

CHOSEN PROBLEMS OF ROBOTS MECHANISMS CONTROL

V. Záda*

Summary: *In this contribution will be compared three methods of PD control of robots. The first is without gravity compensation, the second uses a constant gravity compensation and the last of them uses the full gravity compensation.. There are studied the complicity of the design, the accuracy of control and the possibility of implementation in any control system with respecting the computing complicity. The stability feedback is verified by Lyapunov theory of stability.*

1. Úvod

Řízené systémy bývají nelineární již svou podstatou. To platí ve zvýšené míře u mechanických zařízení, jakými jsou roboty a manipulátory. Je přirozené, řídit nelineární systémy nelineárními regulátory. Chceme-li dosáhnout kvalitního řízení, je nutno vytvořit regulátor „ušitý“ přímo na řízenou soustavu. To přináší řadu komplikací spojených s velmi přesnou identifikací soustavy. Technici proto často nahrazují požadované nelineární regulátory lineárními s tím, že jejich působnost je zúžena na jisté blízké okolí vztažného bodu, na kterém lze chování řízeného systému aproximovat jeho linearizovaným modelem. Sama linearizace však nepatří mezi „zvlášť dobré“ metody, spíše naopak, proto vznikají snahy řídit nelineární systémy lineárními regulátory v pokud možno co největším rozsahu. Do této kategorie náleží i tento příspěvek.

V dalším textu se budeme zabývat případem, kdy robot je řízený PD regulátory. Hlavním úkolem je provést nastavení parametrů těchto regulátorů tak, aby byla zajištěna především stabilita celého systému z hlediska řízení.

2. Stručný popis matematického modelu robota

Pohybovou rovnici robota v maticově-vektorovém tvaru lze po různých úpravách, které vynecháme, popsat ve tvaru

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u, \quad (1)$$

kde

$$N(q, \dot{q}) = \left[M_0 + \frac{1}{2} \dot{M}(q) + S(q, \dot{q}) \right]$$

* Doc. Ing. Mgr. Václav Záda, CSc.: Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií, Technická univerzita v Liberci; Hálkova 6; 461 17 Liberec 1; tel.: +420.485 353 289, fax: +420.485 353 112; e-mail: vaclav.zada@tul.cz

Vektor $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ představuje zobecněné souřadnice, které jsou vzájemně nezávislé. V reprezentuje potenciál, jehož gradient je

$$g(q) = (\partial V / \partial q_1, \dots, \partial V / \partial q_n)^T,$$

$M(q)$ je symetrická positive definitní a spojitá matice (tzv. matice setrvačnosti), M_0 představuje matici reprezentující vlivy tření, a S je antisymetrická matice tvaru

$$S(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial M_{i,k}}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right].$$

Poznámka:

I. Pro každou konstantní symetrickou pozitivně definitní matici Λ a každý vektoru x platí

$$\lambda_{\min} x^T x \leq x^T \Lambda x \leq \lambda_{\max} x^T x,$$

kde $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(\Lambda)$ je nejmenší vlastní číslo matice Λ [$\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\Lambda)$...největší].

II. Matice $M = M(q)$ je spojitá podle vektoru q . Pracovní prostor je kompaktní množina, proto existují matice K_1, K_2 řádu $n \times n$, že $K_1 \leq M(q) \leq K_2$ (uspořádání ve smyslu kvadratických forem). Ale $M(q)$ je pozitivně definitní a symetrická, proto existují kladná čísla λ_m a λ_M nejmenší (nejmenší) vlastní číslo $M(q)$ dle I. pro všechna q z kompaktní množiny, že pro každé x platí

$$\lambda_m x^T x \leq x^T M(q) x \leq \lambda_M x^T x.$$

III. Matice S je antisymetrická, proto $x^T S(q) x = 0$ pro každé q a x .

3. PD řízení bez gravitační kompenzace

Definujme stavový vektor $x = (\Delta q^T, \dot{q}^T)^T$. Nechť je dána cílová poloha q_F a cílová rychlost pohybu $\dot{q}_F = 0$ a uvažujme problém, kdy počáteční stav $(q(0), \dot{q}(0))$ je třeba převést do cílového stavu, daného dvojicí $(q, \dot{q}) = (q_F, 0)$.

Definujme diferenci $\Delta q = q - q_F$ a nechť navrhovaný PD regulátor je definován vztahem

$$u(t) = -A\Delta q(t) - B\dot{q}(t), \quad (2)$$

kde A, B jsou $n \times n$ pozitivně definitní diagonální matrice, jejichž parametry je třeba nastavit. Substitucí vztahu (2) do rovnice (1) obdržíme rovnici uzavřené regulační smyčky

$$M\ddot{q} + [M_0 + B + \frac{1}{2}\dot{M} + S]\dot{q} + A\Delta q + g(q) = 0 \quad (3)$$

Hledejme zatím neznámou Ljapunovovu funkci ve tvaru

$$V_L(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \Delta q^T A \Delta q + V(q) - V(q_F) + k, \quad (4)$$

kde k je blíže neurčená konstanta. Derivováním (4) podle času obdržíme výraz

$$\dot{V}_L = \dot{q}^T \left(M\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{M}\dot{q} + A\Delta q + g(q) \right),$$

kde $\dot{V}_L$ značí dV_L / dt . Vztah (3) lze pak upravit na tvar

$$\dot{V}_L = -\dot{q}^T (M_0 + B + S) \dot{q} \quad (5)$$

Víme, že matice S je antisymetrická, takže z rovnice (5) plyne následující vztah

$$\dot{V}_L = -\dot{q}^T (M_0 + B) \dot{q} \leq -\lambda_m(B + M_0) \|\dot{q}\|^2, \quad (6)$$

kde $\lambda_m(M_0 + B)$ je nejmenší vlastní hodnota matice $M_0 + B$ ve smyslu shora pronesené poznámky. Bude-li forma (4) pozitivně definitní, pak vztah (6) nás informuje, že $V_L(x)$ je Ljapunovova funkce a že stav definovaný výrazem

$$x = \begin{pmatrix} \Delta q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

je stabilní. Pokusme se ukázat, že matici A lze zvolit tak, že (4) je pozitivně definitní.

Potenciální funkce $V(q)$ má spojitě druhé derivace, takže ji lze rozvinout do konečné řady

$$V(q) = V(q_F) + \frac{\partial V(q_F)}{\partial q} (q - q_F) + \frac{1}{2} (q - q_F)^T H(q_F) (q - q_F) + \alpha(\Delta q) \|\Delta q\|^2 \quad (8)$$

ve vhodném okolí bodu q_F , kde $H(\cdot)$ je dobře známá Hessova matice druhých partiálních derivací a pro funkci α platí

$$\alpha(0) = 0 = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \alpha(\Delta q).$$

Ze vztahu (8) plyne výraz

$$V(q) - V(q_F) = \Delta q^T g(q_F) + \frac{1}{2} \Delta q^T H(q_F) \Delta q + \Delta q^T \alpha(\Delta q) \Delta q. \quad (9)$$

Definujme nyní funkci β rovností

$$\beta(\Delta q) = \left[\Delta q^T H(q_F) \Delta q + 2\alpha(\Delta q) \|\Delta q\|^2 \right] / \|\Delta q\|^2,$$

pro $\Delta q \neq 0$ a bez újmy na obecnosti dále položíme $\beta(0) = \|H(q_F)\|$. Potom platí odhad

$$\beta(\Delta q) \leq \|H(q_F)\| + 2|\alpha(\Delta q)|.$$

Provedeme-li dále substituci výrazu (9) do (4), obdržíme formu

$$V_L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \Delta q^T g(q_F) + \frac{1}{2} \Delta q^T [A + \beta(\Delta q)E] \Delta q + k, \quad (10)$$

kde E představuje jednotkovou matici. První člen v (10) je pozitivní kvadratická forma vzhledem k $\dot{q}$. Zbylé členy označme

$$Q = \frac{1}{2} \Delta q^T [A + \beta(\Delta q)E] \Delta q + \Delta q^T g(q_F) + k \quad (11)$$

Vztah (11) lze přepsat do tvaru

$$Q = \frac{1}{2} (\Delta q + y)^T C (\Delta q + y), \quad (12)$$

kde

$$C = A + \beta(\Delta q)E, \quad y = C^{-1}g(q_F), \quad k = \frac{1}{2} y^T C y.$$

Formu (10) lze tedy přepsat do tvaru

$$V_L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} (\Delta q + y)^T C (\Delta q + y) \quad (13)$$

Z výrazů (10), (11) a (12) je již vidět, že existuje diagonální matice A taková, že C je regulární pozitivně definitní matice. Vztah (13) pak ukazuje pozitivní definitnost funkce V_L , ovšem k posunutému stavu. Oba výrazy (6) a (13) dokazují, že regulační pochod je stabilní, ovšem obecně nikoli asymptoticky.

Na závěr této kapitoly tedy dodejme, že stabilní stav není v bodě $\dot{q} = 0$, $q = q_F$, ale v bodě reprezentovaném dvojicí $\dot{q} = 0$, $q = q_F - y$. Po ustálení regulačního pochodu zůstává tedy trvalá regulační odchylka

$$\Delta q_\infty \equiv -y = -(A + E\beta(-y))^{-1} g(q_F), \quad (\text{pro } t \rightarrow \infty) \quad (14)$$

Tato skutečnost je typická při využití pouhé PD regulace, která obecně nedokáže kompenzovat trvalé regulační odchylky. Všechny předešlé úvahy se týkaly nějakého vhodného okolí koncového bodu s polohou q_F a rychlostí 0. Může se stát, že odchylka (14) je tak velká, že dosažený bod $q = q_F - y$ nepatří do tohoto okolí. Naproti tomu, matice A je diagonální s kladnými prvky na diagonále, které lze vždy zvolit tak velké, aby (14) nabývalo jakékoli malé hodnoty. Pro jednoduchost volme speciální tvar $A = \delta E$, kde δ je libovolné kladné číslo. Pro dostatečně velké δ lze $E\beta$ zanedbat proti A , takže

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} (A + E\beta(-y))^{-1} g(q_F) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta^{-1} g(q_F) = 0.$$

4. PD řízení s částečnou gravitační kompenzací

Namísto (2) uvažujme zákon řízení ve tvaru, který obsahuje navíc vhodnou konstantu (vektor), jehož účelem je odstranit trvalou regulační odchylku z předešlé části. Definujme

$$u(t) = -A\Delta q(t) - B\dot{q}(t) + g(q_F) \quad (15)$$

Provedeme-li substituci (15) do vztahu (1), obdržíme zpětnovazební rovnici uzavřené smyčky ve tvaru

$$M\ddot{q} + [M_0 + B + \frac{1}{2}\dot{M} + S]\dot{q} + A\Delta q + g(q) - g(q_F) = 0 \quad (16)$$

Obdobně jako předtím pokusme se definovat novou Ljapunovovu funkci

$$V_L(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \Delta q^T A \Delta q + V(q) - V(q_F) - g^T(q_F) \Delta q. \quad (17)$$

Tato funkce má časovou derivaci vypočtenou analogicky jako v předešlé části ve tvaru (6).

Použijeme-li nyní vztah (9) a definici funkce β , jako v předchozí části, obdržíme

$$V_L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \Delta q^T [A + \beta(\Delta q)E] \Delta q. \quad (18)$$

Rovnice (17) tedy skutečně představuje Ljapunovovu funkci. Regulační pochod je proto stabilní a sice v bodě (7), jak je zřejmé z kvadratické formy (18).

5. Pseudo-PD řízení s úplnou gravitační kompenzací

Již vztah (15) představuje ve skutečnosti nelineární regulátor. S ohledem na jeho odlišnost od lineárního regulátoru (2) o pouhou konstantu, bychom jej, v analogii s lineárními a afinními prostory známými v matematice, mohli nazvat *afinním regulátorem*. Vzniká otázka, zda bychom nemohli provést ještě zásadnější úpravu zákona řízení, abychom dostali ještě jednodušší důkaz stability celého regulačního obvodu. Zkusme obměnit (15) tak, že q_F v posledním členu (15) nahradíme aktuálním stavem q . Zákon řízení je pak definován

$$u(t) = -A\Delta q(t) - B\dot{q}(t) + g(q). \quad (19)$$

Substitucí (19) do (1) obdržíme poměrně jednoduchou rovnici uzavřené regulační smyčky

$$M\ddot{q} + [M_0 + B + \frac{1}{2}\dot{M} + S]\dot{q} + A\Delta q = 0. \quad (20)$$

Navrhňme Ljapunovovu funkci ve tvaru

$$V_L(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \Delta q^T A \Delta q. \quad (21)$$

Jak je zřejmé, (21) přímo představuje pozitivně definitní kvadratickou formu. Obdobně, jako v předešlých částech, odvodíme vztah (6), který spolu s (21) říká, že výsledný regulační proces je stabilní.

Vraťme se nyní ke vztahu (19). Poněvadž funkce $g(q)$ je, až na vzácné výjimky, nelineární vektorovou funkcí zobecněného vektoru q , je zřejmé, že regulátor (19) představuje nelineární regulátor, skládající se z lineární části

$$L(q, \dot{q}) = -A\Delta q(t) - B\dot{q}(t)$$

a nelineární části $g(q)$, která představuje kompenzaci gravitačních vlivů. Výsledný regulátor je proto nazván pseudo-lineárním regulátorem. Nelze se však domnívat, že se jedná v podstatě o lineární regulátor s mírnou úpravou. Nelineární část $g(q)$ má u robotů velmi výrazný vliv, proto má (19) spíše blíže k nelineárním, než lineárním regulátorům. Jistou nevýhodou řízení dle (19) je nutnost v rámci zvolené periody vzorkování opakovaně určovat aktuální hodnotu $g(q)$, což s ohledem na značnou výpočetní náročnost představuje dosti složitý problém.

6. Závěr

V předešlých částech jsme sledovali možnosti stabilizace robotů prostřednictvím lineárních a pseudo-lineárních regulátorů. V kapitole 3. bylo využito čistě lineárního maticového PD regulátoru. Cenou za jednoduchost této regulační struktury bylo jednak velmi složité odvozování stability zákona řízení a dále existence trvalé regulační odchylky. V kapitole 4. jsme lineární regulátor pozměnili o vhodnou kompenzační konstantu, která zajistila anulování trvalé regulační odchylky a zdá se tedy dostatečně perspektivní. V kapitole 5. jsme lineární regulátor pozměnili o plnou gravitační kompenzaci. Obrovskou výhodou je pak velmi snadné odvození stability řízení a rovněž nulová regulační odchylka. Nevýhodou tohoto řízení je však nutnost v rámci zvolené periody vzorkování stále znovu určovat, tj. složitě vypočítávat, aktuální hodnotu $g(q)$. S ohledem na značnou výpočetní náročnost této akce, řízení dle (19) představuje dosti složitý problém. Rozbor okolí koncového bodu, ve kterém je regulační proces stabilní, byl vynechán. Lze však dokázat, že obecně se toto okolí rozšiřuje, jakmile postupně přecházíme od řízení (2) k řízení (15) a nakonec k řízení (19). S ohledem na složitost i přesnost řízení se jeví jako nejvhodnější kandidát řízení s částečnou gravitační kompenzací (15). Máme-li výkonný výpočetní prostředek, použijeme řízení dle (19). Na závěr poznamenejme, že veškeré zde uvedené návrhy řízení nevyužívaly žádné formy linearizace řízených systémů.

7. Literatura

Canudas de Wit B. & Siciliano, B. & Bastin, G. (1996) Theory of Robot Control. Springer-Verlag, Berlin.

LaSalle, J. P. (1960) Some extensions of Lyapunov's second method. IRE Transactions on Circuit Theory, 7, 520-7.

Záda, V. (2002) The Compare of Robot Position Control with PD Controller and Parallel Model Controller. In: Proceedings 11th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region. Balatonfüred, Hungary, June 30-July 2, 2002. Pp. 423-428.

Záda, V. (2002) Optimal Setting of PID Parameters of Nonlinear Systems. In: the 5th International Scientific-Technical Conference PROCESS CONTROL. Kouty nad Desnou, Czech Republic.

Záda, V. (1999) Position Control of Systems Described by Lagrange Equations. In: District heating Control'99, Zlín, Czech Republic: Academia Centrum, Zlín, pp. 176-180. ISBN 80-214-1461-8.

Záda, V. (1999) Stability of Position Control of Systems Described by Lagrange Equations. In: The 4th International Workshop *Electronics, Control, Measurement and Signals, ECMS'99*, Liberec, Czech Republic: TUL, Liberec, pp. 72-74. ISBN 80-7083-339-4.

Záda, V. (2002) Exponential Stabilization of Open Kinematic Structure. In: 1st International Conference APLIMAT 2002. Bratislava, Slovak Republic: Slovak University of technology, Department of Mathematics, pp. 445-448. ISBN 80-227-1654-5.