



VERIFICATION OF NUMERICAL DISPERSION ANALYSIS BY A TWO CYLINDERS IMPACT PROBLEM

D. Gabriel*, J. Plešek*, R. Kolman*, F. Valeš*, M. Okrouhlík* a M. Šraml†

Summary: *The numerical dispersion of two-dimensional finite elements was studied. The outcome of this dispersion study was verified by the numerical and analytical solutions to the longitudinal impact of two cylindrical bars. In accordance with the results of the dispersion analysis it was proved that the quadratic elements showed better accuracy than the linear ones.*

1. Úvod

Numerické řešení transientní úlohy metodou konečných prvků je ovlivněno zvolenou prostorovou a časovou diskretizací. Ta má za následek poškození numerického řešení dispersní chybou, která se projevuje závislostí fázové a grupové rychlosti na vlnové délce postupující harmonické vlny, rozptylem směru šíření vln či exponenciálním útlumem vysokofrekvenčních složek vln. Ačkoliv mnoho prací bylo publikováno na toto téma, dosud malá pozornost byla věnována kvadratickým prvkům. Dispersní analýza 1D kvadratických prvků byla poprvé provedena v práci [1]. Dispersní vlastnosti Helmholtzovy skalární vlnové rovnice pro 20-uzlové prvky byly analyzovány v [2]. Nicméně úplná dispersní analýza standardní úlohy mechaniky nebyla dosud realizována.

Tato práce navazuje na rozsáhlou studii dispersních vlastností rovinných lineárních a kvadratických prvků v elastodynamice, jejíž dílčí výsledky byly prezentovány na konferencích [3, 4, 5, 6, 7]. V tomto příspěvku jsme se zaměřili na ověření navržené dispersní teorie na úloze rázu dvou elastických válců, pro kterou je k dispozici také analytické řešení [8].

V kapitole 2 jsou shrnuty základní rovnice elastodynamiky včetně jejich vlnových řešení. V kapitole 3 je stručně naznačen postup při stanovení dispersních diagramů rovinných prvků, který je detailně popsán v práci [5]. V kapitole 4 jsou uvedeny návrhové vztahy pro odhad velikost prvku sítě zajišťující přenesení maximální frekvence buzení s dovolenou disperzní chybou. V závěrečné kapitole 5 jsou diskutovány výsledky testovací úlohy rázu dvou elastických válců včetně analytického řešení.

*Ing. Dušan Gabriel, Ph.D., Ing. Jiří Plešek, CSc., Ing. Radek Kolman, Ing. František Valeš, CSc., Doc. Ing. Miloslav Okrouhlík, CSc.: Ústav termomechaniky AV ČR; Dolejškova 5; 182 00 Praha 8; tel.: +420 266 052 026; fax: +420 285 584 695; e-mail: gabriel@it.cas.cz

†Doc. Matjaž Šraml, Ph.D.: Stavební fakulta, Univerzita v Mariboru, Smetanova 17, 2000 Maribor; tel.: +386 2 220 7722; fax: +386 2 220 7994; e-mail: sraml.matjaz@uni-mb.si

2. Rovinná elastická vlna

Pohybovou rovnici lineární elastodynamiky vyjádříme v indexovém zápisu

$$(\Lambda + G)u_{j,ji} + Gu_{i,jj} = \rho\ddot{u}_i \quad (1)$$

kde Λ a G jsou Lamého konstanty, ρ je hustota, u_i a $\ddot{u}_i$ je i -tá složka vektoru posunutí, respektive vektoru zrychlení. Lamého konstanty Λ a G je možné vyjádřit pomocí inženýrských konstant E a ν ve tvaru

$$\Lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo.

Z pohybové rovnice (1) pro neomezené rovinné elastické prostředí lze odvodit dva typy rovinných vln: podélnou vlnu a dvě příčné vlny. Podélná vlna se šíří rychlostí

$$c_l = \sqrt{\frac{\Lambda + 2G}{\rho}} \quad (3)$$

Rychlost obou příčných vln je dána vztahem

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4)$$

Řešení rovnice (1) předpokládejme ve tvaru rovinné harmonické vlny

$$u_i = U_i(\mathbf{x}) \exp(ik(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \pm ct)) \quad (5)$$

nebo

$$u_i = U_i(\mathbf{x}) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \pm \omega t)) \quad (6)$$

kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka, $\mathbf{x}$ je polohový vektor, t je čas, k je vlnové číslo, $\mathbf{p}$ je jednotková normála kolmá k čele vlny, $\mathbf{k} = k\mathbf{p}$ je vlnový vektor, c je fázová rychlost, ω je úhlová rychlost a U_i je i -tá složka vektoru amplitud v bodě definovaném polohovým vektorem $\mathbf{x}$. Pro danou vlnovou délku λ je vlnové číslo dáno vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7)$$

Fázovou rychlost c vyjádříme pomocí ω a k jako

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (8)$$

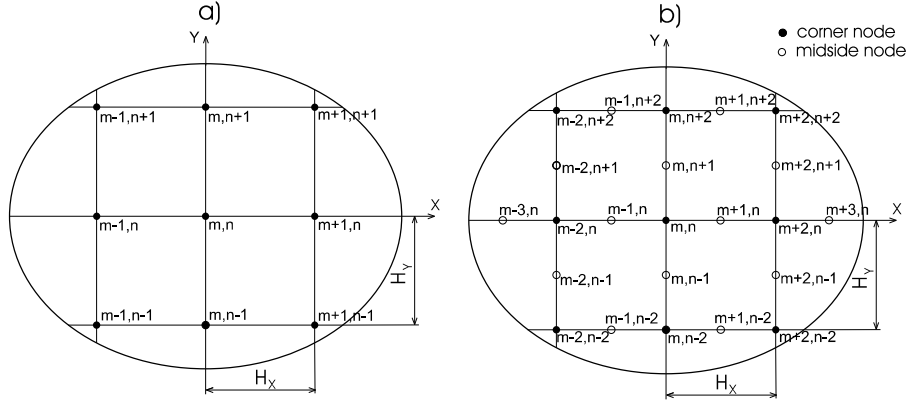
Grupová rychlost c_g je definovaná vztahem

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (9)$$

V nedispersním prostředí je rychlost šíření vlny c konstantní a nezávisí na vlnové délce λ a protože platí $\omega = ck$ dostáváme $c_g = c$. Čili grupová rychlost c_g je shodná s fázovou rychlostí c pro elastické kontinuum.

3. Numerická dispersní analýza

Pro dispersní analýzu byly použity rovinné sítě lineárních a kvadratických konečných prvků. Vzhledem k jejich pravidelnosti a homogennosti bylo postačující dále uvažovat pouze charakteristickou “záplatu” těchto sítí obsahující 2×2 elementy—viz. obr. 1.



Obrázek 1: Rovinná síť a) lineární prvky b) kvadratické prvky.

Uvažujme počátek souřadného systému v bodě $\{m, n\}$. Pro lineární síť platí

$$x_{m+k} = kH_x, \quad y_{n+l} = lH_y, \quad \text{pro} \quad k, l = -1, 0, 1 \quad (10)$$

a pro kvadratickou síť

$$x_{m+k} = kH_x/2, \quad y_{n+l} = lH_y/2, \quad \text{pro} \quad k, l = -2, -1, 0, 1, 2 \quad (11)$$

kde H_x a H_y označují velikost obdélníkového prvku (obr. 1).

Soustavu diferenciálních rovnic pro uzly uvažované záplaty je možné maticově vyjádřit ve tvaru pro nulovou pravou stranu

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{u}}_c + \mathbf{K}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{0} \quad (12)$$

kde lokální obdélníkové matice hmotnosti $\mathbf{M}_c$ a tuhosti $\mathbf{K}_c$ mají velikost 2×18 respektive 6×42 pro lineární respektive kvadratickou síť.

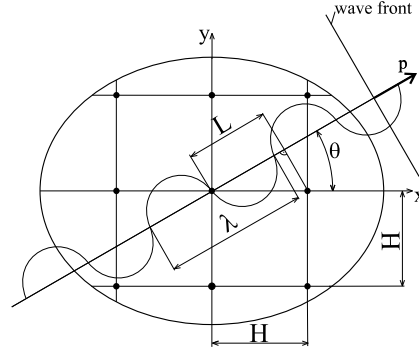
Ke stanovení dispersních vlastností byla použita tzv. Fourierova metoda [9, 10]. Její princip spočívá v předepsání časového průběhu uzlových posuvů odpovídající exaktnímu řešení (5) vybraným tzv. charakteristickým uzlům záplaty sítě (viz. obr. 2), dále řešení pohybových rovnic vyjádřené pro tyto charakteristické uzly a konečně stanovení dispersních křivek např. ve tvaru závislosti fázové rychlosti šíření c na vlnové délce λ . Charakteristickými uzly se rozumí takové uzly, jejichž charakter kmitání je stejný a koeficienty u pohybových rovnic pro tyto uzly jsou shodné. V případě lineární sítě na obr. 1 se jedná o jediný uzel, např. $\{m, n\}$, u kvadratické sítě o tři typy uzlů: rohový $\{m, n\}$ a dva středové uzly $\{m+1, n\}$ a $\{m, n+1\}$. Čili v našem případě jsou předepsané průběhy uzlových posuvů dány výrazy

$$\begin{aligned} u_{mn} &= U_{mn} \exp(ik(p_x x_m + p_y y_n - ct)) \\ v_{mn} &= V_{mn} \exp(ik(p_x x_m + p_y y_n - ct)) \end{aligned} \quad (13)$$

kde U_{mn} a V_{mn} jsou neznámé amplitudy definující tvar deformačních módů. Složky jednotkové normály kolmé k čele vlny je možné vyjádřit jako

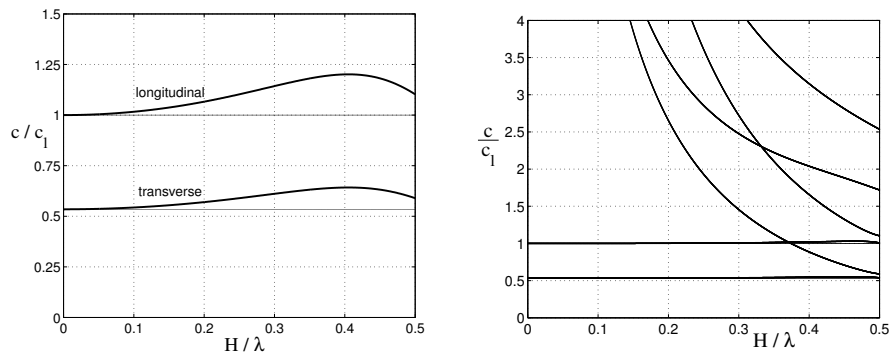
$$p_x = \cos \theta, \quad p_y = \sin \theta \quad (14)$$

kde úhel θ je měřen od kladné osy x , což je schématicky znázorněno na obr. 2.



Obrázek 2: Šíření rovinné harmonické vlny MKP sítě.

Dále byla aplikována standardní dispersní analýza, popsaná např. v pracích [1, 11, 12, 10], která spočívala v dosazení předepsaných průběhů uzlových posuvů (13) do pohybových rovnic (12) vedoucí k řešení zobecněného problému vlastních čísel. Výsledkem bylo určení dispersních závislostí ve tvaru $c = f(k, \theta)$. Poznamenejme, že uvedený postup vede na charakteristickou rovnici, jejíž vlastní čísla jsou uměrná kvadrátu fázových rychlostí. V případě lineární sítě je řád charakteristického polynomu druhého stupně, avšak u kvadratických prvků je řád šestého stupně. Vlastní čísla bylo nutné stanovit numericky, např. Jacobiho metodou [13].



Obrázek 3: Závislost fázové rychlosti na vlnové délce pro lineární (vlevo) a kvadratické (vpravo) prvky pro úhel $\theta = 0^\circ$.

Detailní rozbor dispersního chování lineárních a kvadratických prvků, vliv numerické časové integrace pohybových rovnic, včetně návrhu optimálního diagonalizačního algoritmu pro matice hmotnosti kvadratických elementů je možné najít v pracích [6, 7, 5].

Pro účely tohoto příspěvku je nejdůležitější srovnání dispersních vlastností lineárních a kvadratických prvků, které je zobrazeno na obr. 3 jako závislost normalizované fázové rychlosti c/c_l na normalizované vlnové délce H/λ pro směr šíření vlny $\theta = 0^\circ$, což je nejnepríznivější případ z hlediska disperse. Uvedené dispersní křivky jsou vypočteny pro případ rovinného přetvoření a konsistentní matici hmotnosti.

Je zřejmé, že ve srovnání s lineárními prvky nepozorujeme u kvadratických prvků prakticky žádnou dispersi až do mezní frekvence odpovídající bezrozměrné vlnové délce $H/\lambda = 0.5$. Poznamenejme, že nad touto frekvencí neplatí předpoklad harmonického řešení (13). Dále si všimněme přítomnosti dalších čtyř parazitních řešení ve spektru kvadratických prvků. Nazývají se optickými módy podle Brillouina [14] a jsou výhradně spjatý s diskretními systémy. Čili na rozdíl od akustických módů (tj. podélných a příčných vln) se neobjevují v kontinuu. Důležitou vlastností optických módů je fakt, že nejsou vlastními vektory a tedy neovlivňují numerickou stabilitu řešení.

4. Odhad velikosti prvku sítě

Negativní dispersní vlastnosti metody konečných prvků je možné částečně potlačit vhodnou volbou parametrů numerického modelu jako jsou typ a velikost prvku, velikost integračního kroku. V práci [6] byly stanoveny dispersní křivky pro metodu centrálních diferencí a Newmarkovu metodu. Bylo potvrzeno, že dispersní chování značně závisí na velikosti časového kroku pro obě metody přímé integrace pohybových rovnic. Dá se však ukázat, že vliv numerické integrace je zanedbatelný, pokud pro časový krok Δt definovaný bezrozměrným Courantovým číslem Co platí

$$Co = \frac{c_l \Delta t}{H} < 0.5 \quad (15)$$

V pracech [4, 7] byl pro velikost prvku odvozen empirický vztah

$$H/\lambda < const \quad (16)$$

kde hodnota $const$ je volena v závislosti na daném typu prvku a dovolenou relativní chybu fázové rychlosti podle tab. 1. Z tabulky vyplývá, že pokud pro velikost kvadratického prvku platí $H < \lambda/3$, tj. $const \doteq 0.33$, a pro velikost lineárního prvku $H < \lambda/10$, tj. $const = 0.1$, potom relativní chyba fázové rychlosti je menší než 2%.

Dovolená relativní chyba fázové rychlosti [%]	lineární prvek <i>const</i>	kvadratický prvek <i>const</i>
1	0.075	0.350
2	0.110	0.370
5	0.175	0.385

Tabulka 1: Hodnoty $const$ pro volbu velikosti prvku.

Vlnovou délku λ je možné odhadnout z maximální frekvence budícího účinku ω_{max} , kterou má ještě numerický model přenést s dovolenou dispersní chybou. Odhad (16) dále

upřesníme s využitím vztahů (7), (8) a odvodíme výsledný návrhový vztah pro velikost prvku

$$H < \frac{2\pi c_t \text{const}}{\omega_{max}}, \quad (17)$$

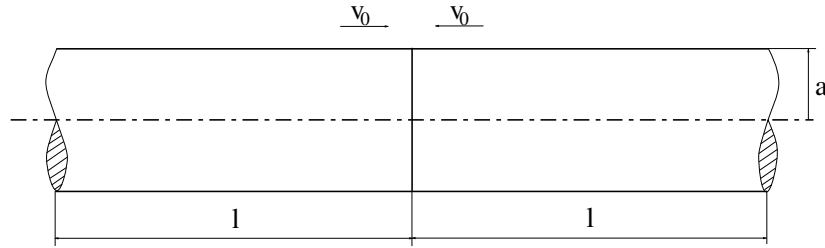
a kontrolní vztah pro maximální frekvenci ω_{max} pro zvolenou velikost prvku H

$$\omega_{max} < \frac{2\pi c_t \text{const}}{H}. \quad (18)$$

Poznamenejme, že pokud obě podmínky (17) a (18) vyhovují pro rychlost příčné vlny c_t , potom jsou automaticky splněny i pro rychlost podélné vlny c_l .

5. Ráz dvou elastických válců

Výsledky dispersní analýzy byly testovány na úloze rázu dvou elastických válců, pro kterou je k dispozici analytické řešení [8]. V čase $t = 0$ s byly válce v kontaktu a byla předepsána počáteční rychlost v_0 . Rozměry válců a materiálové vlastnosti jsou uvedeny na obr. 4.



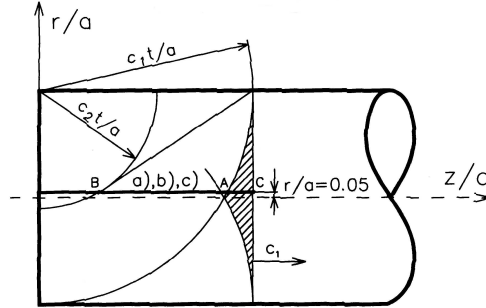
Obrázek 4: Ráz dvou elastických válců. Geometrie: $a = 2.5$ mm, $l = 6.25$ mm. Materiálové vlastnosti: Youngův modul $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, Poissonovo číslo $\nu = 0.3$, hustota $\rho = 7800$ kg/m³. Počáteční podmínka: $v_0 = 1$ m/s.

Analytické řešení [8] využívající Laplaceovu transformaci je značně složité. Složky posuvů a napětí jsou vyjádřeny pomocí nekonečných řad nevlastních integrálů, které jsou dále vyčísleny numericky. Pro ilustraci je na obr. 5 nakresleno teoretické rozložení vlnových čel v čase $c_1 t/a = 2$, kde r, z jsou válcové souřadnice, a je poloměr válce a t je čas.

Primární podélná vlna se šíří rychlostí c_l danou rovnicí (3), tj. $c_1 = c_l$ na obr. 5. Dále jsou na obrázku znázorněna vlnová čela sekundárních podélných a příčných vln, které vznikají odrazem od povrchu válce. Odlehčovací smyková vlna se šíří rychlostí c_t danou rovnicí (4), tj. $c_2 = c_t$. Šrafovaná oblast odpovídá napjatosti vyvolané rázem dvou pružných poloprostorů.

Úloha byla řešena jako osově symetrická, každý válec byl diskretizovaný 100×250 čtyřuzlovými lineárními a 50×125 osmiuzlovými serendipity elementy. Lineární síť byla vytvořena pravidelným rozdělením kvadratické sítě ve středových uzlech. To znamená, že lineární síť má větší počet stupňů volnosti $\text{NDOF} = 50702$ než původní kvadratická

sít $NDOF = 38202$. Pro integraci pohybových rovnic byla použita Newmarkova integrační metoda. K potlačení vlivu numerické integrace byl zvolen časový integrační krok velmi malý $\Delta t = 1.038174 \cdot 10^{-9}$ s, což odpovídá bezrozměrnému Courantovu číslu $Co = 0.25$ pro lineární prvky a $Co = 0.125$ pro kvadratické prvky.



Obrázek 5: Teoretické rozložení vlnových čel v čase $c_1 t/a = 2$ [8].

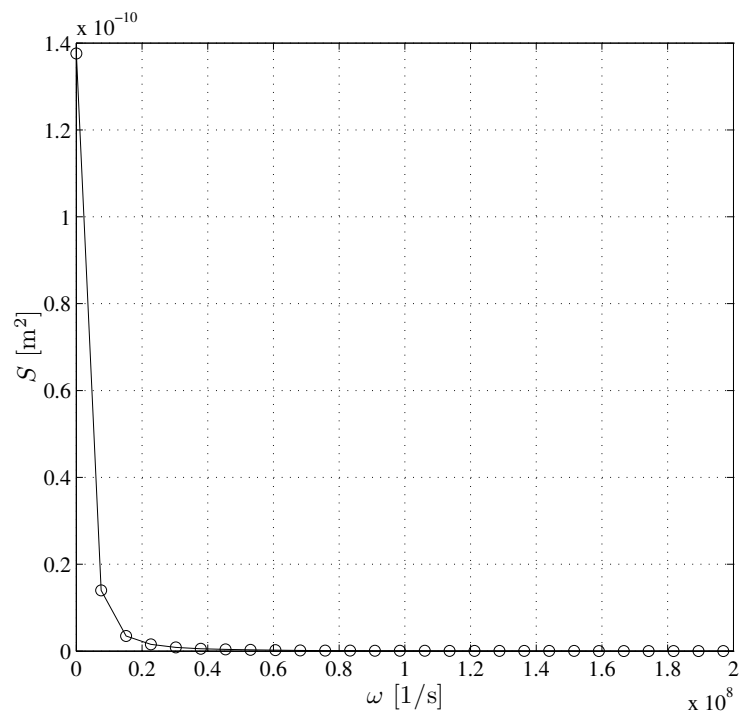
V kapitole 4. byly odvozeny vztahy pro odhad velikosti prvku sítě (17) respektive pro maximální frekvenci buzení (18), kterou má ještě numerický model přenést s dovolenou dispersní chybou. Pokud známe časový průběh budící síly nebo časový průběh kinematického buzení, je možné pomocí rozvoje do Fourierovy řady stanovit spektrum buzení. Vzhledem k tomu, že u testovací úlohy je zatížení realizováno kontaktní podmínkou, nelze přímo stanovit spektrum zatížení. Na testovací úlohu ale můžeme nahlížet takto: sledovaný válec (viz. obr. 5) se pohybuje počáteční rychlostí v_0 , avšak má-li být splněna kontaktní podmínka—zastavení čela válců, je nutné vyvolat posuv čela válce proti směru počáteční rychlosti o hodnotu posuvu $u = v_0 t$, kde t je čas. Samozřejmě, že v průběhu výpočtu se bude rychlost posuvu čela nepatrně měnit, ale pro odhad spektra buzení bude tento předpoklad dostatečný. Kinematické buzení válce je tedy možné vyjádřit lineární závislostí na čase

$$u(t) = v_0 n \Delta t. \quad (19)$$

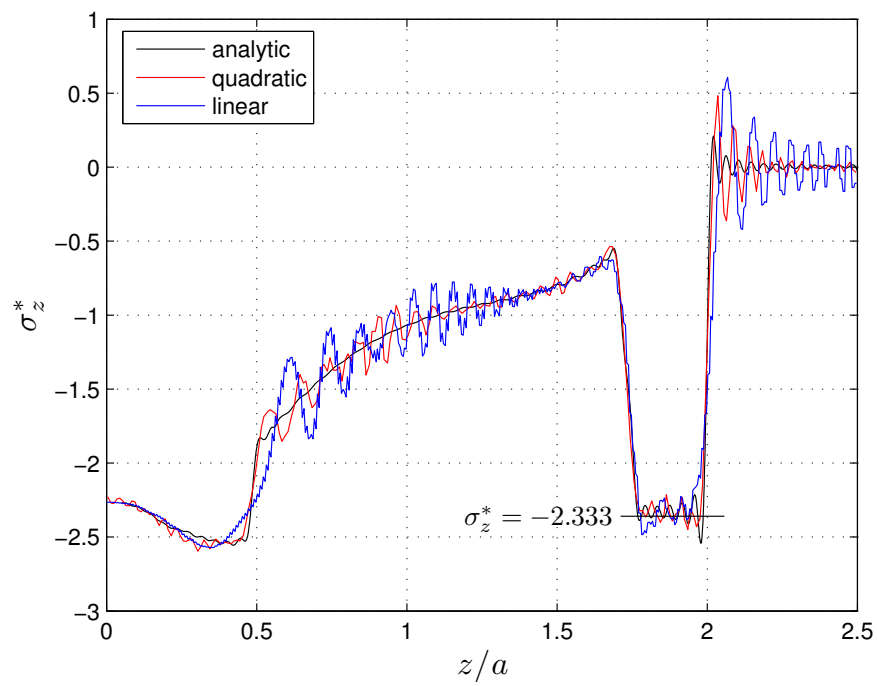
při vzorkování s časovým krokem Δt . Na obr. 6 je zobrazeno rozložení spektrální výkonové hustoty S buzení (19) získané rychlou Fourierovou transformací. Ukazuje se, že pro náhradu funkce (19) je postačující uvažování prvních 10 členů spektra. Tomu odpovídá maximální frekvence buzení $\omega_{max} = 6.817 \cdot 10^7$ [1/s].

Pro zvolenou diskretizaci je možné podle vzorce (18) určit dovolenou hodnotu maximální úhlové frekvence. Pro relativní chybu fázové rychlosti menší než 2% vychází pro lineární prvky $\omega_{max}^{dovolena} = 8.09 \cdot 10^7$ [1/s] a pro kvadratické prvky $\omega_{max}^{dovolena} = 13.48 \cdot 10^7$ [1/s]. Čili v obou případech jsou hodnoty vypočtených úhlových frekvencí vyšší než požadovaná maximální úhlová frekvence buzení ω_{max} . Poznamenejme, že naznačený postup kontroly zvolené diskretizace je oprávněný pouze pro kratší časy řešení, kdy je dominantní zatížení primární podélnou vlnou a ještě nedochází k výrazným odrazům vln od povrchu válce.

Srovnání přesnosti lineárních a kvadratických prvků je patrné z obr. 7, kde je nakreslen průběh normalisovaného osového napětí $\sigma_z^* = \sigma_z c_1 / \Lambda v_0$ podél osy válce z/a v čase $c_1 t/a = 2$ v malé vzdálenosti od osy $r/a = 0.05$ (viz. obr. 5). Dále je na obr. 7 nakresleno analytické řešení.



Obrázek 6: Rozložení spektrální výkonové hustoty kinematického buzení.



Obrázek 7: Rozložení osového napětí pro $c_1 t/a = 2$ a $r/a = 0.05$.

Všimněme si, že průběh osového napětí je výrazně ovlivněn příchody odlehčovacích smykových vln (viz. body A a B). Mezi body A a C by velikost osového napětí měla být konstantní $\sigma_z^* = -2.333$ odpovídající napjatosti vyvolané rázem dvou pružných poloprostorů. V bodě C se napětí skokově mění z hodnoty $\sigma_z^* = -2.333$ na nulu. Poznamenejme, že přesnost analytického řešení je výrazně ovlivněna uvažovaným počtem členů v nekonečných řadách nevlastních integrálů [8]. Odvozené analytické řešení uvažuje prvních 150 členů rozvoje. Nicméně je patrné, že řešení výrazně osciluje v oblasti homogenní napjatosti. Se zvyšujícím se počtem členů řady by se tento efekt měl zmenšovat.

Ačkoliv kvadratická síť má menší počet stupňů volnosti, je evidentní, že kvadratické prvky jsou přesnější než lineární. Kromě toho lineární řešení podstatně více osciluje. Tento jev je zvláště patrný v oblasti před čelem vlny, kdy útlum nežádoucích oscilací je výrazně menší než v případě kvadratických prvků.

Poděkování

Tato práce vznikla za finanční podpory grantových projektů GA ČR 101/07/1471, 101/06/0914, 101/06/0213 a projektu KONTAKT 9-06-1 v rámci výzkumného záměru AV0Z 20760514.

Reference

- [1] Belytschko, T. & Mullen, R. (1978) On dispersive properties of finite element solutions. *Modern Problems in Elastic Wave Propagation* (J. Miklowitz et al. eds), Wiley, New York, pp.67–82.
- [2] Abboud, N.N. & Pinsky, P.M. (1992) Finite element dispersion analysis for the three-dimensional second-order scalar wave equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, pp.1183–1218.
- [3] Plešek, J., Kolman, R. & Okrouhlík, M. (2006) Numerical dispersion of quadratic finite element meshes. *WCCM VII*, CDROM, UCLA.
- [4] Plešek, J., Kolman, R. & Okrouhlík, M. (2006) On the occurrence of spurious optical modes in transient finite element analysis. *Mechanics & Materials in Design*, (J.F.S. Gomes, S.A. Meguid eds). University of Porto, Porto, pp.189–190.
- [5] Plešek, J., Kolman, R., Gabriel, D. & Valeš, F. (2007) Application of dispersion analysis to the finite element solution of wave propagation and impact problems. *COMPDYN 2007*, (M. Papadrakakis et al. eds), ECCOMAS 2007, pp.1-12.
- [6] Kolman, R., Okrouhlík, M. & Plešek, J. (2005) Vliv časové integrace na dispersní chování kvadratických konečných prvků v elastodynamice. *Computational Mechanics 2005*, (J. Vimmer ed), ZČU, Plzeň, pp.315-322.
- [7] Kolman, R., Okrouhlík, M. & Plešek, J. (2006) Numerické testy dispersního chování rovinných kvadratických prvků v elastodynamice. *Výpočty konstrukcí metodou konečných prvků 2006*, (J. Petruška, T. Návrát eds.), VUT Brno, pp.7-16.

- [8] Valeš, F., Morávka, Š., Brepta, R. & Červ, J. (1996) Wave propagation in a thick cylindrical bar due to longitudinal impact. *JSME Int. J., Ser.A* , **39**(1), pp.60–70.
- [9] Vichnevetsky, R. & Bowles, J.B. (1982) *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*. SIAM, Philadelphia.
- [10] Thompson, L.L. & Pinsky, P.M. (1995) A Galerkin least squares finite element method for the two-dimensional Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, pp.371–397.
- [11] Okrouhlík, M. & Höschl, C. (1993) A contribution to the study of dispersive properties of one-dimensional Lagrangian and Hermitian elements. *Computers & Structures*, **49**(5), pp.779–795.
- [12] Mullen, R., & Belytschko, T. (1982) Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two-dimensional wave equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**, pp.11–29.
- [13] Bathe, K.J. (1996) *Finite element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey.
- [14] Brillouin, L. (1946) *Wave propagation in Periodic Structures*. Dover Press, New York.