

ESTIMATION OF CRITICAL VALUES FOR CRACK PROPAGATION FROM SHARP V-NOTCH

Z.Majer¹, P.Hutař², L.Náhlík³, Z. Knésl⁴

Summary: *The aim of this paper is to investigate the beginnings of crack propagation from sharp V-notches. Stress distribution around the tip of a V-notch is described on the basis of linear-elastic fracture mechanics. The V-notch is a singular stress concentrator with a singularity exponent dependent on the V-notch opening angle. The stability criteria are generalized for a stress singularity different from 0,5. Using FEM analysis the critical stress for crack initiation was estimated as a function of the V-notch angle. The results of numerical calculations were compared with experiments taken from the literature.*

1. Úvod

Vliv vrubů na chování konstrukcí je v dnešní době velmi intenzivně studován z mnoha hledisek. Významná je zejména iniciace poruch typu trhliny v blízkosti vrcholu vrubu. Specifickým typem vrubů jsou vruby vyvolávající ve svém okolí singulární rozdělení napětí. Typickým příkladem takového vrubu je V-vrub s ostrým vrcholem, který představuje obecný singulární koncentrátor napětí s proměnným exponentem singularity.

V této práci je kladen důraz na určení stability V-vrubu v oblasti křehkého lomu. Lze ale najít i několik prací (Sih, 1973), (Sih, 1977) zabývajících se aplikací kritérií stability na oblast únavové pevnosti. V práci jsou diskutována zobecnění dvou základních kritérií pro křehké porušení vyvolané existencí trhlín (K_{IC} kritéria a Sihova kritéria) na případ stability V-vrubu. První kritérium je založeno na výpočtu velikosti středního napětí před čelem trhlíny (Knésl, 1991) a druhé zobecňuje pojem faktoru hustoty deformační energie S (Sih et al., 1991). Použití obou těchto kritérií pro odhad stability V-vrubů je však spojeno se zavedením nového

¹ Ing. Zdeněk Majer: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, Brno, 616 69, ČR, Ústav fyziky materiálů, AV ČR, Žitkova 22, Brno, 616 62, ČR, e-mail: majer@ipm.cz.

² Ing. Pavel Hutař, Ph.D.: Ústav fyziky materiálů, AV ČR, Žitkova 22, Brno, 616 62, ČR, tel.: +420 541212286, +420 541212301, e-mail: hutar@ipm.cz.

³ Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.: Ústav fyziky materiálů, AV ČR, Žitkova 22, Brno, 616 62, ČR, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT v Brně, Technická 2896/2, Brno, 616 69, ČR, tel.: +420 541212286, +420 541212301, e-mail: nahlik@ipm.cz.

⁴ prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.: Ústav fyziky materiálů, AV ČR, Žitkova 22, Brno, 616 62, ČR, tel.: +420 541212286, +420 541212301, e-mail: knesl@ipm.cz.

parametru d (který má rozměr délky) a jehož existence bezprostředně souvisí se změnou charakteru singularity napětí v okolí V-vrubu ve srovnání s trhlinou. Tento parametr nelze stanovit na základě výpočtů v rámci mechaniky kontinua a v mnoha případech může výrazně ovlivnit odhady výsledných kritických napětí a tím i odhady životnosti součástí s vruby. Cílem této práce je na základě srovnání vypočtených a experimentálních hodnot kritického napětí přispět ke spolehlivějšímu odhadu tohoto parametru. Použitá experimentální data byla převzata z literatury (Seweryn, 1994) a provedené výpočty simulují odpovídající experimentální uspořádání.

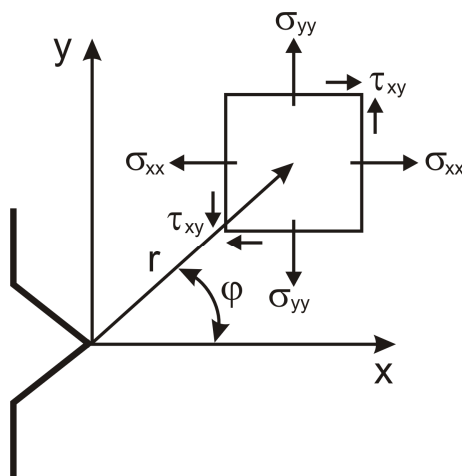
V případě V-vrubů rozumíme pod pojmem kritéria stability podmínky, které nám stanoví, jestli se z daného V-vrubu bude či nebude šířit trhlina. V důsledku změny exponentu singularity napětí není přímé zobecnění kritérií lineárně elastické lomové mechaniky (LELM) trhlin na V-vrubby možné (Knésl, 1991).

2. Rozdělení napětí v okolí vrcholu V-vrubu

Singulární rozdělení napětí před vrcholem V-vrubu lze vyjádřit na základě řešení Airyho funkce napětí a aplikace okrajových podmínek ve tvaru (např. Knésl, 1993):

$$\sigma_{ij} = \frac{H}{\sqrt{2\pi}r^p} \cdot f_{ij}(p, \varphi), \quad (1)$$

kde r, φ jsou polární souřadnice s počátkem ve vrcholu V-vrubu (obr1), H je zobecněný součinitel napětí, p je exponent singularity napětí a $f_{ij}(p, \varphi)$ jsou známé funkce.



Obrázek1 Kartézský souřadný systém s počátkem v kořeni V-vrubu

Pro jednoduchost se v dalším omezíme na normálový zatěžovací mód I a index I nebudeme (s výjimkou hodnot lomové houževnatosti) uvádět. Výrazy pro rozdělení napětí v okolí vrcholu V-vrubu mají tvar:

$$\sigma_{rr} = \frac{H}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} \left[(2 - p - p^2) \cos(p\varphi) - q(2 - 3p + p^2) \cos((2 - p)\varphi) \right], \quad (2)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{H}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} \left[(2-3p+p^2) \cos(p\varphi) + q(2-3p+p^2) \cos((2-p)\varphi) \right], \quad (3)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{H}{\sqrt{2\pi}} r^{-p} \left[p(1-p) \sin(p\varphi) + q(2-3p+p^2) \cos((2-p)\varphi) \right]. \quad (4)$$

kde $q = \cos(p(\pi - \alpha)) / (\cos(2-p)(\pi - \alpha))$. Pro V-vrub v homogenním isotropním materiálu je exponent singularity $0 < p < 0,5$ závislý pouze na úhlu otevření vrubu 2α a lze jej určit z řešení rovnice:

$$\sin[2(1-p)(\pi - \alpha)] + (1-p) \sin[2(\pi - \alpha)] = 0. \quad (5)$$

Zobecněný součinitel intenzity napětí H určíme přímou metodou za pomoci vztahu 3, kdy do tohoto vztahu dosadíme data získaná numerickým výpočtem pomocí MKP

$$H = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} r^p \sqrt{2\pi}}{f(p, q, \varphi)}. \quad (6)$$

3. Kritéria stability

Postup použitý pro formulaci kritéria stability vychází ze srovnání lomově-mechanických veličin L s jasně definovaným fyzikálním významem (např. střední hodnota napětí, velikost plastické zóny, hustota deformační energie, atd.) odvozené jak pro součinitel intenzity napětí K (v případě trhliny), tak pro zobecněný součinitel intenzity napětí H (pro V-vrub) (Knésl a kol., 2003). Za předpokladu stejného mechanismu porušování lze předpokládat, že kritické hodnoty veličiny L_C budou stejné v obou případech, tj.

$$L_{IC}(\dots, K_{IC}, r, \varphi, E, \nu, \dots) = L_C(\dots, H_{IC}, r, \varphi, E, \nu, \alpha, \dots). \quad (7)$$

Tato podmínka nám umožní definovat kritickou hodnotu zobecněného součinitele napětí H_{IC} , kterou můžeme nazvat zobecněná (vrubová) lomová houževnatost, ve tvaru:

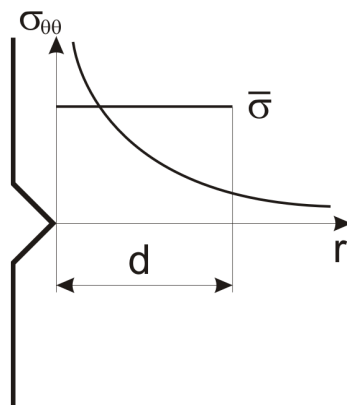
$$H_{IC} = H_{IC}(K_{IC}, \dots). \quad (8)$$

Podstatnou skutečností tohoto postupu je fakt, že zobecněná (vrubová) lomová houževnatost H_{IC} je pro dané podmínky určena velikostí lomové houževnatosti určené pro trhlínu. Můžeme tedy využít celé řady doposud existujících výsledků a nemusíme provádět další nová, často náročná a nákladná, měření.

Kritérium střední hodnoty napětí

Střední hodnota normálové složky napětí určená v blízké oblasti před vrcholem V-vrubu ve směru šíření iniciované trhliny je jednou z veličin vhodných k návrhu kritéria stability V-vrubu (obr.1) (Knésl, 1991). V tomto případě je

$$L = \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}. \quad (9)$$



Obrázek2 Střední hodnota napětí v oblasti d před kořenem V-vrubu

Při návrhu kritéria vycházíme z rozložení napětí před kořenem V-vrubu. Střední hodnota napětí $\bar{\sigma}$ je určována z maximálního normálového napětí $(\sigma_{\varphi\varphi})_{\max}$ ve vzdálenosti 0 až d před vrcholem V-vrubu a je srovnána s kritickým napětím σ_{crit} vedoucím k šíření trhliny iniciací trhliny ve vrcholu V-vrubu. Kriterium stability má pak tvar:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d (\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} dr < \sigma_{crit} . \quad (10)$$

Při aplikaci podmínky stability $\bar{\sigma} = \sigma_{crit}$ na trhlínu dostaneme veličinu σ_{crit} ve tvaru (pro jednoduchost nebudeme dále uvádět index I):

$$\sigma_{crit} = \frac{2K_{IC}}{\sqrt{2\pi d}} , \quad (11)$$

kde K_{IC} je lomová houževnatost.

Pro V-vrub dostaneme veličinu σ_{crit} ve tvaru:

$$\sigma_{crit} = \frac{2H_{IC}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2-p)(1+q)}{d^p} , \quad (12)$$

kde H_{IC} je kritická hodnota zobecněného (vrubového) součinitele intenzity napětí, p je exponent singularity napětí a q je parametr závislý na úhlu otevření V-vrubu.

Finální vztah má pak tvar:

$$H_{IC} = K_{IC} \frac{2d^{p-\frac{1}{2}}}{(2-p)(1+q)} . \quad (13)$$

Kriterium stability V-vrubu pro statické zatěžování má pak formálně stejný tvar jako K_{IC} kritérium:

$$H(\sigma_{appl}, \alpha) < H_{IC}(K_{IC}, \alpha) . \quad (14)$$

S-kritérium minimální hustoty deformační energie (Sihovo kritérium)

I zde vycházíme z podobnosti chování trhlín a V-vrubů. Tentokrát zvolíme jako řídicí veličinu hodnotu (zobecněného) faktoru hustoty deformační energie (Sih et al., 1991)

$$L = \Sigma . \quad (15)$$

V případě zatěžovacího módu I bude minimum faktoru hustoty deformační energie ve směru $\varphi = 0$, což odpovídá směru šíření předpokládané trhliny.

Pro trhlinu, resp. V-vrub zatížené normálovým módem lze vyjádřit faktor hustoty deformační energie S resp. Σ ve tvaru:

$$S = a_{11}K^2, \text{ resp. } \Sigma = A_{11}H^2, \quad (16)$$

kde a_{11} je funkcí polárního úhlu a nezávisí na souřadnici r . Veličina A_{11} je na souřadnici r závislá.

Rovnost kritických hodnot faktorů hustoty deformační energie má pak tvar (hodnotu A_{11} určíme pro $r = d$):

$$a_{11}K_{IC}^2 = A_{11}H_{IC}^2, \quad (17)$$

$$\text{kde } a_{11} = \frac{(2k_n + 1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)}{16\pi\mu},$$

$$A_{11} = \frac{(k_n U_I + V_I)}{16\pi\mu} d^{1-2p},$$

a $k_n = 1 - 2\nu$ pro rovinnou deformaci,

$$U_I = 16(1 - p)^2 \cos^2(p\varphi),$$

$$V_I = 4[p^2(1 - p)^2 + q^2(2 - 3p + p^2)^2 - 2pq(1 - p)(2 - 3p + p^2)\cos 2\varphi].$$

Po odvození v případě statického zatěžování porovnáním součinitelů hustoty deformační energie při kritické podmínce dostaneme vztah:

$$H_{IC} = K_{IC} d^{\frac{1}{p-2}} \sqrt{\frac{4k_n}{k_n U_I(\varphi=0) + V_I(\varphi=0)}}. \quad (18)$$

Konečné kritérium stability V-vrubu vyjádřené pomocí hustoty deformační energie lze opět vyjádřit ve tvaru nerovnice:

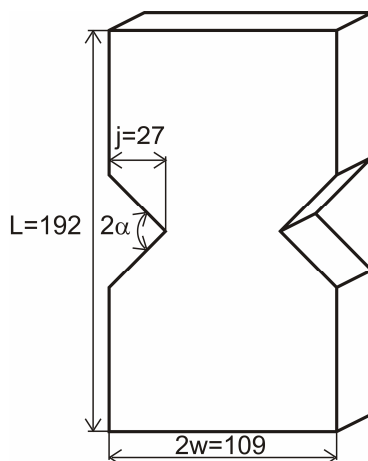
$$H(\sigma_{appl}, \alpha) < H_{IC}(K_{IC}, \alpha). \quad (19)$$

V obou případech je nutno závislost $H_I = H_I(\sigma_{appl}, \alpha..)$ určit numericky (např. pomocí MKP) pro dané okrajové podmínky a zatížení. Hodnota zobecněné lomové houževnatosti je v obou případech funkcí parametru d viz. vztahy 13,18.

4. Numerický model

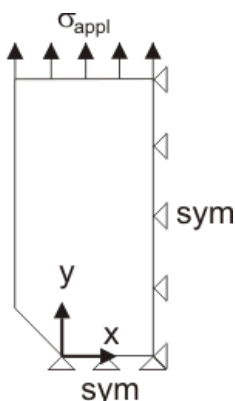
Uvažujeme model s oboustranným V-vrubem (obr.3). Geometrie modelu byla volena tak, aby bylo možné získané výsledky porovnat s výsledky experimentu (Seweryn, 1994). Rozměry jsou tedy délka vzorku $L = 192$ mm, šířka $2w = 109$ mm, hloubka vrubu $j = 27$ mm, úhel otevření vrubu $2\alpha = < 40^\circ - 140^\circ >$, tloušťka vzorku byla jednotková a celý vzorek byl zatížen aplikovaným zatížením σ_{appl} .

Výpočty byly provedeny metodou konečných prvků (MKP) systémem ANSYS verze 10.0. Model MKP byl vytvořen za pomoci dvojdimensionálních izoparametrických prvků SOLID 45. Protože je zkušební těleso symetrické ve dvou rovinách, bylo možné modelovat pouze čtvrtinový model, jak je zobrazeno na obr.5. Při použití přímých metod je nutné značně zjemnit síť v blízkosti vrcholu V-vrubu v důsledku odečítání napětí právě v této oblasti.



Obrázek4 Geometrie studovaného vzorku s V-vrubem

Výsledkem výpočtů byly zejména hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí H_I v závislosti na úhlu otevření vrubu 2α , hodnoty exponentu singularity p a následně všechny veličiny nezbytné pro aplikaci uvedených kritérií 14, 19, včetně odhadů velikosti zobecněné lomové houževnatosti H_{IC} , viz 13, 18. Vypočtené hodnoty tedy umožňují odhad kritického napětí pro iniciaci trhliny ve vrcholu vrubu pomocí obou uvedených kritérií. Nezodpovězenou otázkou zůstává volba veličiny (parametru) d .



Obrázek5 Okrajové podmínky a zatížení aplikované na MKP model studovaného vzorku s V-vrubem

Výpočtem numerického modelu pro $\alpha = 0$ byla zjištěna velikost lomové houževnatosti $K_{IC} = 58,9 \text{ MPa mm}^{1/2}$ pro PMMA (Polymethylmethacrylate) (odpovídá kritickému napětí $\sigma_{crit} = 5,48 \text{ MPa}$) a $K_{IC} = 1680,4 \text{ MPa mm}^{1/2}$ pro dural (odpovídá kritickému napětí $\sigma_{crit} = 156,28 \text{ MPa}$).

5. Porovnání experimentu s numerickými výsledky

K ověření výsledků byla zvolena data z experimentu, který provedl Seweryn (1994). Tloušťka zkušebních vzorků byla 4 mm pro plexisklo (PMMA) a 5 mm pro dural. Ostré V-vrubu na vzorku byly připraveny na svislé frézce, dokončovací operace byla provedena tvrdým karbidovým nástrojem naostřeným na elektrolytickém stroji. Vzorky byly kontrolovány na odečítacím mikroskopu, kde byla zjištěna maximální odchylka úhlu otevření

vrubu 0,5°. Byly naměřeny následující hodnoty kritického napětí pro dva rozdílné materiály PMMA a dural:

Tabulka1 Hodnoty naměřené pro PMMA v porovnání s vypočtenými hodnotami kritického napětí pro různou velikost d

PMMA								
2α [deg]	P_{crit} [kN]	σ_{crit} [MPa]	vypočtené hodnoty σ_{crit} [MPa]					
			kritérium středního napětí			Sihovo kritérium		
			d [mm]			d [mm]		
			1	3	10	1	3	10
40	2,30	5,28	5,52	5,50	5,48	5,65	5,63	5,61
60	2,56	5,87	5,66	5,58	5,50	5,88	5,80	5,72
80	2,63	6,00	6,06	5,86	5,66	6,30	6,09	5,88
100	2,79	6,40	6,97	6,51	6,03	6,95	6,48	6,01
120	3,27	7,51	8,97	7,90	6,87	8,05	7,09	6,16
140	4,70	10,78	13,49	10,86	8,57	10,15	8,18	6,45

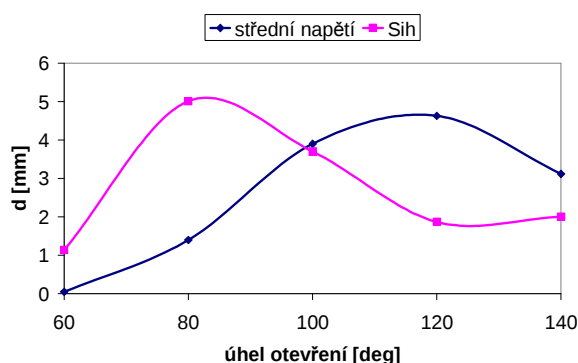
Tabulka2 Hodnoty naměřené pro dural v porovnání s vypočtenými hodnotami kritického napětí pro různou velikost d

dural								
2α [deg]	P_{crit} [kN]	σ_{crit} [MPa]	vypočtené hodnoty σ_{crit} [MPa]					
			kritérium středního napětí			Sihovo kritérium		
			d [mm]			d [mm]		
			1	3	10	1	3	10
40	88,70	162,75	150,91	150,42	149,88	154,56	154,05	153,49
60	89,25	163,76	160,41	158,31	156,04	167,12	164,93	162,56
80	89,58	164,36	172,21	166,63	160,72	180,54	174,69	168,49
100	91,28	167,48	195,17	182,12	168,81	199,00	185,69	172,13
120	96,00	176,15	243,26	214,16	186,24	228,22	200,91	174,72
140	102,50	188,07	360,24	290,14	228,87	290,63	234,07	184,65

6. Numerické výsledky a jejich diskuse

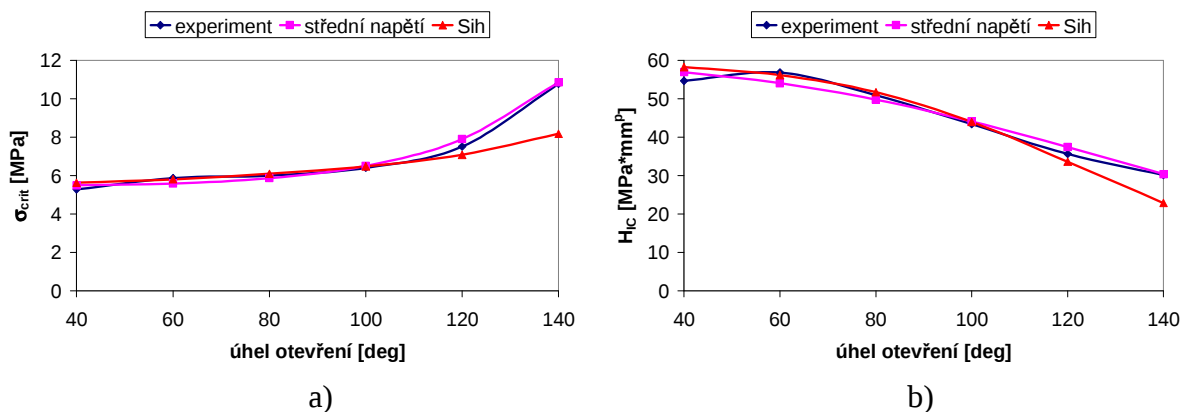
Provedené numerické výpočty a získané výsledky umožňují výpočet kritického napětí pro iniciaci trhliny ve vrcholu V-vrubu na základě obou uvažovaných kritérií. Výsledné hodnoty kritického napětí σ_{crit} jsou uvedeny v tab. 1 a 2. Tyto hodnoty byly vypočteny pro velikosti parametru $d = 1, 3$ a 10 mm. Z výsledků je patrné, že pro menší úhly otevření V-vrubu, kde je velikost exponentu singularity blízká $1/2$ jsou hodnoty σ_{crit} na velikosti parametru d prakticky

nezávislé. Navíc lze konstatovat dobrou shodu mezi experimentálními a teoretickými výsledky. V případě větších úhlů otevření V-vrubu, kde je hodnota exponentu singularity více odlišná od $1/2$ je závislost vypočtených hodnot σ_{crit} na velikosti parametru d výraznější. Shoda vypočtených a experimentálně stanovených výsledků je v těchto případech problematictější a závisí na volbě parametru d . Abychom mohli posoudit vliv velikosti parametru d na výsledné hodnoty kritického napětí, je na obrázku 6 uvedena závislost délky d na úhlu otevření V-vrubu 2α . Uvedené hodnoty d jsou v tomto případě stanoveny na základě srovnání s experimentem. Z obrázku vyplývá rozsah parametru d pro studovaný problém. Je však nutno uvážit, že vzhledem k experimentálním chybám měření má tato závislost průběh, který má spíše ilustrativní charakter.



Obrázek6 Závislost vypočtené hodnoty d na úhlu otevření V-vrubu 2α pro PMMA

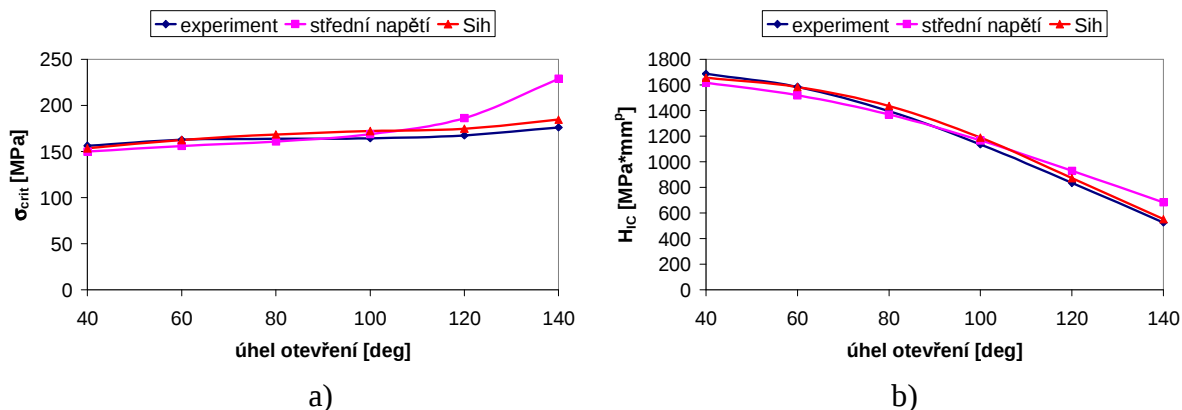
Parametr d se objevuje u V-vrubu na rozdíl od trhliny v důsledku různých hodnot singularity pro různé úhly otevření V-vrubu. Některé práce úvadějí, že parametr d by se měl volit podle mikrostruktury – např. zohlednit velikost zrna materiálu. Z této práce však vyplývá, že parametr d je spíše spjat s procesní zónou a proto se pohybuje v řádu milimetrů. Z výsledků též vyplývá, že hodnota parametru d neovlivňuje příliš výsledné hodnoty σ_{crit} v případech ostřejších vrubů.



Obrázek7 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu 2α (a) a kritické hodnoty zobecněného součinitele intenzity napětí H_{IC} na úhlu otevření V-vrubu 2α (b) pro PMMA

Na obrázku 7a je vidět závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu 2α pro PMMA. Je zde patrná především velmi dobrá shoda s experimentem pro kritérium střední hodnoty napětí. S-kritérium vykazuje též velmi dobrou shodu s výjimkou poslední hodnoty (pro úhel 140°). Tato shoda s experimentem je vidět také na obrázku 7b, kde je zobrazena

závislost kritické hodnoty zobecněného součinitele intenzity napětí H_{IC} na úhlu otevření V-vrubu 2α pro PMMA. Zde je nutné si uvědomit, že i přesto, že veličina kritické hodnoty zobecněného součinitele intenzity napětí H_{IC} klesá při rostoucí hodnotě kritického napětí σ_{crit} , tak zároveň ještě strměji klesá hodnota zobecněného součinitele intenzity napětí H .



Obrázek 8 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu 2α (a) a kritické hodnoty zobecněného součinitele intenzity napětí H_{IC} na úhlu otevření V-vrubu 2α (b) pro dural

Na obrázku 8a je vidět závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu 2α pro dural. Pro tento materiál je výborná shoda pro S-kritérium i pro kritérium středního napětí, u kterého je však jedna hodnota (úhel 140°) nepřesná. Uvedme že, hodnoty H nemají přímý fyzikální význam a slouží jen ke kvantifikaci velikosti zatížení pro singulární pole napětí s jinou singularitou než jedna polovina. Z výsledků se dá tedy usoudit, že pro křehké materiály (PMMA) je vhodnější použít kritérium středního napětí a pro materiály houževnaté (dural) je vhodnější S-kritérium založené na energetickém principu.

7. Závěr

Tato práce je zaměřena na problematiku stability V-vrubu. Výsledky numerických výpočtů byly srovnány s experimentálními daty pro dva rozdílné materiály PMMA a dural. Pro odhad iniciace trhliny v kořeni vrubu byla použita dvě různá kritéria: kritérium střední hodnoty napětí a S-kritérium minimální hustoty deformační energie. Navržená kritéria stability určená na základě zobecnění lineárně elastické lomové mechaniky obsahují parametr d , který do jisté míry může mít vliv na odhad kritické hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí. Na základě porovnání experimentálních a numerických výsledků se ukázalo, že optimální hodnota parametru d je v řádu několika milimetrů. Z toho plyne, že tento parametr pravděpodobně nesouvisí s mikrostrukturou nebo mikromechanismem poškození, ale charakterizuje procesní zónu, která rozhoduje o chování trhliny. Je třeba podotknout, že závislost kritické hodnoty zobecněného faktoru intenzity napětí na d není silná a spíše než přesné určení je třeba odhadnout řád tohoto parametru. V tomto případě se pohybuje v rozmezí 1-10 mm. Velikost d byla stanovena pro oba zkoumané materiály a výsledky byly podobné. V případech menších úhlů otevření vrubu je vliv zvolené velikosti d na výsledky zanedbatelný, v případech kde se p liší výrazně od 0,5 je závislost na d silnější.

Byla vzájemně porovnána obě kritéria stability a ukázalo se, že pro materiály více křehké jako je například plexisklo (PMMA) přesněji popisuje chování trhliny kritérium na bázi

středního napětí. Naopak pro dural se ukázalo jako vhodnější Sihovo kritérium minima hustoty deformační energie. Je tedy zřejmé, že aplikace jednotlivých kritérií stability je do jisté míry svázáno s mikromechanismem poškození. Na druhou stranu je třeba konstatovat, že vzhledem k experimentálnímu rozptylu a přesnosti potřebné pro určení zobecněného faktoru intenzity napětí je možno využít obě kritéria pro všechny sledované případy. Z praktického hlediska lze také konstatovat, že vruby s úhlem otevření menším než 60° se chovají identicky jako trhlina.

8. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantů Grantové Agentury ČR č. 106/06/P239 a 106/05/H008.

9. Literatura

- Knésl Z., *A criterion of V-notch stability*, International Journal of Fracture, Vol. 48, 79-83, 1991
- Knésl Z., *The application of the strain energy density concept to the determination of a crack propagation direction initiated at a sharp notch tip*, ACTA TECHNICA ČSAV, Vol. 38, 221-234, 1993
- Knésl Z., Náhlík L., Radon J.C., *Influence of interface on fatigue threshold values in elastic bimaterials*, Computational Materials Science, Vol. 28, 620-627, 2003
- Náhlík L., *Odhad hodnoty exponentu singularity napětí a prahového napětí pro šíření trhliny přes rozhraní dvou ortotropních materiálů*, Problémy lomové mechaniky VI, 59-68, 2006
- Seweryn A., *Brittle fracture criterion for structures with sharp notches*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 47, 673-681, 1994
- Sih GC., *Mechanics of Fracture I: Methods of analysis and solutions of crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973
- Sih GC., *A special theory of crack propagation*, Mechanics of Fracture, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977
- Sih GC., HO JW., *Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 16, 179-214, 1991