National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2007
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2007

TO THE NUMERICAL ANALYSIS OF SINGULARITIES IN RESONANCE CHARACTERISTICS OF NONLINEAR PARAMETRIC SYSTEMS WITH IMPACT EFFECTS IN GEAR MESH

M.Hortel*, A.Škuderová*

Summary: *The impact effects in gear mesh represent specific phenomena in the dynamic investigation of highspeed light transmission systems with kinematic couplings. They are caused of greater dynamic than static-elastic deformations in meshing gear profiles. In term of internal dynamics they are influenced among others by time heteronomous stiffness functions in gear mesh and resonance tuning of stiffness level. The damping in gear mesh and in gear system is concerned significantly in the amplitude progress, greatness and phase shift of relative motion towards stiffness function alternatively towards its modify form in gear mesh. In consequence of these and another actions rise above resonance characteristics certain singular locations with jump amplitude course.*

1. Úvod

U současných vysokootáčkových turbovrtulových leteckých pohonových jednotek se mohou vyskytovat značná dynamická namáhání některých konstrukčních částí při přejíždění jejich rezonančních oblastí v širokém rozsahu otáček. Je proto analýza takových soustav v kombinaci s převodovými systémy s kinematickými vazbami nanejvýš aktuální a nutná.

Převodové systémy lehkých pohonových jednotek jsou tvořeny či vytvářeny převážně pseudoplanetovými systémy s čelním přímým či šikmým ozubením. S ohledem na požadovanou minimální hmotnost a rozměry celé konstrukce musí být jednotlivé prvky takové soustavy dynamicky vysoce vyladěné.

Pro dynamickou analýzu jevů v takových matematicko-fyzikálních náhradních modelech planetových např. pseudoplanetových soustav – reduktorů lze pohyb popsat soustavou deterministických slabě a silně nelineárních parametrických rovnic tvaru [1]

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}'' + {}_1\boldsymbol{K}(\beta,\delta_i,H)\boldsymbol{v}' + \sum_{K_1>1} {}_{K_1}\boldsymbol{K}(D,D_i,H)\left|\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v}')\right|^{K_1} sgn(\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v}'))$$

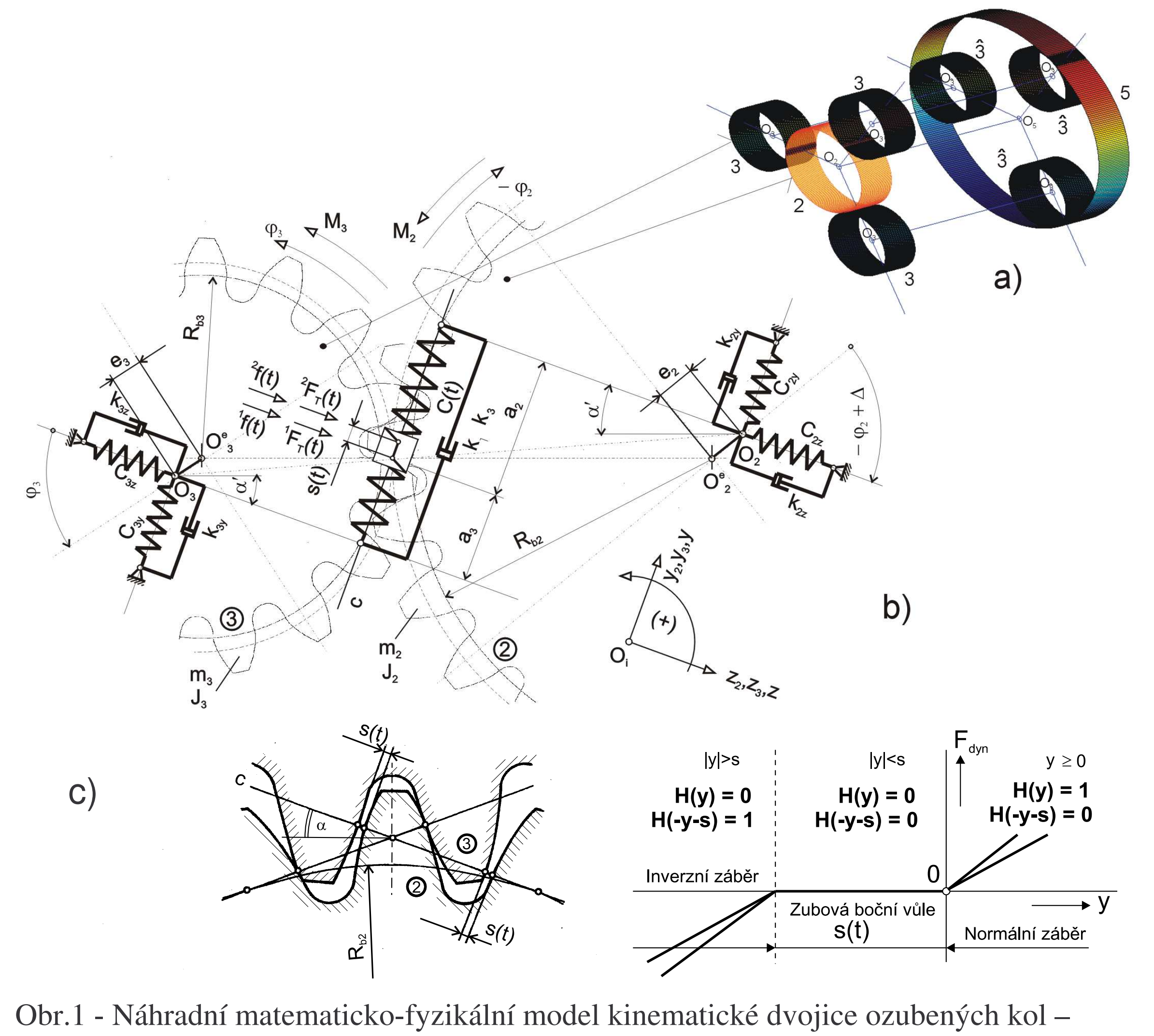
$$+ {}_1\boldsymbol{C}(\varepsilon,\kappa,Y_n,U_n,V_n,H,\tau)\boldsymbol{v} + \sum_{K>1} {}_K\boldsymbol{C}(\varepsilon,\kappa,I_n,H,\tau)\boldsymbol{w}^K(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(a_n,b_n,\overline{\varphi},H,\tau). \quad (1)$$

Zde představuje $\boldsymbol{v}$ obecně m-dimenzionální vektor pohybu soustavy, $\boldsymbol{w}^K(\boldsymbol{v})$ je K-tá mocnina vektoru $\boldsymbol{v}$, která je definovaná vztahem $\boldsymbol{w}^K(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}^{K-1}(\boldsymbol{v}))$, přičemž

* Ing. Milan HORTEL, DrSc.; Ing. Alena ŠKUDEROVÁ, Ph.D., Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i., Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, hortel@it.cas.cz, skuder@it.cas.cz

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}))$ je diagonální matice, ve které jsou prvky na hlavní diagonále tvořeny prvky vektoru $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{v}$. Dále je $\boldsymbol{M}$ matice hmotnostních a setrvačných sil, ${}_1\boldsymbol{K}$ a ${}_{K_1}\boldsymbol{K}$ jsou maticemi lineárních, příp. nelineárních tlumících sil, ${}_1\boldsymbol{C}$ a ${}_K\boldsymbol{C}$ pak maticemi kvazilineárních resp. nelineárních vratných sil a $\boldsymbol{F}(\tau)$ je vektorem nepotenciálního vnějšího buzení s budícími koeficienty a_n, b_n a $\overline{\varphi}$ fázový úhel. H je Heavisideova funkce, která umožňuje v kompaktním tvaru řešit pohyby – rázy jako důsledek silných neanalytických nelinearit vlivem existence technologických bočních vůlí $s(\tau)$ ozubení. Příslušné lineární resp. nelineární tlumící součinitelé jsou označeny β, δ_i resp. D, D_i, lineární parametrické funkce symboly Y_n, U_n, V_n a nelineární parametrické funkce tzv. parametrické nelinearity symboly I_n. ε a κ představují součinitele trvání záběru a amplitudovou modulaci výsledné tuhostní funkce v ozubení ${}_1\boldsymbol{C}(\tau)$. Derivace podle bezdimenzionálního času τ jsou značeny čárkami, $\tau = \omega_c t$, přičemž $\omega_c \ldots$ záběrová frekvence, $t \ldots$ čas.

Předložená práce navazuje na studie [2],[3],[4],[5] a vychází z řešení zvláštního případu zpřesněného diskrétního matematicko-fyzikálního modelu kinematické dvojice ozubených kol jedné větve pseudoplanetové soustavy, viz obr.1, který představuje soustavu o šesti stupních volnosti.



Obr.1 - Náhradní matematicko-fyzikální model kinematické dvojice ozubených kol – (b) pseudoplanetové soustavy s dvojnásobnými satelity - (a), technologická boční zubová vůle a hodnoty Heavisideových funkcí H v oblastech zubového záběru s vůlemi (c).

Pohyby v takovém zvláštním případu (obecného modelu, viz rovnice (1)) dvojice ozubených kol s čelními přímými zuby vedou při hmotnostní diskretizaci jakož i vlivem existence různých slabých – analytických a silných – neanalytických nelinearit, jako je např. vliv technologických bočních zubových vůlí, a dále při parametrických budících zdrojích na řešení šesti obyčejných deterministických nelineárních diferenciálních rovnic s časově proměnlivými koeficienty [1].

Relativní pohyb v záběru se nacházejícího ozubení, tj. ve směru záběrové přímky, lze pro obecnou elasticky uloženou soustavu s pohyby podpor $\left\{ y_{3,2}\, ;\, z_{3,2} \right\}$ páru ozubených kol 3,2 při respektování tzv. házivosti roztečných kružnic, které jsou modelovány výstřednostmi $e_{3,2}$, napsat ve tvaru [1]

$$y(\tau) = R_{b3}\varphi_3 + R_{b2}\varphi_2 + y_3 - y_2 + e_3 \sin\varphi_3 - e_2 \sin(\Delta - \varphi_2) + {}^{1,2}f(\tau), \qquad (2)$$

kde ${}^{1,2}f(\tau)$ je chybová funkce, čili odchylka tvaru ozubení od ideální evolventy, Δ je fázový úhel natočení mezi výstřednostmi $e_{3,2}$ a $R_{b3,2}$ jsou poloměry základních kružnic. Tento relativní pohyb tvoří míru dynamického zatížení v záběru se nacházejícího ozubení, neboť dynamická síla $F_{dyn} = {}_1C(\tau)y(\tau)$.

V průběhu střídání obecně k a $k+1$ párů zubů v záběru dochází na záběrové dráze k periodickým změnám v průběhu výsledné funkce tuhosti $C(t)$.

Analytický tvar výsledné parametrické funkce čelního přímého ozubení v záběru můžeme např. pro $\varepsilon \in \langle 1;2 \rangle$ vyjádřit Fourierovou řadou ve tvaru [6],[7]

$$C(t) = C_s + \frac{C_{max}(1-\kappa)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} (-1)^n \sin n[(\varepsilon - 2)\pi] \cos n\omega_c t, \qquad (3)$$

kde střední tuhost je definována

$$C_s = \kappa C_{max} + \frac{C_{max}(1-\kappa)}{2} [1 + (2\varepsilon - 3)]. \qquad (4)$$

Symbol $\kappa = C_{min} C_{max}^{-1}$ představuje amplitudovou modulaci výsledné tuhostní funkce zubů v záběru, přičemž C_{min}, C_{max} představují minimální resp. maximální hodnotu tuhosti v záběru ozubení a ε je součinitel trvání záběru, udávající kolik párů zubů je na záběrové úsečce současně v záběru. V extrémních případech např. $\varepsilon = 1$ je po dobu trvání celého záběru na záběrové dráze pouze 1 pár zubů, v případě $\varepsilon = 2$ jsou po celou dobu v záběru dva páry zubů. V těchto případech přechází parametrická, tj. v tuhosti časově heteronomní soustava v soustavu s konstantními koeficienty. Mezihodnoty ε udávají poměr střídání počtu párů zubů v záběru na záběrové dráze. Ve Fourierově řadě (3) ε udává časový poměr střídání minimální a maximální výsledné tuhosti C_{min}, C_{max} během záběru. Tato skutečnost se v dynamice soustavy výrazně projevuje velikostí amplitudy relativního pohybu v záběru. Ta je ovlivněna časovou délkou působení záběru na té které potenciální tuhostní hladině příslušné vratné síly. V tuhosti zubů bude v další aplikaci respektována pouze tuhost vlastních zubů a vetknutí do tuhého poloprostoru, věnce a kotouče (disky) jsou uvažovány absolutně tuhé.

Na základě uskutečněné analytické analýzy slabě a silně nelineární parametrické integrodiferenciální úlohy s řešícími jádry ve tvaru rozštěpených Greenových rezolvent [8], na kterou byla v příspěvku řešená diferenciální okrajová úloha transformována, navazuje nyní numerické řešení dané úlohy.

Pro numerickou analýzu dynamických jevů s rázy citovaného simulačního modelu kinematické dvojice čelního přímého ozubení byla vypracována metodika řešení v prostředí MATLAB/Simulink. [7]

Všechny uvedené parametry ovlivňují jak kvalitativně, tak i kvantitativně možnosti rozvoje amplitudy relativního pohybu *y(t)* v čase vůči průběhu *C(t).*

Dalším faktorem, který ovlivňuje kvalitativně i kvantitativně průběh *y(t)*, je tření v záběru ozubení či třecí síly v pohybu valení – smyk kinematické dvojice – ozubení. Těmito se mění původně zde uvažované konstantní předpětí $M = M_3 - (-M_2) = konst.$ na $M_v = M \pm \Delta M_T$, kde ΔM_T je přídavný moment od třecí síly.

Tření či třecí síly v záběru ozubení tvoří samostatnou kapitolu v rámci tribologického procesu mazání, při kterém se prostřednictvím maziva, přítomného mezi třecími povrchy boků zubů v záběru se nacházejícího ozubení, snižuje tření, tím i opotřebení třecích se povrchů, a zvyšuje energetická účinnosti přenosu. Teorie elastohydrodynamického mazání v ozubení konečné šíře při přímkovém dotyku za valivého a kluzně valivého tření je v současné době jednou z nejvíce rozvíjených oblastí. Při absolutně tuhých podporách – uložení kol probíhá ryze valivý pohyb pouze v centrálním bodě záběrové přímky, mimo tento bod je pohyb kombinovaný, tj. valení – smyk. Při elastickém uložení ozubených kol se může pohyb valení – smyk se změnou smyslu tření změnit a posunout oproti geometrii záběru tuhého uložení kol. Podobná situace nastává v případě existence tzv. házivosti roztečných kružnic modelované výstřednostmi $e_{3,2}$, viz obr.1. V této práci je pro kvalitativní respektování tření či třecí síly $F_T(t)$ užita jako nultá aproximace pouze velmi přibližná teorie Coulombova tření.

2. Ukázky a analýza příčin vzniku singulárních jevů v průbězích rezonančních charakteristik relativních pohybů

Studie navazuje na práce [1],[3] a rozpracovává numerickou cestou analýzu příčin vzniku singulárních míst v průbězích rezonančních – bifurkačních charakteristik silně nelineárních a v tuhostech ozubení časově heteronomních soustav s kinematickými vazbami.

Analýza dynamického chování některých vlastností řešeného zvláštního případu obecné nelineární parametrické, tj. časově heteronomní soustavy, s kinematickými vazbami - čelními ozubenými koly s přímými zuby je v příspěvku zaměřena na vyšetřování příčin bifurkačních tvarů amplitudofrekvenčních charakteristik daného matematicko-fyzikálního modelu jak u

a) konzervativního systému v záběru ozubení, tak u
b) nekonzervativního systému.

Protože dosud nejsou v tak tvarově složitých částech převodových systémů např. ve fázi záběru ozubení valení – smyk známé ani přibližné údaje o tlumících vlastnostech či zákonitostech tlumení jak v samotném ozubení, tak i ve spojení s vetknutím do věnců a disků včetně nábojů kol jako celku, bude toto tlumení simulováno pomocí různých funkcionálních závislostí jak v oblasti materiálu ozubení při normálním či inverzním záběru včetně příslušných částí věnců a disků kol a účinku viskózního tlumení mazacího prostředí, tj. vlivu olejů při odlehnutí – odskoku zubových profilů v zubové mezeře – technologické boční zubové vůli.

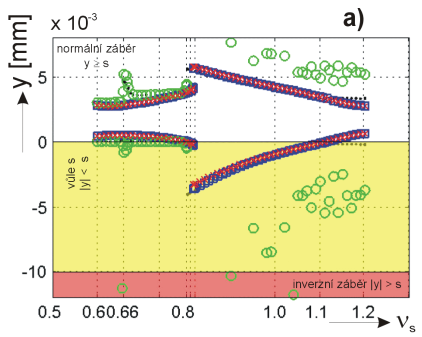
Tlumení zde výrazně ovlivňují např. i vylehčující otvory v discích kol. Podobně tomu je i v oblasti viskózního tlumení mazacího prostředí v závislosti na jeho teplotě apod.

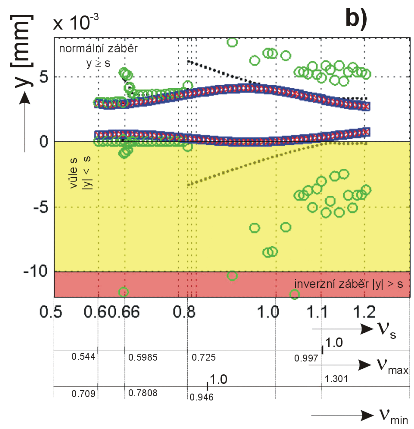
V této studii budou vlivy tlumení či tlumících sil v soustavě pohybových rovnic (1) daného modelu mechanického systému z obr.1 reprezentovány členy tvaru

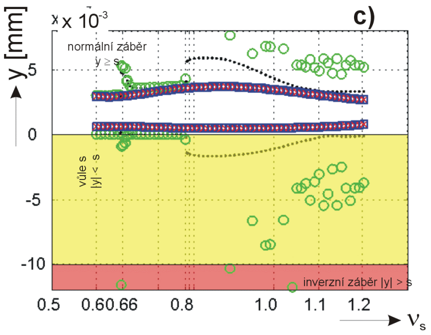
$$ {}_1\boldsymbol{K}(\beta,\delta_i,H)\boldsymbol{v}' + \sum_{K_1>1} {}_{K_1}\boldsymbol{K}(D,D_i,H)\left|\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v}')\right|^{K_1} sgn(\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v}')) \quad \text{pro } K_1 = 2{,}3. \qquad (5) $$

Problematika analýzy navazuje na práci [3], kde jednotlivé kombinace tlumení ozubení v záběru a v zubové vůli při rázovém chodu jsou tam na základě rovnice (5) uvedeny v Tab.1, kterou z důvodu omezeného rozsahu příspěvku zde neuvádíme.

Podívejme se nyní podrobněji na příčiny vzniku bifurkačních singularit, tj. nespojitostí skokového charakteru v průbězích rezonančních charakteristik relativního pohybu $y(t)$, viz (2), pro daný model kinematické dvojice ozubených kol dle obr.1b, jak jsou pro konzervativní a nekonzervativní systém s lineárním, kvadratickým a kubickým tlumením uvedeny na obr. 2 a,b,c .







Obr.2

Rezonanční - bifurkační charakteristiky $\{\nu; y\}$ parametrické – v tuhosti záběru ozubení časově heteronomní soustavy pro

konzervativní soustavu : ○ - $k_{1,2,3} = k_{1m,2m,3m} = 0$ …obr.2a,b,c

lineární tlumení : □ - $k_1 \neq 0; k_{1m} = 0$; • - $k_1 = 0; k_{1m} \neq 0$; × - $k_1 \neq 0; k_{1m} \neq 0$ … obr.2a

kvadrat. tlumení : □ - $k_2 \neq 0; k_{2m} = 0$; • - $k_2 = 0; k_{2m} \neq 0$; × - $k_2 \neq 0; k_{2m} \neq 0$ … obr.2b

kubické tlumení : □ - $k_3 \neq 0; k_{3m} = 0$; • - $k_3 = 0; k_{3m} \neq 0$; × - $k_3 \neq 0; k_{3m} \neq 0$ … obr.2c*)

(Pro porovnání jsou uvedeny stupnice naladění ν_s vůči střední hodnotě výsledné tuhosti C_s ozubení v záběru a stupnice naladění $\nu_{max} = \omega_c \Omega_{max}^{-1} = \nu_s \Omega_s \Omega_{max}^{-1}$ a $\nu_{min} = \omega_c \Omega_{min}^{-1} = \nu_s \Omega_s \Omega_{min}^{-1}$ vůči maximálním C_{max} resp. C_{min} ozubení v záběru, přičemž $\Omega_{max}{}^2 = C_{max} m_{red}{}^{-1}$ a $\Omega_{min}{}^2 = C_{min} m_{red}{}^{-1}$.)

*) $k_{1,2,3}$ … materiálové tlumení v ozubení; $k_{1m,2m,3m}$ … tlumení mazacího prostředí v zubové mezeře – vůli (bez uvažování vlivu teplot); indexy 1 – lineární, 2 – kvadratické, 3 – kubické tlumení.

Všechny rezonanční charakteristiky $\{\nu; y(t)\}$ jsou zde řešeny pro parametrickou nelineární homogenní ($\boldsymbol{F}(a_n, b_n, \bar{\varphi}, H, \tau) = 0$, viz rovnice (1)) soustavu páru ozubených kol pro $\varepsilon = 1{,}569; \kappa = 0{,}5879; C_{max} = 4.10^5[\mathrm{Nmm}^{-1}]; m_{red} = 3{,}123.10^{-3}[\mathrm{kg}]$. Hodnoty materiálového tlumení $k \equiv k_{1,2,3}$ jak v oblasti normálního, tak i záběru inverzního, jakož i hodnoty viskózního tlumení v prostředí zubové mezery $k_m \equiv k_{1m,2m,3m}$ (pro jednoduchost bez uvažování vlivu teplot) jsou zde uvažovány stejné, tj. $k \equiv k_m = 3{,}95$, což odpovídá v rovnici (1) poměrným tlumením $\beta, \beta_m, D, D_m = 0.062$.

Protože nekonzervativní soustava vede pro všechny zde uvedené varianty tlumení na ustálené kmitání již při páté otáčce soukolí, jsou pro porovnání všechny amplitudo-frekvenční charakteristiky v obr.2 včetně konzervativní soustavy, jejíž řešení je nestabilní v celém rozsahu otáček, vyneseny pro tuto pátou otáčku. Jediným budícím zdrojem kmitání je zde uvažovaná parametrická, tj. s časem proměnlivá tuhostní – potenciální budící funkce zubů v záběru $C(t)$.

V grafech jsou vyznačeny oblasti fází *normálních* záběrů pro $y(t) \geq 0$ - bílá oblast, fází *s odskoky* do zubových vůlí $s(t)$, tj.. oblasti s rázovými jevy, kde $|y(t)| < s(t)$ - žlutá oblast a fáze *inverzních* záběrů, kde $|y(t)| > s(t)$ - červená oblast.

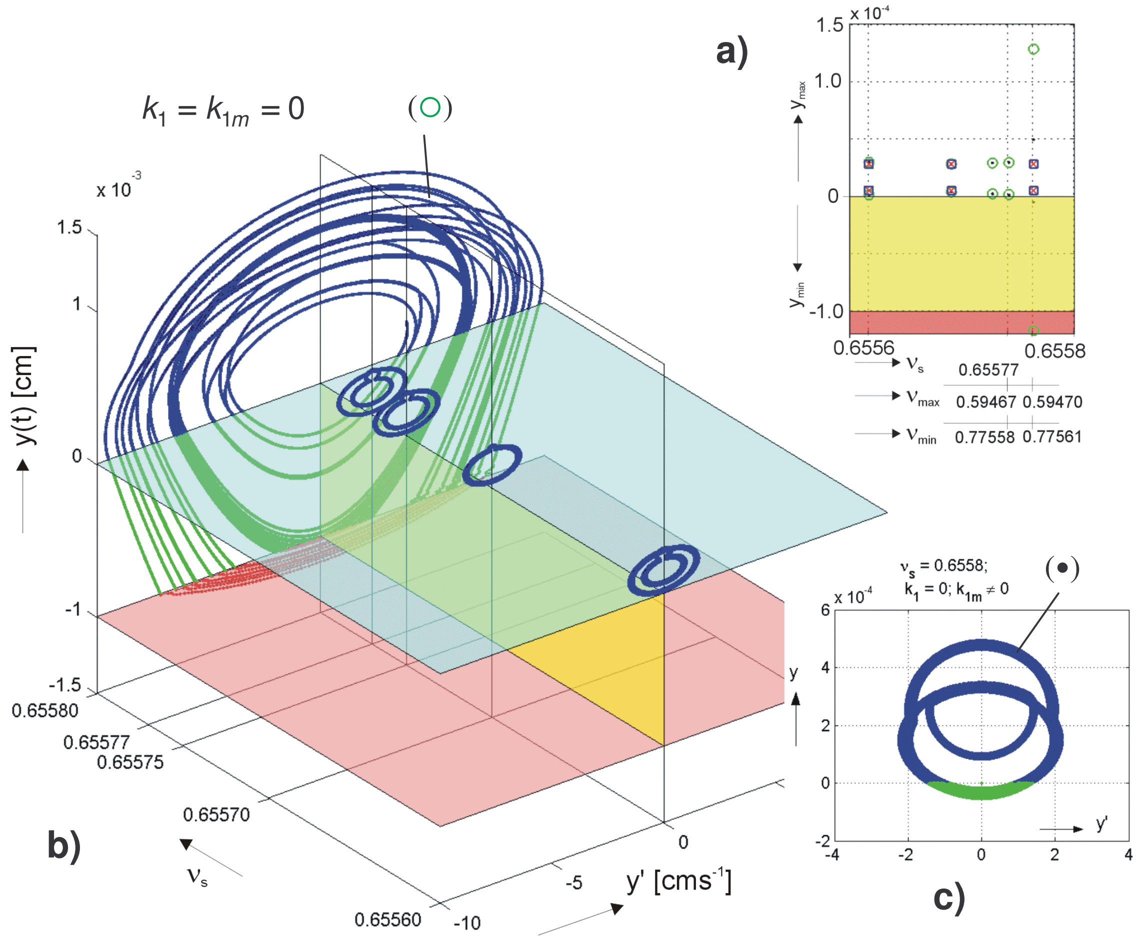
Pro porovnání, je pro všechna vyobrazení lišící se charakterem tlumení společná rezonanční charakteristika konzervativní homogenní soustavy v záběru ozubení pro $k = k_m = 0$. Průběh je znázorněn posloupností zelených kroužků, viz varianta (a) v Tab.1 [3].

Na všech třech vyobrazeních obr.2 jsou na průbězích pro stejné rozsahy frekvenčního ladění ν_s patrná v okolí $\nu_s \approx 0{,}66$ a $\nu_s \approx 0{,}80$ bifurkační místa ostrých skokových nespojitostí. Příčiny jejich vzniku, jejich kvality a kvantity si v dalším ukážeme na několika detailních obrázcích a z důvodu omezeného rozsahu příspěvku zde pouze pro variantu lineárního tlumení, viz obr.2a.

Přesná lokální rezonanční bifurkační místa naladění nespojitostí, kdy k amplitudovým skokům buď ještě nedochází nebo již došlo, jsou znázorněna na detailních obrázcích pro konzervativní (○) a lineárně tlumený, tj. nekonzervativní (□,×,•) systém na obr.3.

Obr.3a představuje detail průběhů rezonančních charakteristik v úzkém frekvenčním pásmu rozsahu $\nu_s \in \langle 0.6556; 0.6558 \rangle$. Zpočátku spojitý charakter průběhů téměř shodných rezonančních variant se mění od $\nu_s = 0.65577$ v prudce, téměř skokově rostoucí průběh, který od $\nu_s \approx 0.6558$ přechází s rostoucím ν_s nejdříve v klesající a dále pak v pozvolně rostoucí rezonanční charakteristiku, viz obr.2a. Tato nespojitost se týká pouze varianty ryze konzervativního systému, který je označen zelenými kroužky (○) a rovněž varianty konzervativního systému ve fázi normálního záběru a nekonzervativního systému ve fázi odskoku zubových profilů. Tato varianta je v obrázku vyznačena černými tečkami (•). Varianty ○ a • se ztotožňují, pokud záběr probíhá v normální oblasti, tj. pro $y(t) \geq 0$.

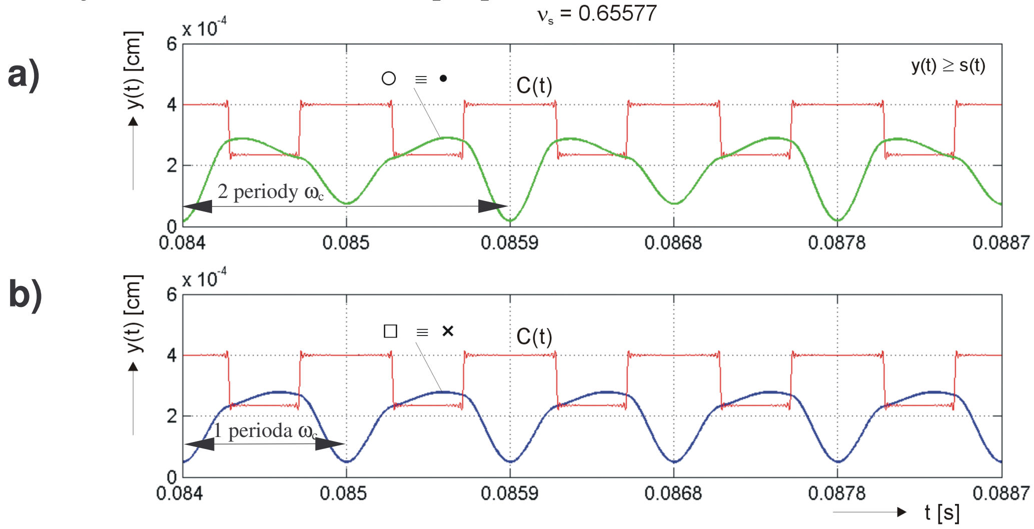
Zatímco průběhy □ a × probíhají v tomto frekvenčním rozsahu spojitě dále a jsou shodné, průběhy ○ a • vykazují rozdílné kvalitativní a kvantitativní skokové průběhy. V okamžiku odlehnutí v záběru se nacházejících boků zubů je $y(t) < 0$. Tento jev nastane, jsou-li dynamické deformace v záběru ozubení větší než staticko-elastické od předpětí. To nastává v okamžiku rezonančního naladění $\nu_s = 0.6558$, jak je patrné z fázových průběhů na obr.3b a 3c. Obr. 3b představuje průběhy (○) prostorových fázových rovin $(y'(t); y(t))$ ve frekvenčním rozpětí $\nu_s \in \langle 0.6556; 0.6558 \rangle$ pro konzervativní soustavu, obr.3c pak fázovou rovinu průběhu (•) pro $\nu_s = 0.6558$. V obou případech dochází jak pro průběhy (○), tak i (•) pro tuto frekvenci $\nu_s = 0.6558$ k odlehnutí boků zubů, což je vyznačeno oblastí se zelenou barvou průběhu, v obr.3b dochází až k záběru inverznímu - červená oblast. Modré průběhy fázových rovin s $y(t) \geq 0$ představují oblast normálního záběru ozubení.



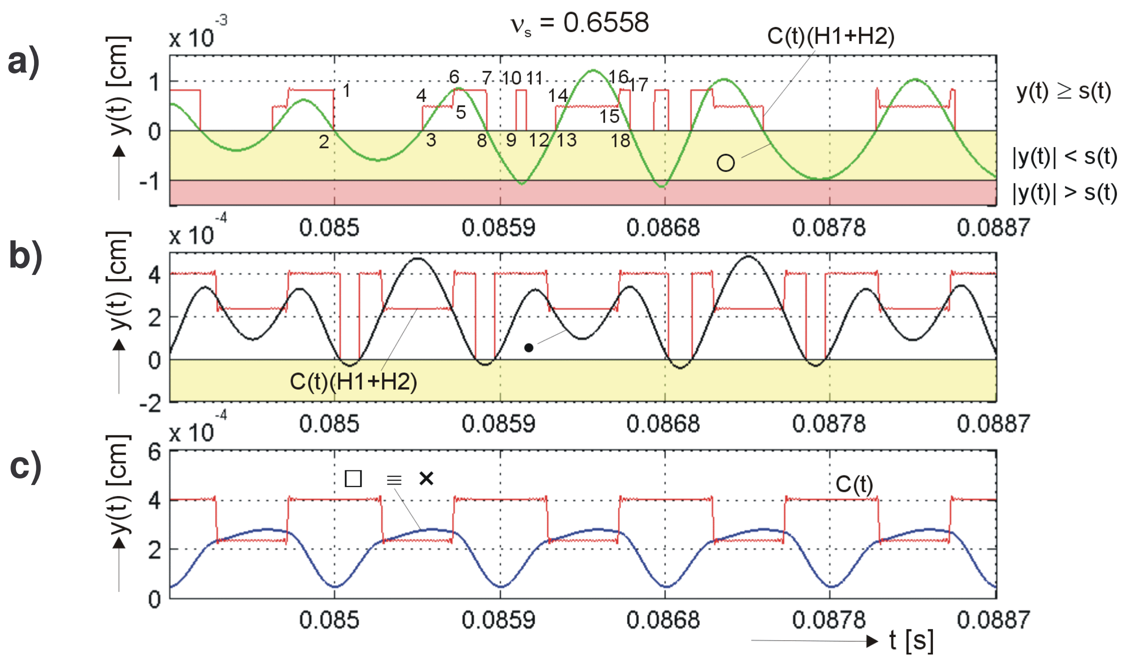
Obr. 3 - Detail rezonančních – bifurkačních charakteristik pro $\nu_s \in \langle 0.6556; 0.6558 \rangle$ z obr.2a pro konzervativní (○) a lineárně tlumenou soustavu (□, ×, •) v záběru ozubení.

Podívejme se nyní ještě na časové průběhy budících tuhostních funkcí zubů v záběru *C(t)* a relativních pohybů, tj. deformaci zubů v záběru, pro naladění $\nu_s = 0.65577$ těsně před bifurkačním skokem relativního pohybu *y(t)* a po amplitudovém skoku *y(t)* při naladění $\nu_s = 0.6558$, a to pro různé varianty lineárního tlumení, viz obr.4 a obr.5. Jedná se o pět period průběhů páté otáčky soukolí.

Protože se v obr.4 při frekvenčním naladění $\nu_s = 0.65577$ jedná o průběhy relativního pohybu a variant tlumení (○,□,×,•) při normálním záběru ozubení, tj. $y(t) \geq 0$, má parametrická budící funkce *C(t)* ryze periodický charakter. Průběhy *y(t)* variant lineárního tlumení (○,•) mají však periodu dvojnásobnou záběrové frekvence ω_c budící funkce *C(t)* (viz obr.4a), kdežto průběhy *y(t)* s variantním tlumením (□,×) periodu shodnou s ω_c funkce *C(t)*, viz obr.4b. Tento jev je při normálním záběru závislý na tlumících vlastnostech materiálu, jak bude ukázáno v závěru příspěvku.



Obr. 4 – Časové průběhy *C(t)* a *y(t)* a) variant (○,•), b) (□,×) lineárního tlumení, viz Tab.1 [3] pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.65577$ a normální záběr ozubení.



Obr. 5 - Časové průběhy tuhostních *C(t)* a modifikovaných tuhostních funkcí *C(t)(H1+H2)*, *H* … Heavisideova funkce variant tlumení (○,□,×,•), viz Tab.1 [3] pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.6558$ při normálním záběru a ve fázi odskoku s inverzním záběrem.

Na obr.5 jsou ukázky stejných časových úseků průběhů s variantním tlumením (○,• a □ ≡ ×) pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.6558$, tedy v okamžiku bifurkačního skoku. Zde dochází v páté otáčce pro variantu (○,•) k rázovým jevům s odlehnutím boků zubů v záběru a v případě varianty (○) k rázovým jevům až s inverzním záběrem, viz obr. 5a. V případě varianty tlumení (•) pouze k odlehnutí zubových boků, viz obr.5b, kdežto v případě obr.5c dochází pro průběhy (□ ≡ ×) jen k normálním záběrům.

Pro varianty tlumení v obr.5a a 5b přechází v okamžiku odlehnutí – odskoku v záběru se nacházejících boků zubů přísně periodická dvoutuhostní parametrická funkce *C(t)* výsledné tuhosti zubů v záběru v aperiodickou modifikovanou funkci *C(t)(H1+H2)* (*H* … Heavisideova funkce) se třemi tuhostními hladinami C_{max}, C_{min} a $C = 0$. Po opětovném styku boků zubů a při normálním záběru ozubení přejde funkce *C(t)(H1+H2)* opět ve tvar dvoutuhostní parametrické přísně periodické funkce *C(t).* Tentýž přechod nastává i v okamžiku inverzního záběru. Vlivem fázových posuvů amplitudy *y(t)* vůči *C(t)(H1+H2)* dochází např. v úseku 14 – 15 funkce *C(t)(H1+H2)* při rezonančním naladění $\nu_s = 0.6558$, tj. $\nu_{min} \to 0.7756$, varianty (○) k velkému amplitudovému vývoji relativního pohybu *y(t)*, který přesahuje řádově předchozí naladění v okolí $\nu_s = 0.65577$.

Analyzujme v dalším stručně druhý případ bifurkačního skoku v rezonanční charakteristice lineárního tlumení v okolí $\nu_s \approx 0.8$, jak je naznačeno v obr.2a. Tomuto střednímu frekvenčnímu naladění $\nu_s = 0.8$ odpovídá v maximální tuhostní hladině naladění $\nu_{max} = 0.7255$, v minimální tuhostní hladině pak $\nu_{min} = 0.9462$, která je blíže k rezonanci $\nu \to 1$. Detailní rozbor podmínek rozvoje amplitud relativního pohybu *y(t)* pro jednotlivé varianty tlumení z Tab.1 [3] před a po skoku je patrný z obr.6.

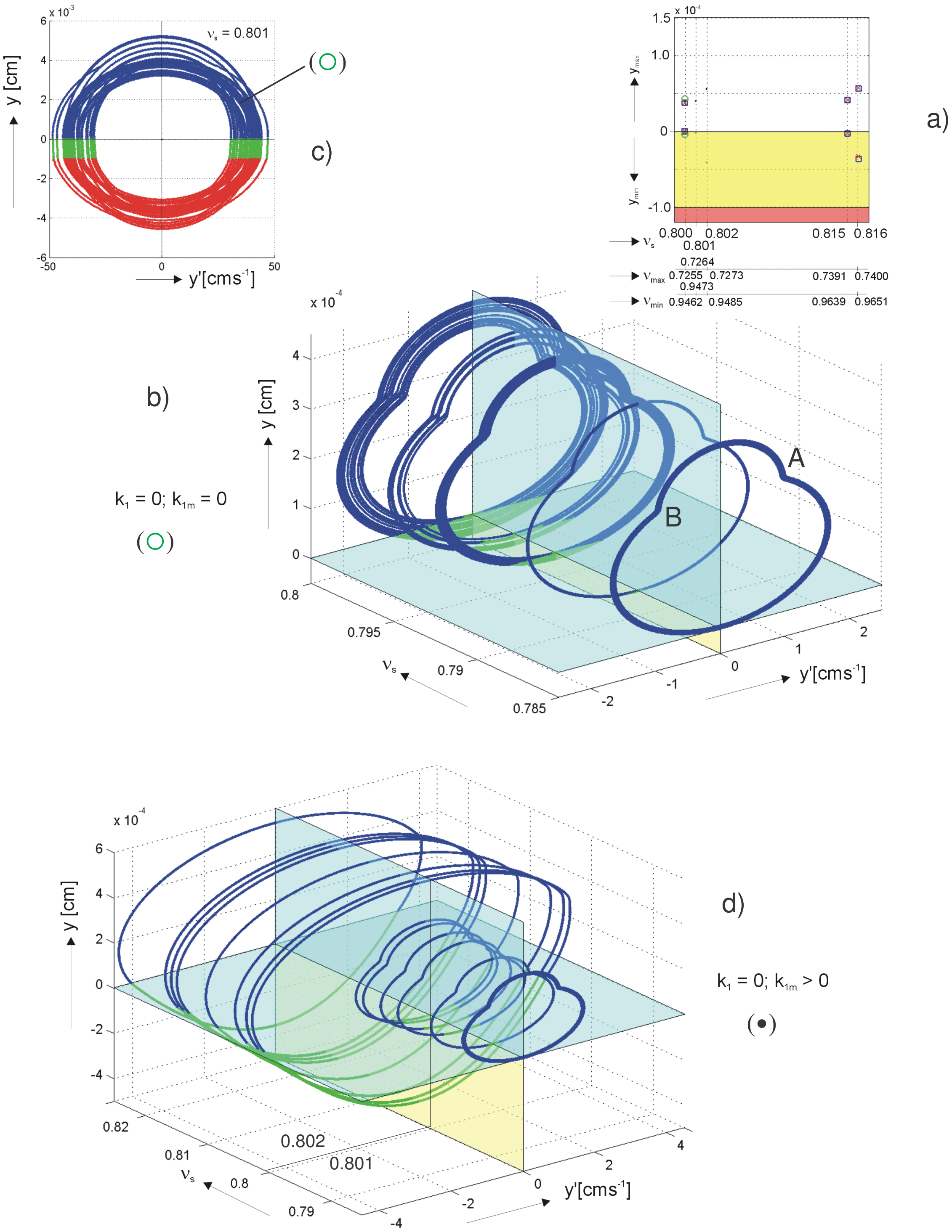
Frekvenční oblasti, ve kterých k amplitudovým skokům pro jednotlivé varianty tlumení dochází, jsou vidět na obr.6a. Diagram prostorových fázových rovin $\{y'(t); y(t); \nu_s\}$ v okolí před $\nu_s = 0.8$ pro variantní tlumení (○) je vidět na obr.6b, kde body nespojitosti A,B značí místa přeskoků z jednotlivých tuhostních hladin na druhé funkce *C(t)* resp. *C(t)(H1+H2)*, viz např. obr.7. Oblasti naladění ν_s, ve kterých dochází k odskokům boků zubů jsou vyznačeny průběhy zelenou barvou. Pro $\nu_s = 0.801$ dochází k amplitudovému skoku, který je patrný i s jednotlivými fázemi záběru zubů na obr.6c. Jednotlivé fáze záběru jsou zde vyznačeny barvou modrou (normální záběr), zelenou (odskok boků zubů) a červenou (inverzní záběr).

Obr. 6d představuje prostorový útvar fázových rovin $\{y'(t); y(t); \nu_s\}$ pro frekvenční rozsah $\nu_s \in \langle 0.785; 0.825 \rangle$ nekonzervativní soustavy varianty tlumení (•) s vývojem fázové roviny před a po frekvenčním amplitudovém bifurkačním skoku.

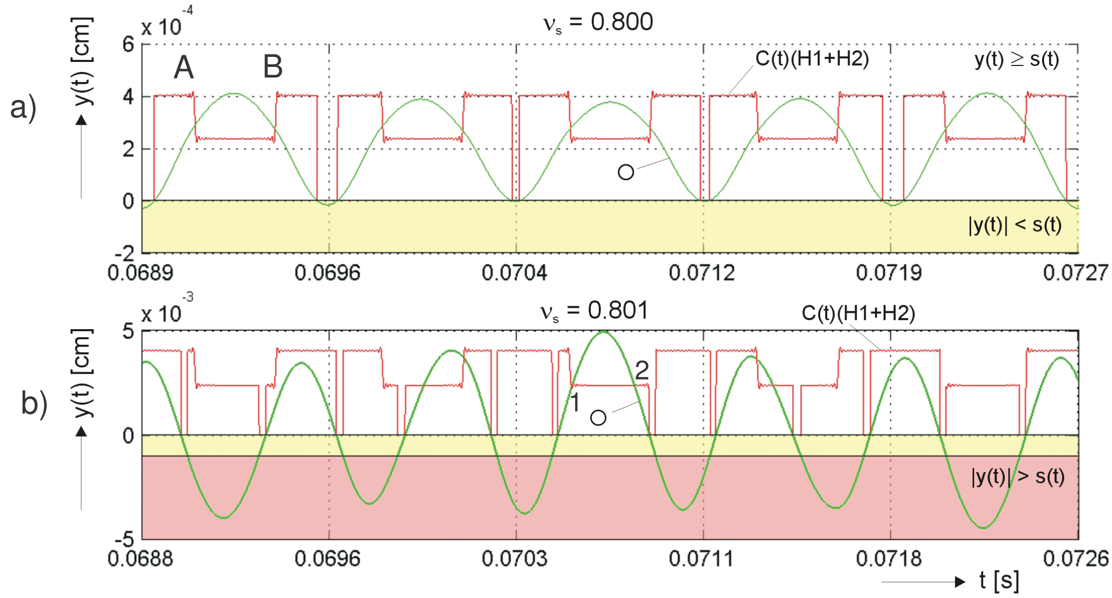
Na obr.7 a 8 jsou pak patrny kvaziperiodické stavy časových průběhů *y(t)* pro příslušné frekvenční naladění vždy – ad a) před a ad b) po bifurkačním skoku. Vzhledem k fázi frekvenčního naladění jsou všechny tuhostní modifikované funkce *C(t)(H1+H2)* v kvaziperiodických či aperiodických tvarech.

Porovnáme-li frekvenční sled amplitudových bifurkačních skoků lineárních variant tlumení, viz obr.6a, vidíme, že pořadí skoků jednotlivých variant (○,•,□,×) je funkcí tlumení.

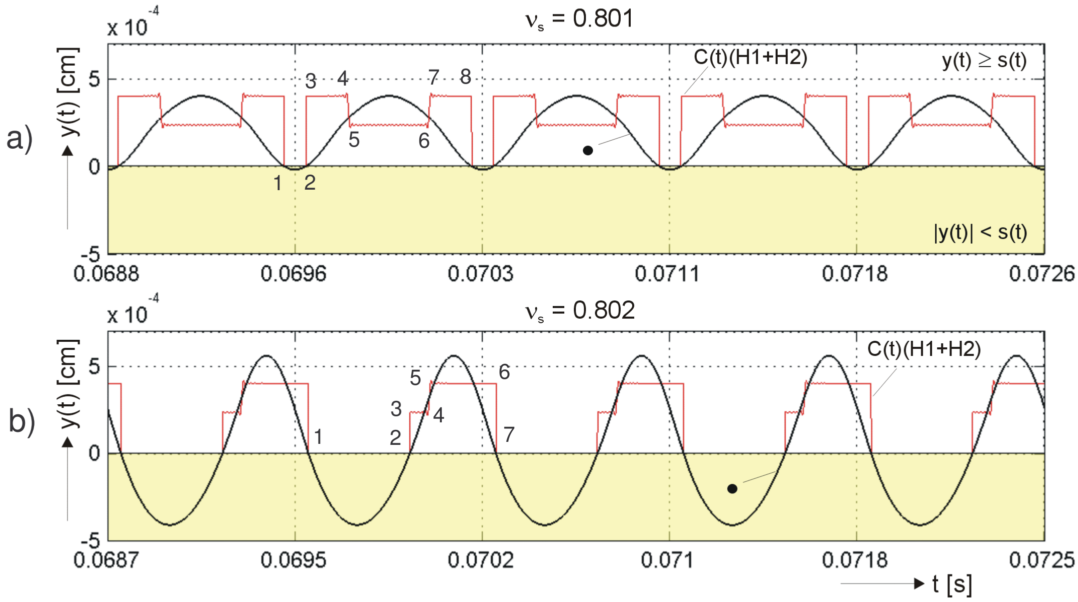
V obr.7 jsou časové průběhy *y(t)* konzervativní soustavy, kde skok nastává v okolí naladění $\nu_s \approx 0.801$ a vývoj maximální amplitudy *y(t)* (○) nastává v úseku $\overline{12}$ na minimální tuhostní hladině C_{min} modifikované tuhosti *C(t)(H1+H2)* s naladěním $\nu_{min} = 0.9473$ (obr.7b), tj. v blízkosti rezonance $\nu_{min} \to 1$.



Obr.6 – Detail rezonančních bifurkačních charakteristik v rozmezí $\nu_s \in \langle 0.800;0.816 \rangle$ z obr.2a a fázové roviny $\{y'(t); y(t); \nu_s\}$ pro konzervativní (○) a varianty lineárně tlumené soustavy (•) v záběru ozubení.

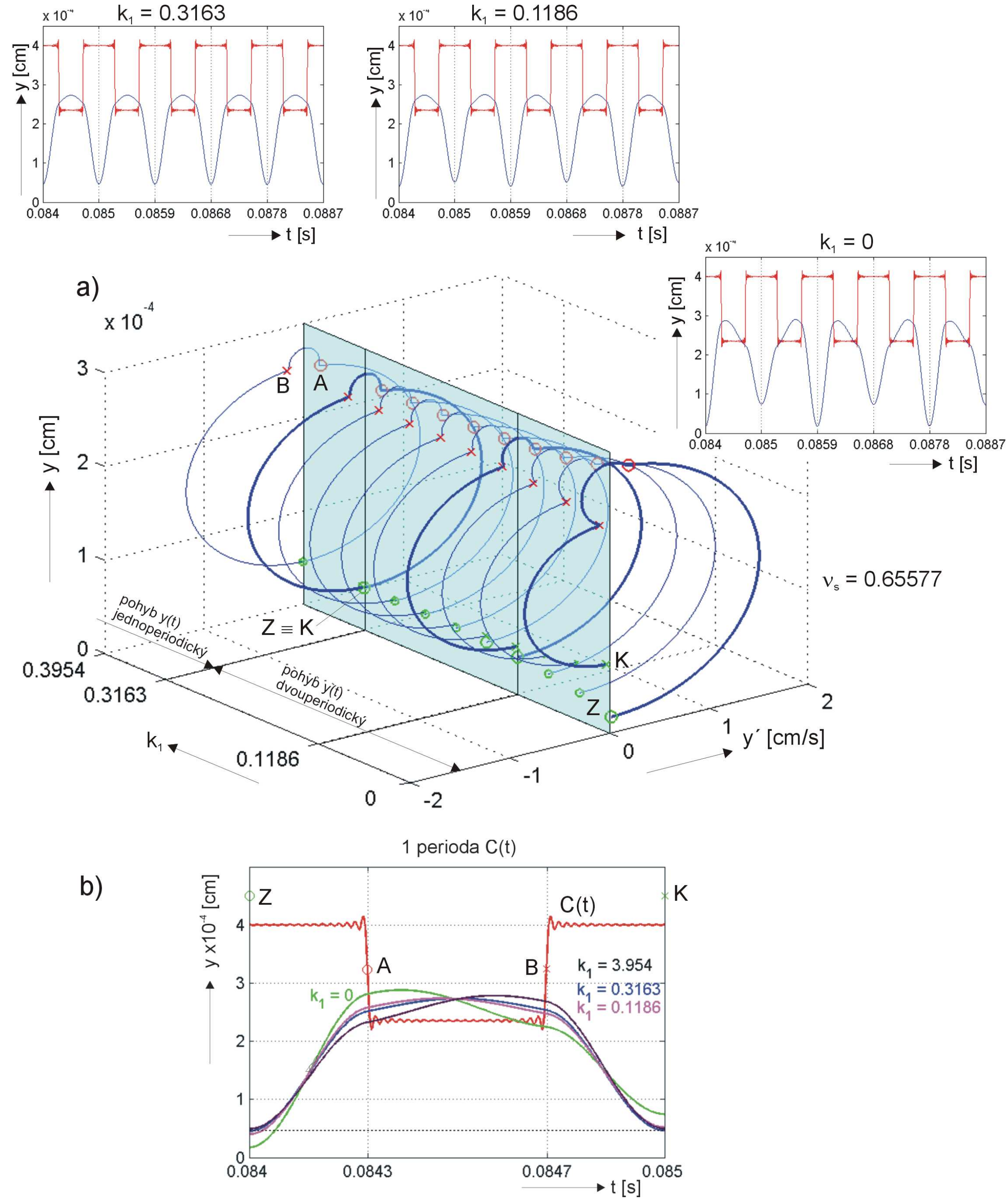


Obr.7 – Časové průběhy modifikovaných tuhostí *C(t)(H1+H2)* ozubení a relativního pohybu *y(t)* (○) zubů v záběru ad a) před, ad b) po amplitudovém skoku pro $\nu_s = 0.800$ a $\nu_s = 0.801$ konzervativní soustavy.



Obr.8 - Časové průběhy modifikovaných tuhostí *C(t)(H1+H2)* ozubení a relativního pohybu *y(t)* (•) zubů v záběru ad a) před, ad b) po amplitudovém skoku pro $\nu_s = 0.801$ a $\nu_s = 0.802$ nekonzervativní soustavy ve fázi odskoku boků zubů.

Podobně nastává skok a maximální amplitudový vývoj *y(t)* u modifikace varianty tlumení (•), avšak pro naladění $\nu_s = 0.802$, obr.8b. Zde je velikost amplitudy ovlivněna tlumením k_{1m} v mezeře při odskoku v záběru se nacházejících zubových boků. Tvar průběhu modifikované funkce *C(t)(H1+H2)* ozubení je v obr.8a a 8b pro dané naladění a variantu tlumení (•) vyznačen arabskými číslicemi. Amplitudové skoky relativních pohybů *y(t)* u lineárních variant tlumení (□,×) nastávají v důsledku tlumících vlastností jak materiálu, tak i mazacích médií až v okolí $\nu_s \approx 0.816$, viz obr.6a.



Obr.9 – Závislost průběhů fázových prostorových rovin $\{y'(t); y(t); k_1\}$, časové průběhy relativních pohybů *y(t)* (obr. a)) a výsledných tuhostních funkcí zubů v záběru *C(t)* (obr.b)) při daném frekvenčním naladění $\nu_s = 0.65577$ pro sledování jedno- a dvouperiodických závislostí *y(t)* vzhledem k *C(t)* při normálním záběru ($y(t) \ge 0$). A,B představují místa přeskoků z jedné tuhostní hladiny funkce *C(t)* na druhou, Z,K začátek a konec průběhů ve fázové rovině odpovídající průběhu periody *C(t)*.

Na závěr této studie se podívejme ve stručnosti na jev periodičnosti průběhů relativního pohybu *y(t)* např. z obr.4a, b. Zde pro frekvenční naladění $\nu_s = 0.65577$ a variantní lineární tlumení (viz Tab.1 [3]) (○,•) a (□,×) nabývá relativní pohyb *y(t)* periodicitu v prvém případě za dvě periody výsledné tuhosti ozubení v záběru *C(t)*, v druhém případě pak za jednu periodu a to v oblasti normálního záběru. Pro normální záběr představuje průběh *y(t)* v obr.4a řešení konzervativního systému, průběh *y(t)* z obr.4b řešení systému nekonzervativního.

Jak je dále z průběhů fázových prostorových rovin $\{y'(t); y(t); k_1\}$ (obr.9a) pro dané frekvenční naladění $\nu_s = 0.65577$ a pátou otáčku ozubených kol patrné, zachovává průběh *y(t)* po překročení mezní hodnoty tlumení, tj. $k_1 > k_{1mez} = 0.3163$ varianty tlumení (□,×) při normálním záběru periodicitu odpovídající funkci *C(t)*.

Pro konzervativní systém, tj. při variantě lineárního tlumení (○,•) při normálním záběru, je periodicita *y(t)* po dvou periodách funkce *C(t)*. V obr. 9a je to průběh pro $k_1 = 0$ s nespojitostmi Z,K po jedné periodě *C(t)*. Po dvou periodách se body nespojitostí v průběhu fázové roviny ztotožní. Tento děj se pro dané naladění opakuje v intervalu $k_1 \in \langle 0; 0.3163\,)$.

Při dosažení periodického stavu průběhu *y(t)* s jednou periodou *C(t)*, tj. při $Z \equiv K$ tvoří rovina $(k_1; y(t))$ pro $y'(t) = 0$ - v obr.9a vyznačena modrou barvou – v úseku bodů A,B rovinu symetrie fázových průběhů *y(t)* . Tyto body A,B se při tlumení k_1 nerovném meznímu tlumení, tj. $k_1 \neq k_{1mez} = 0.3163$, vůči této rovině $(k_1; y(t))$ pro $y'(t) = 0$, jak je patrné z obrázku, stáčejí.

Kvalitativní vlastnosti vlivu tlumení na tvar a průběh relativního pohybu *y(t)* jsou patrny z obr.9b.

3. Závěr

V tomto příspěvku byl uskutečněn první pokus o stanovení jistých zákonitostí vlivu lineárního materiálového a viskózního tlumení v mezeře ozubení. Na tyto dílčí závěry bude navazovat výzkum variant kvadratického a kubického tlumení či jejich kombinací a snaha přiblížit se tak spolu s experimentálním výzkumem co nejvíce k dosud neznámé skutečnosti.

4. Poděkování

Příspěvek byl vypracován za podpory výzkumného záměru č. AVOZ20760514 a za podpory grantového projektu reg.č. 101/07/0884 Grantové agentury ČR.

5. Literatura

[1] Hortel, M., Škuderová, A.: K některým dynamickým vlastnostem parametrických – heteronomních soustav s vnitřními kinematickými vazbami a větveným tokem výkonu. In Sborník *Colloquium Dynamics of Machines 2007*, ÚT AV ČR, v.v.i., ISBN – 978-80-87012 –03-01, pp. 85-94.

[2] Hortel, M., Škuderová, A.: K lineárnímu a nelineárnímu tlumení v záběru ozubení v jedné větvi pseudoplanetové převodové soustavy. In Sborník *Opotřebení, spolehlivost, diagnostika 2006*, Univerzita obrany Brno. ISBN 80-7231-165-4, pp. 93-104.

[3] Hortel, M., Škuderová, A.: K vlivu tlumení na rázové jevy v záběru ozubení. In Proceedings 22nd conference with international participation *Computational mechanics 2006*, Volume 1, ISBN 80-7043-477-5, pp.179-186.

[4] Hortel, M., Škuderová, A.:Vliv tlumících vlastností v záběru ozubení na dynamiku nelineárních parametrických soustav s rázy. In proceedings of *Dynamics of Machines 2006 : national colloquium with international participation,* Praha, ISBN 80-85918-97-8, s. 31-40.

[5] Hortel, M., Škuderová, A.:Vliv lineárního a nelineárního tlumení na stabilitu pohybu záběru kinematických dvojic s ozubenými koly. In Sborník *Engineering Mechanics 2006 national conference with international participation,* Praha , 2006, ISBN 80-86246-27-2, s. 104-105.

[6] Hortel, M.: Dynamika nelineární soustavy s kinematickými vazbami N AV ČR Praha, v tisku.

[7] Škuderová, A.: K analýze vnitřní dynamiky silně nelineární parametrické soustavy s kinematickými vazbami. Doktorská dizertační práce, ÚMT FSI VUT Brno, 2003.

[8] Hortel, M.: Integrodifferentialgleichung in der Analyse von Phänomenen in nichtlinearen parametererregten Systemen. In: *Recent Advances in Mechanics of Solids and Fluids. Bd. 1-3*, Technische Universität Wien, 28.November 1997.