pro tyto účely rozdělíme hranici řešené oblasti na čtyři části: horní T , spodní B , levou L a pravou R , viz obrázek 4. Pro jednotlivé části hranice jednotkové buňky $\hat{\Omega}$ vyjádříme pootočení dle rovnic (4). Odečtením těchto vztahů pro protilehlé části hranice a využitím poznatku, že periodická část pootočení nabývá na protilehlých stranách jednotkové buňky stejných hodnot,³ dostáváme podmínky periodicity. Tyto rovnice upravíme použitím vztahů (5) a (6). Můžeme tedy psát

$$\hat{\varphi}_{\hat{x}}^R(\hat{y}) = \hat{\varphi}_{\hat{x}}^L(\hat{y}) + \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{(2)}, \quad \hat{\varphi}_{\hat{y}}^R(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{\hat{y}}^L(\hat{x}) + \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{(2)}, \quad (7)$$

$$\hat{\varphi}_{\hat{x}}^T(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{\hat{x}}^B(\hat{x}) + \hat{\varphi}_{\hat{x}}^{(4)}, \quad \hat{\varphi}_{\hat{y}}^T(\hat{x}) = \hat{\varphi}_{\hat{y}}^B(\hat{x}) + \hat{\varphi}_{\hat{y}}^{(4)}. \quad (8)$$

Shrneme-li důsledky předchozích úprav a odvození, deformační stav příslušný dané hodnotě makroskopické křivosti κ můžeme předepsat tak, že v bodu **1** jednotkové buňky podepřeme všechny stupně volnosti $\hat{w}$, $\hat{\varphi}_{\hat{x}}$ a $\hat{\varphi}_{\hat{y}}$, předepíšeme hodnoty rotací v uzlech **2** a **4** na základě vztahu (6) a pootočení na protějších hranách svážeme podmínkami (7) a (8). Poznamenejme, že pro průhyby $\hat{w}$ žádné další podmínky nepotřebujeme, protože v případě analýzy tenké desky jsou s pootočeními $\hat{\varphi}_{\hat{x}}$ a $\hat{\varphi}_{\hat{y}}$ svázány.

Posledním krokem homogenizačního procesu je určení hodnoty měrných ohybových a krouticích momentů. V tomto případě opět vyjdeme z principu virtuálních prací, tentokrát psaného na úrovni jednotkové buňky $\hat{\Omega}$. Pro další analýzu rozdělíme pole křivosti na průměrnou část, odpovídající předepsané hodnotě $\kappa(\mathbf{x})$, a na fluktuující část $\hat{\kappa}^*(\hat{\mathbf{x}})$. Obdobným způsobem můžeme provést rozdělení měrných momentů. Princip virtuálních prací má pak tvar

$$\int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} (\delta \kappa(\mathbf{x}) + \delta \hat{\kappa}^*(\hat{\mathbf{x}}))^T (\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{m}}^*(\hat{\mathbf{x}})) d\hat{\Omega} = 0.$$

Uvážení rovností

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{\kappa}^*(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \quad \int_{\hat{\Omega}} \hat{\mathbf{m}}^*(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} = \mathbf{0}, \quad \int_{\hat{\Omega}} \hat{\kappa}^*(\hat{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{m}}^*(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} = 0,$$

získáváme vztah mezi makroskopickými veličinami κ a $\mathbf{m}$ a odpovídajícími veličinami na mikroúrovni

$$\int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} = |\hat{\Omega}| \delta \kappa(\mathbf{x})^T \mathbf{m}(\mathbf{x}),$$

kde $|\hat{\Omega}|$ označuje plochu jednotkové buňky. Nyní přistoupíme k vyjádření předchozích vztahů pomocí předepsaných uzlových sil. Platí

$$\delta \hat{\mathbf{r}}_{\hat{\varphi}}^T \hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}} = \int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\kappa}(\hat{\mathbf{x}})^T \hat{\mathbf{m}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\Omega} = |\hat{\Omega}| \delta \kappa(\mathbf{x})^T \mathbf{m}(\mathbf{x}),$$

kde $\hat{\mathbf{r}}_{\hat{\varphi}}$ je vektor předepsaných uzlových rotací (viz (6)), vektor $\hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}}$ označuje vektor reakcí v uzlech **2** a **4**, ve kterých byly předepsány hodnoty uzlových rotací. Uvážení vztahu mezi makroskopickou křivostí κ a rotacemi řídicích uzlů $\hat{\mathbf{r}}_{\hat{\varphi}}$ dostáváme

$$\delta \kappa(\mathbf{x})^T \mathbf{B}_{\kappa}^T \hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}} = \hat{l} \delta \kappa(\mathbf{x})^T \mathbf{m}(\mathbf{x}),$$

³Fluktuující části polí pootočení $\hat{\varphi}^*$ jsou homogenizačním problémem určeny až na libovolnou konstantu. V našem případě tuto konstantu určíme podmínkou v bodu **1**, tedy $\hat{\varphi}^{*(1)} = \hat{\varphi}^*(0, 0) = 0$. Z podmínek periodicity vyplývá, že tato hodnota fluktuujících složek rotací platí i pro zbývající body **2–4**. Proto v těchto bodech můžeme psát $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^{\text{hmg}}$.

průměrné hodnoty ohybových a krouticích momentů lze tedy určit přímo z hodnot uzlových reakcí jako

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\hat{l}\hat{h}} \mathbf{B}_\kappa^\top \hat{\mathbf{R}}_{\hat{M}},$$

tedy

$$\begin{Bmatrix} m_x(\mathbf{x}) \\ m_y(\mathbf{x}) \\ m_{xy}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{h}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\hat{l}} \\ 0 & -\frac{1}{2\hat{h}} & \frac{1}{2\hat{l}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_{\hat{x}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(2)} \\ \hat{M}_{\hat{x}}^{(4)} \\ \hat{M}_{\hat{y}}^{(4)} \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

7 Homogenizace mindlinovských desek

V případě, kdy je na mikroúrovni jednotková buňka modelována jako tlustá mindlinovská deska, jsou pootočení $\hat{\varphi}_{\hat{x}}$ a $\hat{\varphi}_{\hat{y}}$ nezávislá na průhybu $\hat{w}$. Proto je nutné k okrajovým podmínkám představeným v předchozím oddíle přidat podmínky pro průhyby $\hat{w}$. Obdobně jako v případě pootočení budeme předpokládat následující rozklad průhybů

$$\hat{w}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{w}^*(\hat{\mathbf{x}}),$$

kde $\hat{w}^{\text{hmg}}$ jsou průhyby odpovídající homogennímu materiálu a $\hat{\Omega}$ -periodická složka $\hat{w}^*$ vzniká jako důsledek perforace desky.

Připomeňme, že na makroúrovni je konstrukce modelována jako tenká deska, jediné kinematické informace jsou tedy reprezentovány vektorem makroskopického vektoru křivosti $\boldsymbol{\kappa}$. Proto odvodíme složku $\hat{w}^{\text{hmg}}$ ze vztahu mezi křivostí a průhyby pro tenké kirchhoffovské desky. Poznamenejme, že tato spíše intuitivní úvaha vede na stejné výsledky jako detailní analýza uvedená v (Lewiński, 1992).

Pokud má být v každém bodu jednotkové buňky konstantní hodnota křivosti, pak rovnice průhybu $\hat{w}$ příslušejícímu makroskopické křivosti $\boldsymbol{\kappa}$ má tvar

$$\hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{1}{2}\kappa_x \hat{x}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{xy} \hat{x}\hat{y} - \frac{1}{2}\kappa_y \hat{y}^2 + b\hat{x} + c\hat{y} + d.$$

Konstanty b, c a d vyplývají z podepření desky. Pokud volíme hodnoty předepsaných posunů v bodech **1**, **2**, **3** a **4** v souladu s vztahy

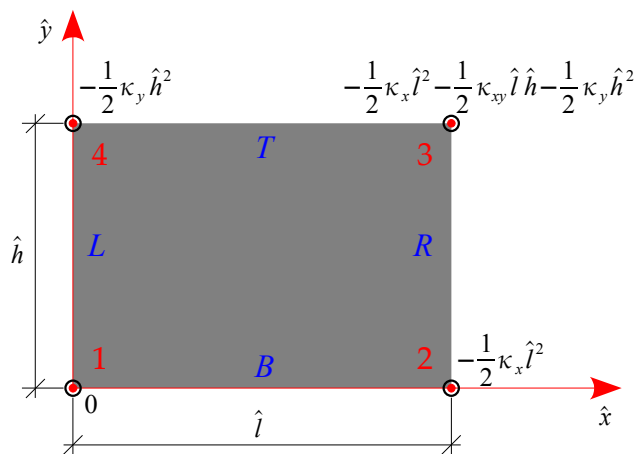
$$\begin{aligned} \hat{w}^{\text{hmg}(\mathbf{1})} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(0, 0) = 0, & \hat{w}^{\text{hmg}(\mathbf{3})} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{l}, \hat{h}) = -\frac{1}{2}\kappa_x \hat{l}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{xy} \hat{l}\hat{h} - \frac{1}{2}\kappa_y \hat{h}^2, \\ \hat{w}^{\text{hmg}(\mathbf{2})} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(\hat{l}, 0) = -\frac{1}{2}\kappa_x \hat{l}^2, & \hat{w}^{\text{hmg}(\mathbf{4})} &= \hat{w}^{\text{hmg}}(0, \hat{h}) = -\frac{1}{2}\kappa_y \hat{h}^2 \end{aligned}$$

jsou tyto konstanty nulové (viz obrázek 5).

Stejně jako v případě pootočení odvodíme podmínky periodicity porovnáním hodnot na příslušných částech hranice jednotkové buňky.

$$\hat{w}^R(\hat{y}) = \hat{w}^L(\hat{y}) + \hat{w}^{(2)} - \frac{1}{2}\kappa_{xy} \hat{l}\hat{y}, \quad \hat{w}^T(\hat{x}) = \hat{w}^B(\hat{x}) + \hat{w}^{(4)} - \frac{1}{2}\kappa_{xy} \hat{h}\hat{x}.$$

S odvoláním na výsledky publikované v (Lewiński, 1992) je další postup pro určení homogenizované odezvy konstrukce identický případu tenkých desek. Vektor průměrných momentů se opět určí z momentových reakcí odpovídajících předepsaným rotacím uzlových bodů (viz rovnice (9)).



Obrázek 5: Předepsané průhyby řídicích bodů PUC

8 Numerické modelování PUC

Předchozí vztahy jsou vhodné pro numerické modelování na úrovni jednotkové buňky metodou konečných prvků. Všechny výsledky prezentované v této studii byly získány pomocí komerčního konečněprvkového programu ADINA® 8.1.

Pro modelování kirchhoffovských desek byl použit tříuzlový prvek DKT⁴, pro mindlinovské desky čtyřuzlový prvek MITC.⁵ Okrajové podmínky byly do programu zavedeny pomocí svázání příslušných stupňů volnosti příkazem *constraint equation*. Při výpočtech bylo uvažováno lineárně pružné chování materiálu.

Správnost odvozených homogenizačních vztahů lze ověřit na homogenní obdélníkové buňce, kterou „zatížíme“ makroskopickými křivostmi dle odvozených homogenizačních vztahů. Vektory průměrných momentů (viz (9)) pak umožňují sestavit homogenizovanou matici deskové tuhosti. Vyčíslené matice se drobně liší při použití prvku DKT (pro kirchhoffovskou desku) a MITC (pro mindlinovskou desku). Protože se jedná o homogenní buňku, lze určit jednotlivé členy deskové matice tuhosti také podle známých analytických vztahů. Porovnáním těchto matic tuhosti je zřejmé, že odezva pro zatížení makroskopickými křivostmi κ_x a κ_y , určená pomocí navrženého homogenizačního postupu, odpovídá přesné hodnotě. Při zatížení křivostí κ_{xy} není schopen konečný prvek DKT oproti prvku MITC poskytnout přesné řešení, chyba 0,5% je ale zanedbatelná. Tuto chybu lze minimalizovat použitím jemnější sítě.

V dalším kroku přistoupíme k výpočtu požadovaného členu homogenizované matice tuhosti $(D_\kappa)_{22}$ pro čtrnáct různých geometrií otvorů. Pro jednotlivé geometrické varianty bylo použito označení $PW\alpha\beta\gamma$. Symbol α může nabývat hodnot C pro kruhový tvar otvoru, S pro čtvercový tvar otvoru a T pro trojúhelníkový tvar otvoru, β označuje tloušťku desky zaokrouhlenou na celé milimetry a γ charakteristický rozměr otvoru v milimetrech.⁶ Jednotkové buňky byly zatěžovány pouze křivostí $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$. Pro ilustraci získaných výsledků jsou na obrázku 6 uvedeny příklady průběhů rotací a průhybu. Pro ověření výstižnosti numerických hodnot získaných metodou konečných prvků byla provedena série výpočtů na sítích konečných prvků se vzrůstající hustotou sítě pro jednotkovou buňku PWS 6-27. Sít' konečných prvků odpovídající rozdělení

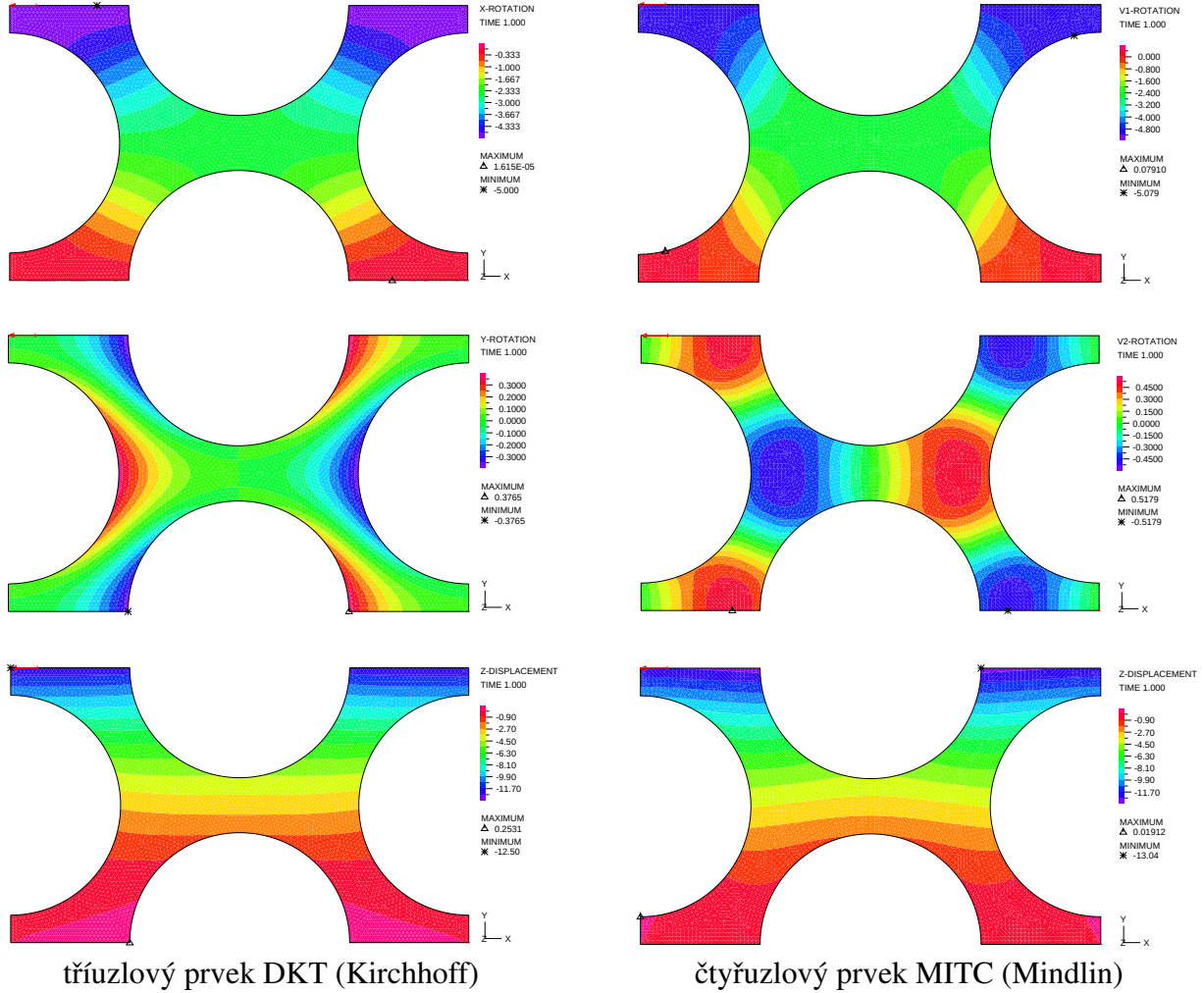
⁴ Prvek DKT je formulován v (Batoz et al., 1980) a je ekvivalentní prvku PLATE v programu ADINA® (viz manuál ADINA R & D (Inc.)).

⁵ Prvek MITC je formulován v (Brezzi and Bathe, 1989) a je ekvivalentní prvku SHELL v programu ADINA®.

⁶ Tedy například PWC 3-12 označuje desku o tloušťce 3,08 mm, která je perforována kruhovými otvory o průměru 12 mm.

strany na 40 dílků dává výsledky s dostatečnou přesností (odchylka od ustálené hodnoty je 0,1%). Další výpočty byly prováděny na jemnější síti konečných prvků odpovídající dělení hrany na cca 60 dílů.

V okamžiku, kdy jsou z numerického modelování známy uzlové momenty, můžeme spočítat průměrný moment m_y (viz (9)). Ten odpovídá hodnotě prvku homogenizované matice deskové tuhosti $(D_\kappa)_{22}$, který je potřebný k výpočtu kritické síly F_{cr} na základě vztahu (2).

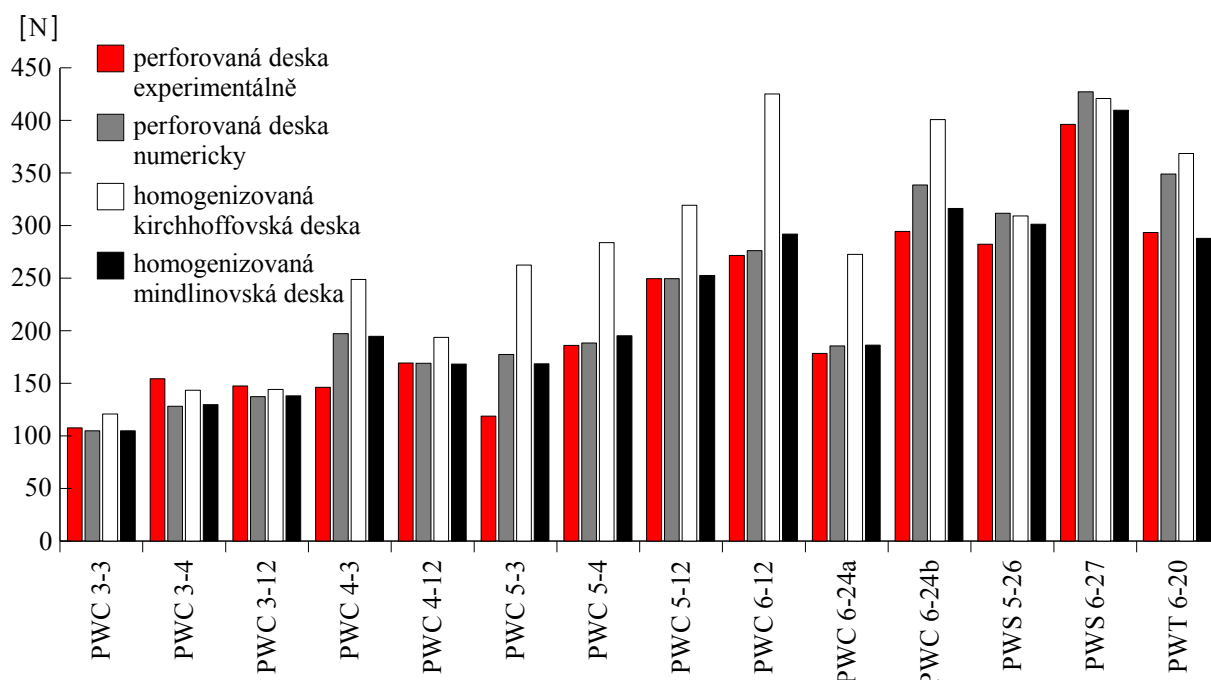


Obrázek 6: Síť a odezva jednotkové buňky PWC 5-4 na zatížení $\kappa^y = \{0; 1; 0\}^T$

9 Porovnání kritických sil

V rámci obrázku 7 jsou porovnány kritické síly určené podle mindlinovské (F_{cr}^{mind}) a kirchhoffovské (F_{cr}^{kirch}) teorie s experimentálními daty (F_{cr}^{exp}) a hodnotou kritické síly získané numerickým modelováním celé konstrukce (F_{cr}^{num}). Hodnoty kritického zatížení pro mindlinovský model jsou menší než v případě modelu kirchhoffovského. To je způsobeno dodatečným vlivem smyku.

Odchylky kritických zatížení jsou uvedeny v tabulce 1. Pro porovnání efektivity perforace je vypočten poměr kritické únosnosti perforované a redukované desky, které byly určeny numericky. Redukovanou deskou rozumíme plnou desku, která má sníženou tloušťku tak, aby celková



Obrázek 7: Porovnání kritických sil

hmotnost konstrukce zůstala zachována. Z hodnot v posledním sloupci tabulky 1 je zřejmé, že využití materiálu v perforovaných stěnách je až čtyřikrát efektivnější než u plných stěn o stejné hmotnosti.

Tabulka 1: Porovnání kritických sil

Označení desky	F_{cr}^{num} [N]	F_{cr}^{exp} [N]	η_{num}^{exp} [%]	F_{cr}^{kirch} [N]	η_{num}^{kirch} [%]	F_{cr}^{mind} [N]	η_{num}^{mind} [%]	F_{cr}^{red} [N]	$F_{cr}^{num} / F_{cr}^{red}$ [-]
PWC 3-3	104,8	107,7	2,73	120,9	15,32	104,8	0,04	62,6	1,68
PWC 3-4	128,1	154,4	20,52	143,3	11,85	129,8	1,32	88,1	1,45
PWC 3-12	137,5	147,4	7,24	144,1	4,84	138,2	0,54	86,8	1,58
PWC 4-3	197,2	146,3	25,80	248,7	26,14	194,7	1,25	85,5	2,31
PWC 4-12	169,1	169,3	0,14	193,7	14,57	168,3	0,45	63,6	2,66
PWC 5-3	177,3	118,8	33,01	262,5	48,01	168,6	4,93	44,1	4,02
PWC 5-4	188,3	186,0	1,23	283,7	50,65	195,2	3,65	75,8	2,49
PWC 5-12	249,7	249,7	0,01	319,4	27,93	252,6	1,17	92,0	2,71
PWC 6-12	276,2	271,6	1,66	425,2	53,95	291,9	5,69	83,0	3,33
PWC 6-24a	185,7	178,4	3,92	272,6	46,82	186,4	0,39	45,8	4,06
PWC 6-24b	338,7	294,6	13,02	400,8	18,33	316,4	6,58	83,0	4,08
PWS 5-26	311,8	282,3	9,46	309,3	0,80	301,3	3,37	90,7	3,44
PWS 6-27	427,4	396,4	7,25	420,8	1,54	409,8	4,11	98,9	4,32
PWT 6-20	349,1	293,6	15,89	368,6	5,59	287,9	17,53	86,8	4,02

Ve čtvrtém sloupci tabulky jsou uvedeny odchylky experimentálních dat od numericky určených kritických sil. U pěti ze čtrnácti zkoušených desek je chyba větší než deset procent. Důvodem těchto rozdílů mohou být odchylky zatížení od uvažovaného stavu (excentricita, nerovnoměrnost, viz obrázek 1b), geometrické imperfekce desky (tloušťka desky, velikost

a rozmístění vylehčujících otvorů) či nedostatečně tuhé spojení perforované desky s ocelovými okraji.⁷

Výsledky pro Kirchhoffův deskový model jsou příliš „tuhé“ a předpověď modelu je zatížena značnou chybou. Rozměry jednotkové buňky $\hat{l}$ a $\hat{h}$ nejsou dostatečně velké oproti tloušťce t , a proto není vliv smyku zanedbatelný. Použijeme-li však při modelování na mikroúrovni model založený na mindlinovských předpokladech (zahrnující vlivu smyku, v důsledku předpokladu nenulových zkosení průřezů uvnitř PUC), jsou kritické síly vypočtené na základě navržené homogenizační analýzy ve většině příkladů srovnatelně přesné s výsledky získanými detailním modelováním celé konstrukce. Chyba se pohybuje až na jeden případ do 7%. U geometrie PWT 6-20 je přesnost výsledku nižší (chyba je 17,53%). Tato skutečnost je způsobena tím, že okraje perforované konstrukce jsou ztužené. Pokud bychom numericky modelovali tuto konstrukci přesně periodicky (bez vyztužení), klesla by odchylka na 5,76%, což je dobrý výsledek vzhledem k tomu, že jednotková buňka se opakuje na výšku konstrukce jen 3,5-krát.

Chyba homogenizovaného řešení použitím Mindlinových předpokladů je dle mého názoru způsobena zejména následujícími faktory:

- Konstrukce není „dokonale periodická“ (viz například PWT 6-20), na okrajích je ztužená.
- Byl použit přibližný vztah pro kritickou sílu (pro homogenní desku je odchylka od numerického řešení na velmi jemné síti přibližně 5%).
- Rozměr jednotkové buňky je vzhledem k charakteristickému rozměru konstrukce relativně velký.
- Vlivem okrajových efektů v uložení desky není homogenizační předpoklad konstantního průběhu křivosti splněn.
- Při výpočtu byly uvažovány zjednodušující kinematické předpoklady pro desky místo plně trojrozměrné analýzy jednotkové buňky.

Také při porovnání výsledků homogenizačních metod s experimentálními daty se ukazuje, že výstižnost modelu založeného na mindlinovských předpokladech je obecně větší než pro případ tenké kirchhoffovské desky. Vyšší odchylky mohou být způsobeny vlivy, které byly podrobně diskutovány v předchozím textu.

Přesnost dosažených výsledků je uspokojivá, použijeme-li pro modelování jednotkové buňky deskový model založený na Mindlinových předpokladech. Při použití plně trojrozměrné analýzy jednotkové buňky by výstižnost kritických sil mohla být ještě vyšší. Modelování trojrozměrné jednotkové buňky je však nepoměrně náročnější než studovaný přístup.

10 Závěr

V rámci předkládané práce byla představena numerická homogenizace deskových heterogenních konstrukcí. Hodnoty ohybových eventuálně krouticích parametrů jsou odvozovány z chování periodické jednotkové buňky po zatížení makroskopickou křivostí. Uvedený přístup je založen na parametrizaci makroskopické křivosti pomocí předepsaných posunů a pootočení vybraných „řídících“ bodů. Odvozené vztahy pro podmínky periodicity na okrajích jednotkové buňky

⁷Pokud by byla konstrukce modelována jako trojrozměrné těleso, pravděpodobně bychom získali ještě přesnější řešení. Nepředpokládáme však, že chyba způsobená použitím Mindlinova deskového modelu je výrazná. Navíc by bylo 3D-modelování značně časově náročné.

lze zadat do výpočetních programů umožňujících svázání stupňů volnosti odpovídajících uzlů. Výhodou tohoto přístupu je jeho názornost, snadné zadání do většiny komerčně dostupných konečněprvkových systémů a možnost přímého rozšíření pro nelineární úlohy.

Homogenizační postupy a vztahy představené v článku jsou obecně platné pro deskové konstrukce s periodickou strukturou. Aplikace metody na konkrétní případ stabilitního výpočtu perforovaných stěn slouží k diskuzi výsledků získaných homogenizačním přístupem, detailním numerickým modelováním celé konstrukce a experimentálním měřením.

Porovnáním těchto přístupů zjistíme, že i při poměrně malém počtu opakování jednotkové buňky v rámci konstrukce je přesnost homogenizovaného řešení dostatečná. Oproti detailnímu numerickému výpočtu odezvy celé konstrukce je navržená homogenizační metoda časově nenáročná (z hlediska modelování a výpočtu odezvy konstrukce) i při velkém poměru rozměru konstrukce k jednotkové buňce, na druhé straně je však tento přístup založen na jistých zjednodušujících předpokladech, které mohou mít negativní vliv na přesnost výsledků. Proto může porovnání provedené v předkládané práci sloužit jako názorná demonstrace výhod i nevýhod praktické aplikace homogenizačních postupů. Určování materiálových parametrů pomocí homogenizačních metod představuje též vhodnou alternativu k experimentálním měřením.

11 Poděkování

Na tomto místě by autoři rádi poděkovali Doc. Ing. Miloši Drdáckému, DrSc., a Doc. Ing. Jiřímu Máčovi, CSc., za poskytnutí detailní dokumentace experimentálních dat.

Tento příspěvek vznikl za finanční podpory grantu GA ČR 106/07/1244.

12 Literatura

- ADINA R & D, Inc. (2003). *ADINA Theory and Modeling Guide. Volume I: ADINA*. www.adina.com.
- Batoz, J., Bathe, K., and Ho, L. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1771–1812.
- Brezzi, F. and Bathe, K. (1989). Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1787–1801.
- Drdácký, M. and Lesák, J. (1992). Perforated plates for thin-walled structures. In *Proceedings of International Symposium "Advanced Materials for Lightweight Structures"*, pages 333–337, Noordwijk, The Netherlands. ESTEC.
- Lewiński, T. (1992). Homogenizing stiffness of plates with periodic structure. *International Journal of Solids and Structures*, 29(3):309–326.
- Lewiński, T. and Telega, J. (1999). *Plates, laminates and shells : Asymptotic analysis and homogenization*, volume 52 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- Somolová, A. (2007). Homogenizace aplikovaná na stavební konstrukce. Master's thesis, Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze. http://cml.fsv.cvut.cz/~zemanj/teaching/theses/somolova_07.pdf.