National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2007
Svratka, Czech Republic, May 14 – 17, 2007

VAULTS AND SHELLS - COMPARISON OF NUMERICAL AND EXACT SOLUTION

P. Beran*, J. Máca*, J. Kott*

Summary: *This contribution deals with the modeling of shells. One of the possible methods how to numerically model a shell is to approximate its curved surface by several plane areas. This method is demonstrated on the numerical models of a cylindrical and conic shell. The results obtained from these models are compared with the solution of these structures by the membrane theory. If the shell is divided into a sufficient number of plane sub-areas, the results obtained by the Finite Element Method are nearly the same as those obtained by the membrane theory. The only exceptions from these results are those places of the shell support where the failures of the membrane state of stress occur.*

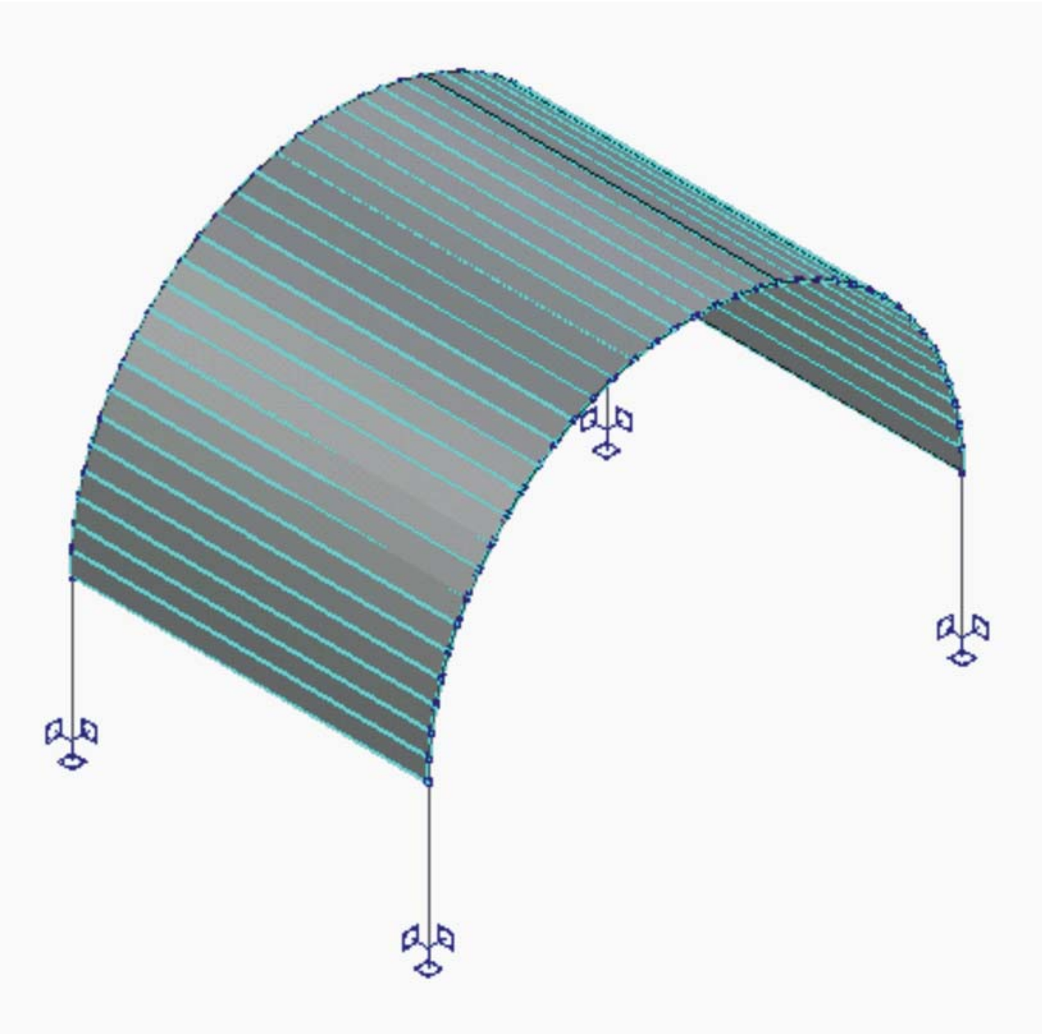
1. Úvod

Pro výpočet stavebních konstrukcí se v inženýrské praxi používají programy, které umožňují vytvoření numerických modelů metodou konečných prvků. (Feat, Nexis, SCIA) Ne všechny z těchto programů umožňují vkládání zakřivených plošných konstrukcí. Jedním z možných řešení je aproximování této plochy (válec, kužel, koule) několika rovinnými oblastmi. Toto řešení přichází v úvahu pouze tehdy pokud program neumožňuje vložení zakřivené plochy. V tomto příspěvku je zpracováno porovnání numerického řešení s membránovým řešením válcové a kuželové skořepiny. Byla porovnávána vždy série modelů, které se od sebe lišily pouze počtem rovinných oblastí, kterými byla aproximována válcová nebo kuželová plocha. Posléze byl zjištěn optimální počet rovinných oblastí na které je nutné uvedené konstrukce rozdělit. Tato informace může být použita pro vytvoření numerických modelů konstrukcí u kterých nelze získat přesné řešení dle membránové teorie. Pro numerickou simulaci byl použit program Feat 2000.

* Ing. Pavel Beran., doc. Ing. Jiří Máca, CSc., Ing. Jiří Kott.: Fakulta stavební, České Vysoké učení technické v Praze; Thákurova 7; 160 27 Praha 6; tel.: +420.22 435 4498, fax: +420.241 072 140; e-mail: pavel.beran@fsv.cvut.cz

2. Parametry numerických modelů

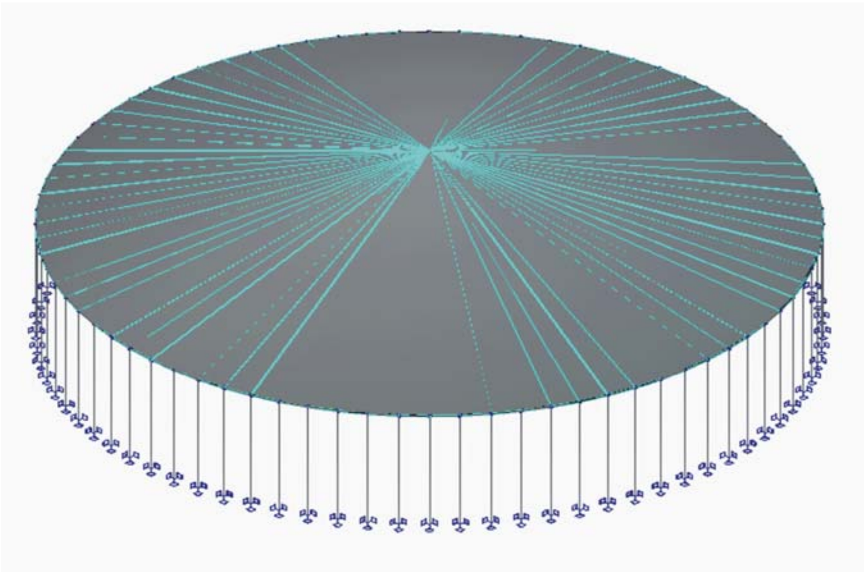
Byly zpracovány dva typy konstrukcí a sice válcová skořepina, která zastřešuje půdorys 10 x 15 m o poloměru válce 7,5 m, Tato válcová skořepina byla aproximována od dvou do čtyřiceti rovinných ploch. Na okrajích půdorysu byla membrána podepřena nosníky, které byly v rozích podepřeny sloupy. Tloušťka skořepiny byla konstantní a sice 0,1 m. Konstrukce byla zatížena vlastní tíhou membrány a podélných okrajových nosníků. Sloupy a příčné nosníky nebyly zatíženy vlastní tíhou, protože při zatížení příčného nosníku docházelo k výrazným poruchám membránové napjatosti.



Obr. 1 Válcová skořepina – Aproximace 40 rovinnými plochami

Další konstrukcí byla kuželová skořepina, která zastřešuje kruhový půdorys o poloměru 25 m, odklon površek pláště kužele od vodorovné roviny je 15°, tloušťka konstrukce je 0,15 m. Membrána byla ukotvena na svém okraji do patního prstence, který byl podepřen sloupy. Skořepina byla zatížena vlastní tíhou, prstenec a sloupy nebyly zatíženy, tvořily pouze podepření membrány. Kuželová plocha byla rozdělena podobně jako válcová plocha na několik rovinnýchh oblastí – 4 až 160.

Materiál použitý ve všech numerických modelech je beton B 30.



Obr. 2 Kuželová skořepina – aproximace 80 rovinnými plochami

3. Řešení skořepin membránovou teorií

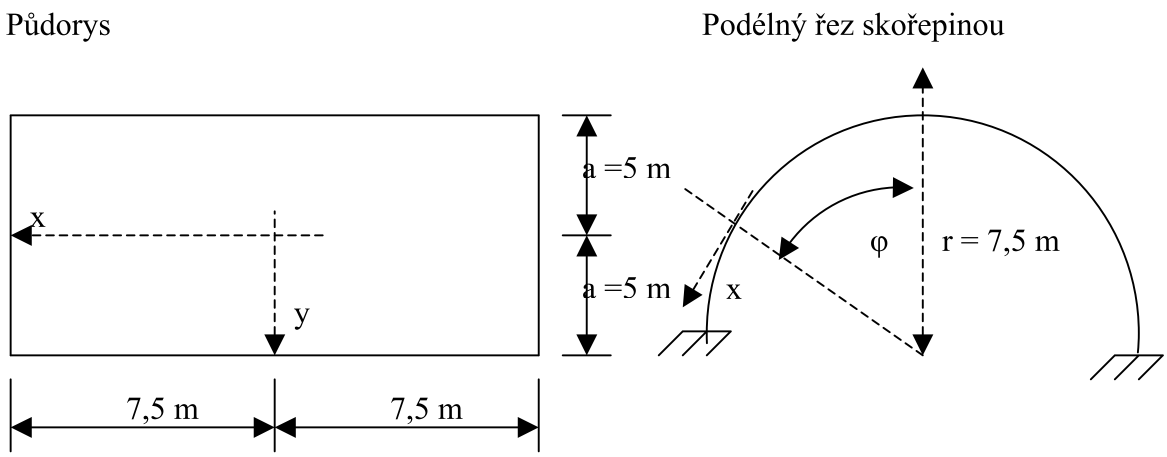
Membránový stav napjatosti je u válcové skořepiny umožněn pouze tehdy je-li podepřena na okrajích nosníky, které zachycují síly vyvozené membránou. Vlivem uložení membrány do těchto konstrukcí dochází k poruchám membránové napjatosti. Ohybové momenty vznikají pouze v blízkosti okrajových nosníků a s narůstající vzdáleností od nich se rychle zmenšují tak, že není třeba s nimi uvažovat. Vnitřní síly, které vznikají ve skořepině působením vlastní tíhy popisují následující rovnice.

$$N_x = - g\, r \cos \varphi \tag{1}$$

$$N_y = - g\, (a^2 - y^2)\, r^{-1}\, r \cos \varphi \tag{2}$$

$$N_{xy} = - 2\, g\, y \sin \varphi \tag{3}$$

Rovnice (1) popisuje velikost síly ve směru spádnice skořepiny, maximální síla vzniká ve vrcholu skořepiny a směrem k patě se síla zmenšuje, v patě by měla být nulová. Další rovnice (2) popisuje velikost vnitřní síly ve vodorovném směru, její maximum je ve středu skořepiny, směrem k okrajům se síla zmenšuje. Poslední rovnice popisuje velikost smykových sil v rovině skořepiny. Tyto síly jsou nulové ve vrcholu a v podélné rovině symetrie, maximálních hodnot je dosaženo v rozích skořepiny



Obr. 3 Schéma válcové skořepiny

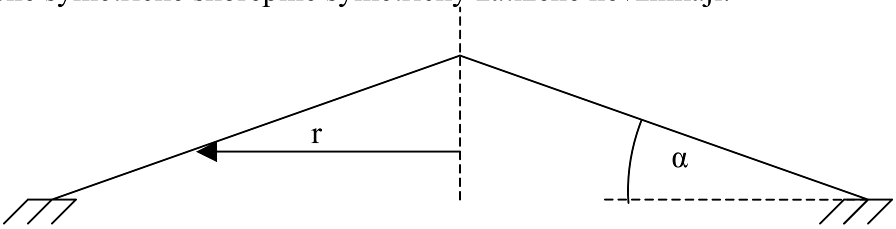
U kuželové skořepiny vzniká membránový stav napjatosti pouze tehdy je-li ukotvena do obodového prstence. Vlivem tohoto uložení zde dochází k poruchám membránové napjatosti. Vnitřní síly, které vznikají ve skořepině působením vlastní tíhy popisují následující rovnice.

$$N_x = - g\, r / \sin 2\, \alpha \qquad (4)$$

$$N_y = - g\; r \,\mathrm{cotg}\, \alpha \qquad (5)$$

$$N_{xy} = 0 \qquad (6)$$

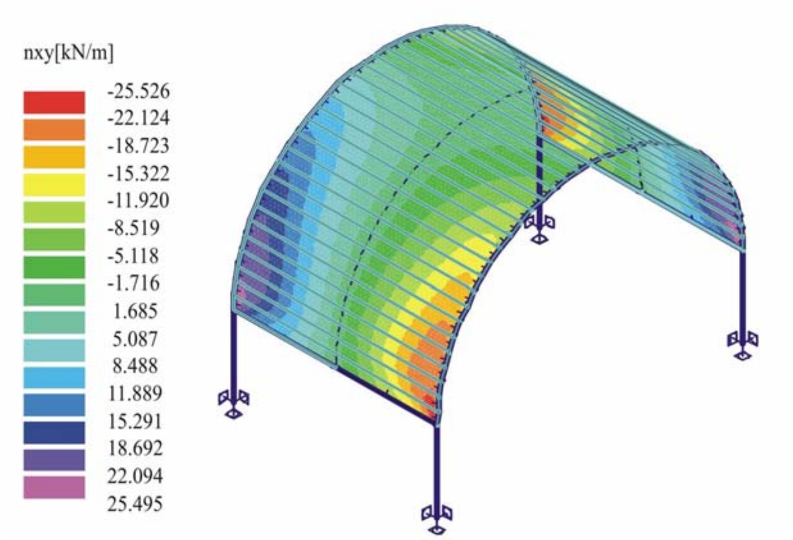
Rovnice (4) popisuje velikost vnitřní síly ve směru řídící přímky kuželové plochy (ve směru spádnice). Velikost normálové síly vzrůstá se vzdáleností od středu a maxima nabývá na okraji. Další rovnice (5) popisuje velikost vnitřní síly ve směru vodorovném (směr tečny rovnoběžníkové kružnice) Největší síly je dosaženo na obvodu skořepiny. Smykové síly v rotačně symetrické skořepině symetricky zatížené nevznikají.



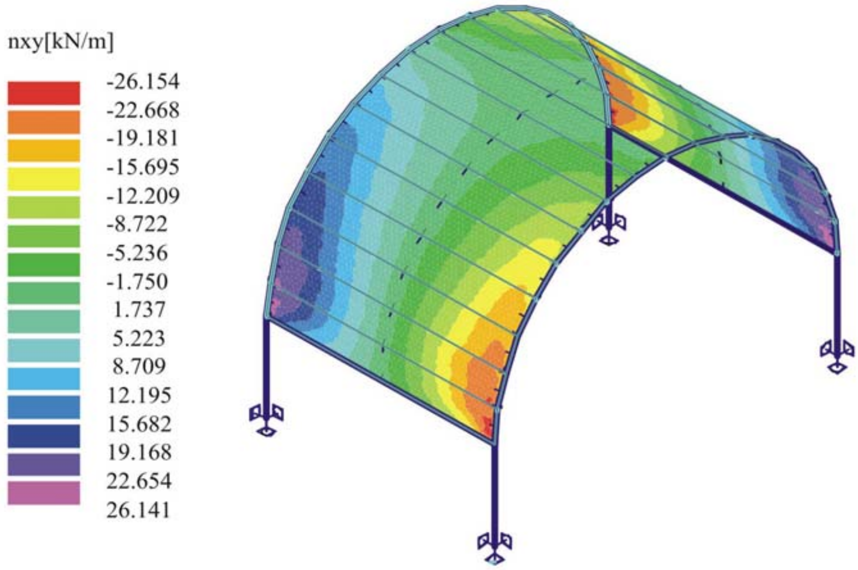
Obr. 4 Svislý řez kuželovou skořepinou - schéma

4. Porovnání numerického a membránového řešení

U válcové skořepiny byly výsledky (normálové síly, N_{xy} a ohybové momenty) porovnávány v několika bodech. Body jsou umístěny v místech, kde nedochází k poruchám membránového stavu napjatosti, ale jeden z bodů je umístěn v místech, kde vlivem rozdělení konstrukce na rovinné oblasti může vzniknout maximální ohybový moment (ve středu této oblasti). K poměrně dobré shodě numerického a přesného řešení dochází přibližně od hodnoty 18 a více rovinných oblastí, v konstrukci nevznikají významné ohybové momenty. Nejlépe výsledky korelují ve středu skořepiny. Čím je sledovaný bod blíže patám skořepiny tím se výsledky více liší, toto tvrzení platí zejména pro normálovou sílu ve vodorovném směru, tato síla je nejvíce ovlivněna poruchami membránové napjatosti.

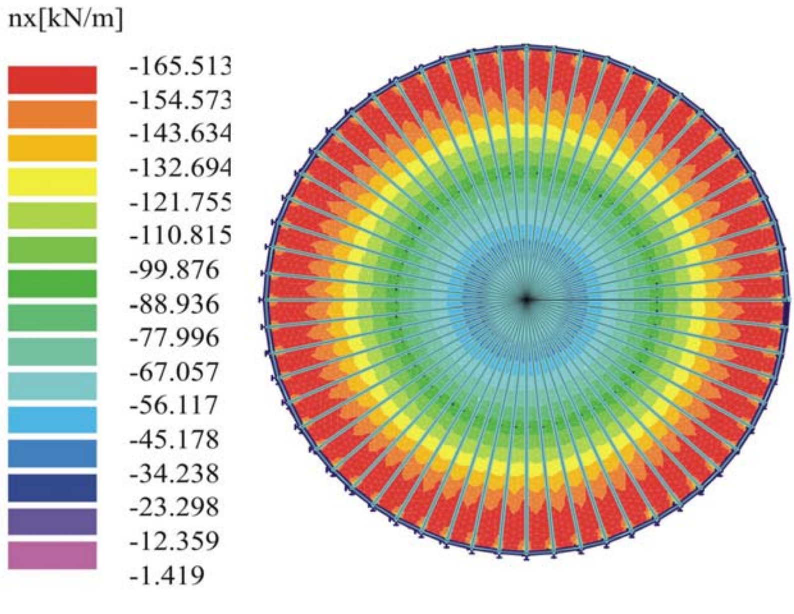


Obr. 5 Aproximace válcové skořepiny 40 plochami – průběh N_{xy}

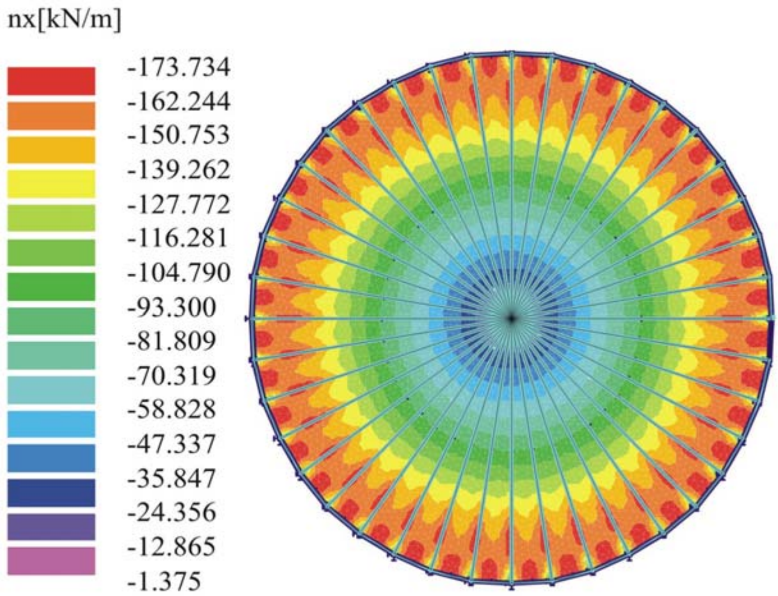


Obr. 6 Aproximace válcové skořepiny 18 plochami – průběh N_{xy}

U kuželové skořepiny bylo porovnání prováděno v několika bodech. Hodnoceny byly velikosti normálových sil, v konstrukci nesměly vznikat významné ohybové momenty a smykové síly. K poměrně dobré shodě numerického a přesného řešení dochází přibližně od hodnoty 40 a více rovinných podoblastí. Odchylka mezi výsledky získanými z membránové teorie a numerického modelu je menší než 10% v místech, kde nedochází k rušení membránové napjatosti vlivem obvodového prstence. Ovšem nutno podotknout, že vykreslení izolinií u normálové síly N_x má trochu jiný charakter v blízkosti prstence. Optimálního průběhu je dosaženo až po rozdělení kuželové plochy na 60 dílů. (viz. obr. 7, 8) Síla N_y je velmi dobře aproximována i pro hrubší dělení. Čím blíže je posuzovaný bod ke středu konstrukce tím jsou výsledky přesnější.



Obr. 7 Aproximace kuželové skořepiny 60 plochami – průběh N_x



Obr. 8 Aproximace kuželové skořepiny 40 plochami – průběh N_x

4. Závěr

Křivočaré konstrukce lze aproximovat několika rovinnými oblastmi, za předpokladu, že jejich počet je dostatečný. (pro válcovou skořepinu je to přibližně 18 oblastí, které aproximují vnitřní úhel 180°, pro kuželovou skořepinu je to přibližně 40 dílů, které aproximují vnitřní úhel 360°) Při tomto rozdělení vznikají v konstrukcích zanedbatelné ohybové momenty, dále je možné získat i reálnou představu o velikosti poruch membránového stavu napjatosti u podpor. Smysluplný počet dílků na které je nutné rozdělit válcovou skořepinu je přibližně 18 – 30 a pro kuželovou skořepinu přibližně 40 – 80 dílů. Další zvětšování počtu rovinných oblastí nemá praktický smysl.

5. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory projektu FRVŠ číslo 1507/G1.

6. Literatura

Hruban K., Betonové konstrukce, nakladatelství ČSAV, Praha 1959

Fajman P., New Triangular Plane Element with Drilling Degrees of Freedom – *Journal of Engineering Mechanics,* ,413, 4, pp.413-418