National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. 231

EVALUATION OF EFFECTIVE THERMOMECHANICAL PROPERTIES OF MASONRY BASED ON NUMERICAL HOMOGENIZATION

J. Vorel*, J. Sýkora*, M. Šejnoha*

Summary: *The present study deals with the definition of a periodic unit cell (PUC) that is constructed on the mesoscopic level of the two-scale model. The PUC serves as a suitable tool to determine the effective properties of the masonry and loading paths that become the input data for modeling on the macroscopic level. This work takes into account the impaired properties of the interfacial transition zone (ITZ). Therefore, in the proposed material model the reduced properties of the ITZ are described using the contact elements and Mohr-Coulomb law with tension cut off. The units (stone blocks) and the mortar beds are discretized using finite elements.*

1. Úvod

Zděné konstrukce jsou používány po dlouhá tisíciletí existence lidstva a i v dnešní době jsou stále používány pro svou dostupnost a dobré mechanické vlastnosti. Původně byly konstrukce navrhovány na základě zkušeností, pokusů a omylů, vyplývající z nedostatku znalostí vlastností a chování zdiva. V současnosti, navzdory velkému pokroku v počítačovém modelování, se navrhování a posuzování zděných konstrukcí v běžné praxi provádí na základě určitých zjednodušujících podmínek a vztahů, založených na použití různých koeficientů. Toto lze především připsat heterogenitě zdiva, sestávajícího se ze složek s kvazikřehkými vlastnostmi.

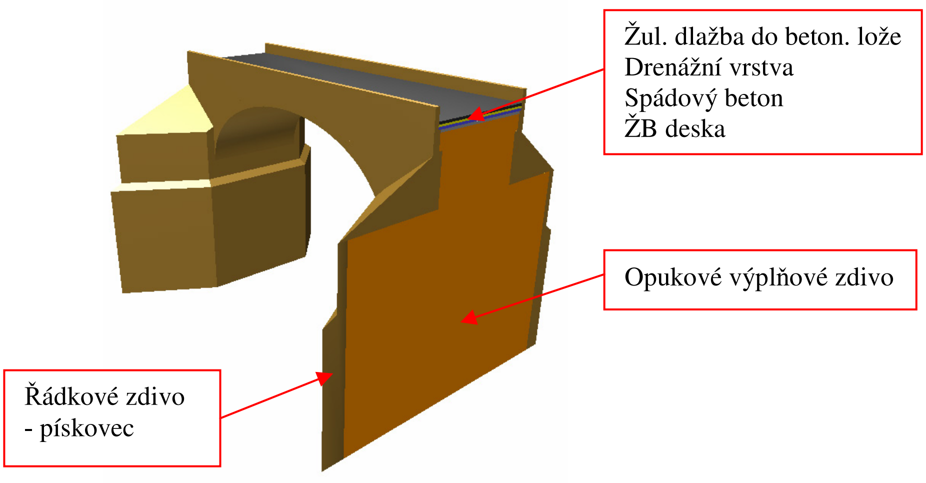
Je zřejmé, že pro realistické řešení celé konstrukce je nutné použít víceúrovňové modelování. V další části této práce je uvedeno vytvoření periodické buňky, která se používá pro mezoskopickou úroveň při dvouúrovňovém modelování (druhá úroveň je makroskopická a popisuje typickou velikost konstrukce). Na mezoskopické úrovni jsou získávány efektivní vlastnosti zdiva, které lze následně použít pro modelování konstrukce na makroskopické úrovni.

Pro zjištění nelineárního chování materiálu je periodická buňka zatěžována řízenou deformací. Kombinací rovnoměrné deformace ve směru x, y a posléze i smyku lze pro daný materiál získat hranici porušení.

Velké přiblížení počítačového modelu skutečnému materiálu lze dosáhnout definicí přechodové (kontaktní) vrstvy mezi jednotlivými materiály. Jak je zřejmé z běžně se vyskytujících konstrukcí, bývá tato vrstva místem vzniku poruch, proto vlastnosti této vrstvy velmi ovlivňují celkovou odolnost zdiva vůči zatížení (mechanickému, nemechanickému).

* Ing. Jan Vorel, Ing. Jan Sýkora, Doc. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D.: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 – Dejvice, tel.: +420 777 234 262, e-mail: Honza-Jan@seznam.cz

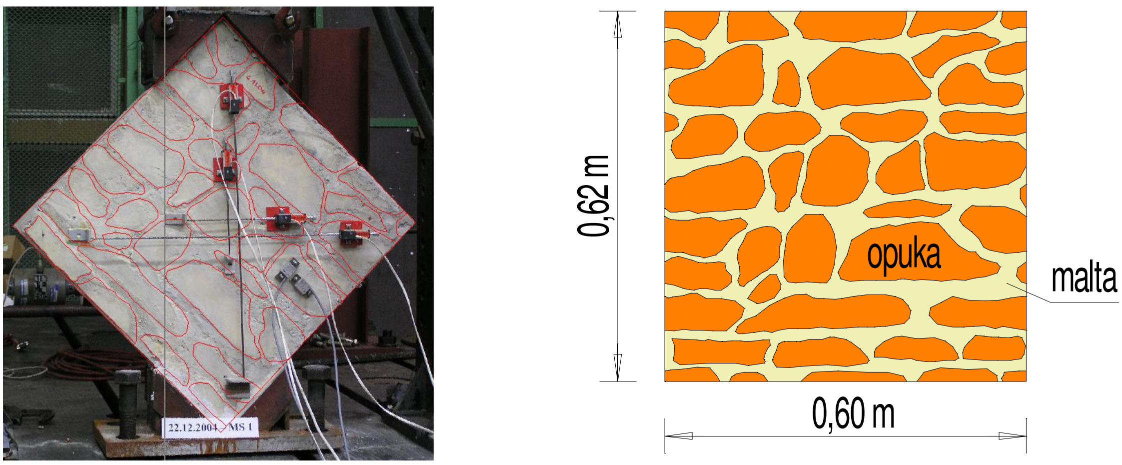
Avšak stanovení vlastností této vrstvy je náročné, neboť jsou ovlivněny mnohými působícími faktory při zdění a vlastnostmi jednotlivých složek zdiva. U historických konstrukcí je obtížné a přesné stanovení potřebných vlastností způsobeno nedostatkem provedených zkoušek. Proto jsme se v odstavci 6, zaměřili na možnost stanovení vlastností kontaktní vrstvy metodou nejmenších čtverců. Touto metodou je vybrán ze souboru dostatečného množství simulací model, který se nejvíce přibližuje vlastnostem vzorku zkoušeného v Kloknerově ústavu. Vzorek lomového zdiva představuje výplňový materiál, vyskytující se například v konstrukci Karlova mostu (obr. 1).



Obr. 1: Skladba materiálů Karlova mostu

2. Návrh periodické buňky (PUC)

Opukové zdivo z lomového kamene je heterogenní materiál, který je při modelování na makroskopické úrovni vhodné pro zjednodušení výpočtů uvažovat až do porušení jako homogenní. Vliv struktury materiálu na makroskopické chování může být zkoumán při použití modelů na mezoskopické úrovni, na které je zdivo modelováno pomocí periodické buňky (PUC). D*vouúrovňová analýza* konstrukce zahrnuje modelování na mezoskopické a makroskopické úrovni [Šejnoha J. a kol., 2003].



a) b)

Obr. 2: a) skladba opukového zdiva zkušebního tělesa
b) mezoskopická periodická buňka pro opukové zdivo

Pro sledovaný vzorek nejsou podklady pro plně statistický přístup při sestrojení PUC (obr. 2b) k dispozici, proto jsou použity poskytnuté fotografie zkušebního tělesa (omezeno na 2D), použitého při zkoušce v tlaku provedené v Kloknerově ústavu (obr. 2a).

3. Základní vztahy pro konstrukci PUC

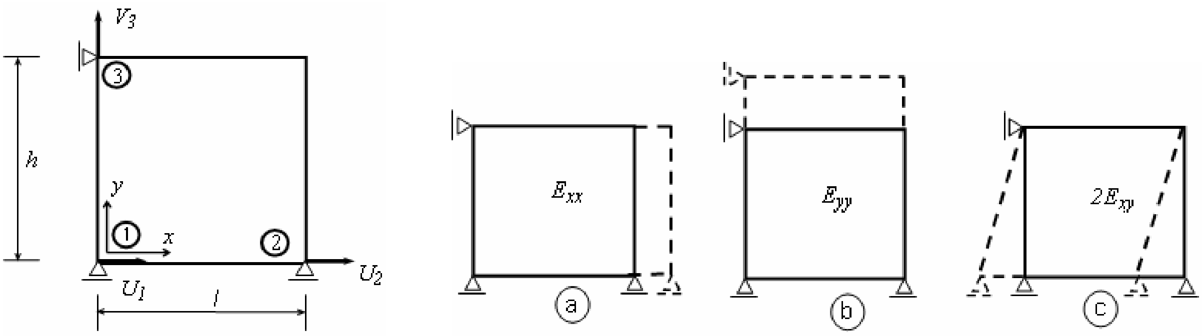
Pro PUC schematicky znázorněnou na obr. 2b, zavedeme staticky určité podepření v uzlech 1, 2, 3 podle obr. 3a. Rozměry buňky: Šířka (h) .... 0,60 m – směr x

Výška (l) .... 0,62 m – směr y

Tloušťka (b) .... 0,15 m – směr z

Nechť E_{xx}, E_{yy}, $2E_{xy}$ jsou inženýrské makroskopické poměrné deformace představující zprůměrované hodnoty skutečných inženýrských deformací ε_{xx}, ε_{yy}, $2\varepsilon_{xy}$ a Σ_{xx}, Σ_{yy}, Σ_{xy} jsou makroskopická napětí představující zprůměrované hodnoty skutečných napětí σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Na obr. 3b jsou rozkresleny jednotlivé deformační stavy, ze kterých vyjádříme makroskopické posuny.



a) b)

Obr. 3: a) PUC v soustavě souřadnic

b) základní deformační stavy

Periodickou buňku lze zatěžovat silami při testech řízených napětími (stress control) (rov. 1a) nebo uzlovými posuny (displacement control) (rov. 1b). Vztahy pro dané zatěžovací síly nebo posuny jsou blíže odvozeny v [Šejnoha J. a kol., 2003].

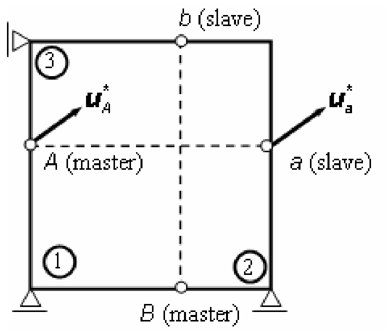
$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} -h & 0 & -l \\ h & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{xx} \\ \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h \\ l & 0 & -h \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ 2E_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

a) b)

Zbývá formulovat okrajové podmínky zajišťující periodicitu PUC. Za tím účelem vyjádříme posuny u a v jako součet posunů vyvolaných polem makroskopických deformací a posunů fluktuačních u^*, v^*, vystihující vliv heterogenity materiálové struktury (rov. 2).

$$\begin{aligned} u(x,y) &= E_{xx}x - (h-y)\,(2E_{xy}) + u^*(x,y) \\ v(x,y) &= E_{yy}y + v^*(x,y)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

S ohledem na strukturu programu ATENA 2D [Červenka V. a kol., 2003] rozdělíme hraniční uzly do dvou skupin (obr. 4).



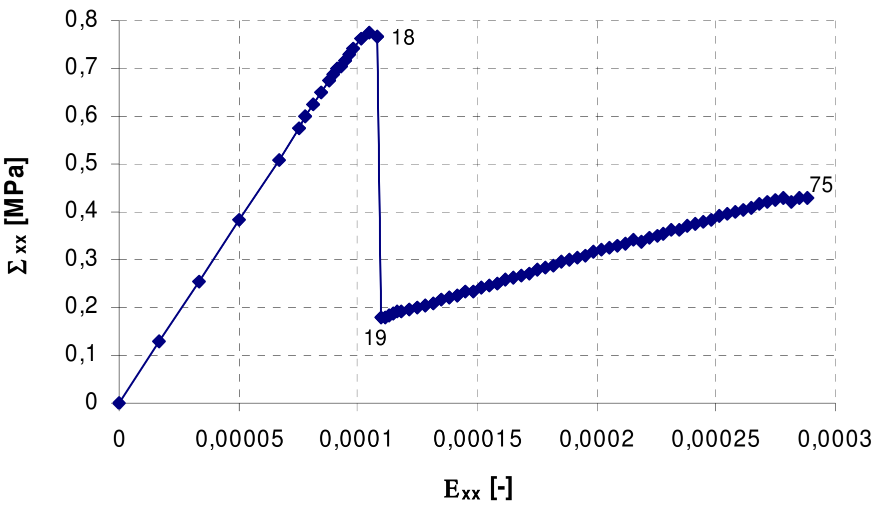
Obr. 4: Podmínky periodicity

Pokud uzly typu *A, B* označíme jako „master“ a uzly typu *a, b* označíme jako „slave“, lze odvodit závislosti posunů v těchto uzlech, blíže viz [Šejnoha J. a kol., 2003]. Pro posuny v bodech *A, a* pak platí: $u_a = u_A + u_2 - u_1$, $v_a = v_A$ a pro posuny v bodech *B, b* obdobně: $u_b = u_B - u_1$, $v_b = v_B + v_3$.

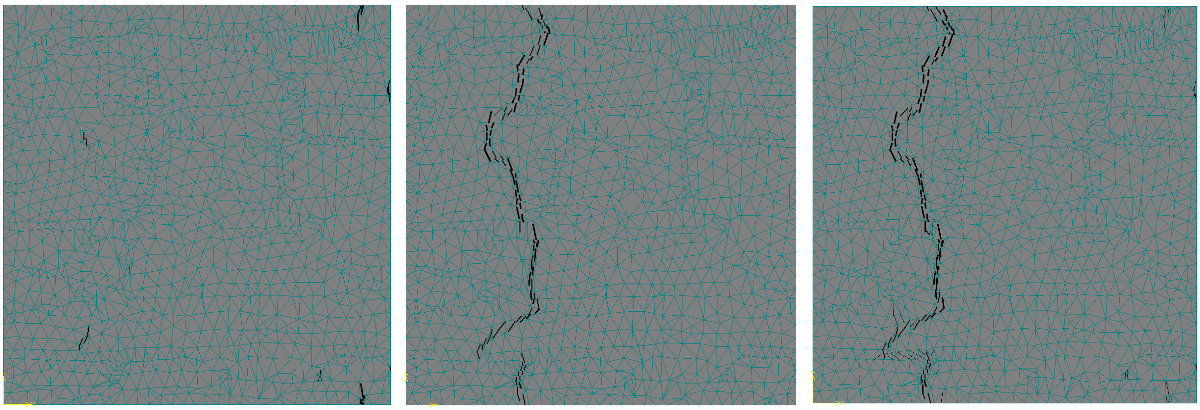
4. Pracovní diagramy

Na vytvořené periodické buňce (obr. 2b) je provedena počítačová simulace typu *„displacement control“* (přírůstkové řešení) programem ATENA 2D (verze 2.1.11.0). Hodnoty materiálových parametrů složek zdiva jsou získány ze zkoušek provedených v Kloknerově ústavu na materiálech použitých pro zkušební vzorek. Statistické zpracování výsledků zkoušek je blíže popsáno v [Sýkora, 2005]. Postupně jsou zakresleny zatěžovací dráhy (pracovní diagramy), vyjadřující závislost mezi makroskopickým napětím Σ_{ij} a makroskopickou poměrnou deformací E_{ij} (obr. 5).

Obrázek 6 ukazuje vývoj trhlin v závislosti na narůstající deformaci. Lze pozorovat, že s rostoucí deformací se některé trhliny zavírají a jiné nové otvírají. Na obrázcích 6b a 6c je patrné formování magistrální trhliny ve svislé spáře.



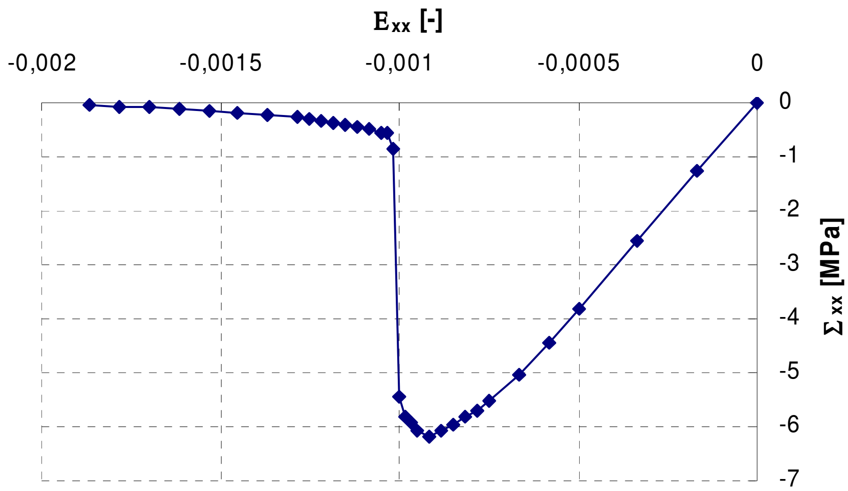
Obr. 5: Pracovní diagram, předepsaná deformace $E_{xx} > 0$



a) b) c)

Obr. 6: Vývoj trhlin při $E_{xx} > 0$: a) zatěžovací krok 18
b) zatěžovací krok 19
c) zatěžovací krok 75

Pro názornost je zde uveden i případ řízené jednoosé deformace v tlaku ve směru osy *x* ($E_{xx} < 0$), zatěžovací dráha je na obr. 7.



Obr. 7: Pracovní diagram, předepsaná deformace $E_{xx} < 0$

5. Přechodová zóna (ITZ)

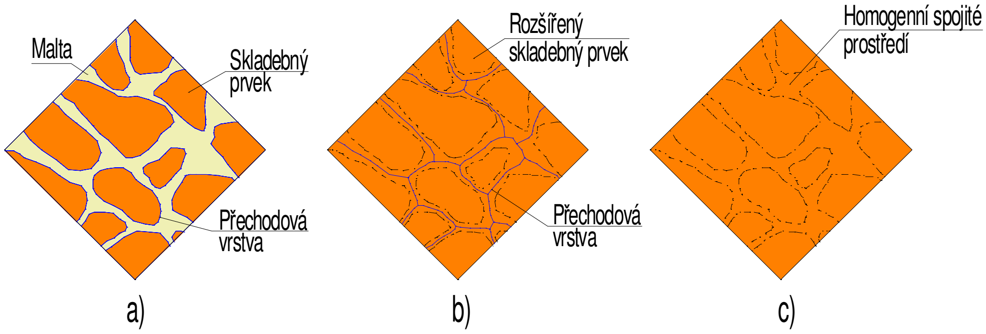
Větší přesnosti modelování zdiva je možné dosáhnout použitím tzv. *přechodové vrstvy*, neboť spojení mezi základním skladebným prvkem zdiva (kámen, cihly,…) a maltou je často nejslabším místem struktury zdiva, proto je vliv přechodové vrstvy na chování materiálu velmi významný. Velikost, trvanlivost a síla spojení je ovlivněna typem malty, obsahem cementu v maltě, kvalitou skladebných prvků (povrch by měl být pevný, čistý a drsný), savostí skladebných prvků při uložení do maltového lože, technikou tvarování spáry (především velikostí použitého tlaku), délkou uběhlého času mezi rozprostřením malty na jeden prvek a uložením druhého prvku, ošetřováním zdiva při tvrdnutí a dalšími vlivy působícími při zdění nebo zrání malty. Pro zajištění dobrého spojení malty se skladebnými prvky je doporučeno savé materiály (opuka, cihly,…) namočit předem na několik hodin do vody, aby došlo k jejich saturaci, při zdění by měl být povrch těchto prvků vizuálně suchý [ESSroc].

Existuje několik druhů počítačového modelování struktury zdiva, kde vstupují do úvahy vrozené diskontinuity (hlavních skladebných prvků, malty, rozhraní materiálů). Vhodné způsoby modelování zdiva jsou uvedeny v [Roca a kol., 1998], kde jsou popsány tři typy přístupů.

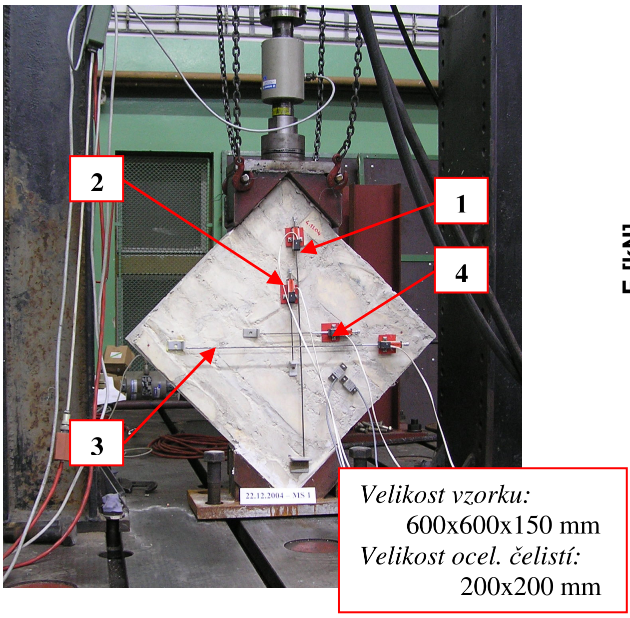
a) *Detailní modelování* – skladebné prvky a malta jsou zobrazeny jako spojitá prostředí, kde rozhraní materiálů je definováno pomocí přechodových prvků (nespojité prvky) (obr. 8a).
b) *Zjednodušené modelování* – skladebné prvky jsou geometricky rozšířeny a jsou modelovány jako spojitá prostředí, malta a rozhraní materiálů je modelováno pomocí přechodových prvků nulové tloušťky (obr. 8b). Tento model je použit v [Sýkora, 2005].

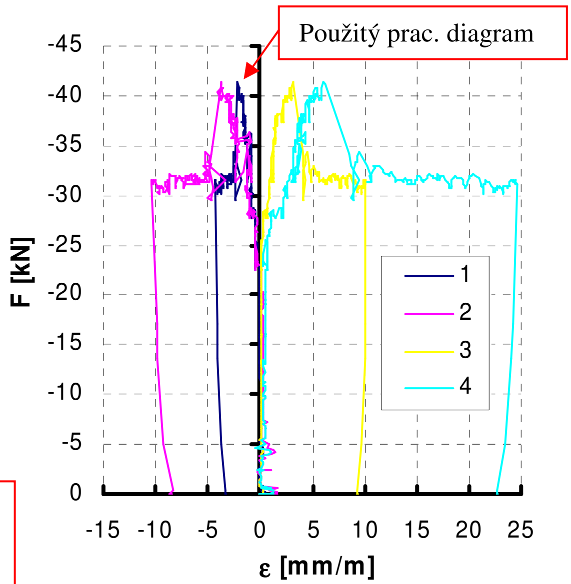
Pro úplnost zmiňme:

c) *Makro-modelování* – skladebné prvky, malta a rozhraní materiálů jsou modelovány jako homogenní spojité prostředí (obr. 3.1c).



Obr. 8a: Počítačové modely zdiva





a) b)

Obr. 9: a) uspořádání tlakové zkoušky vzorku z lomového zdiva
b) závislosti působící síly na měřených deformacích ε_1 až ε_4

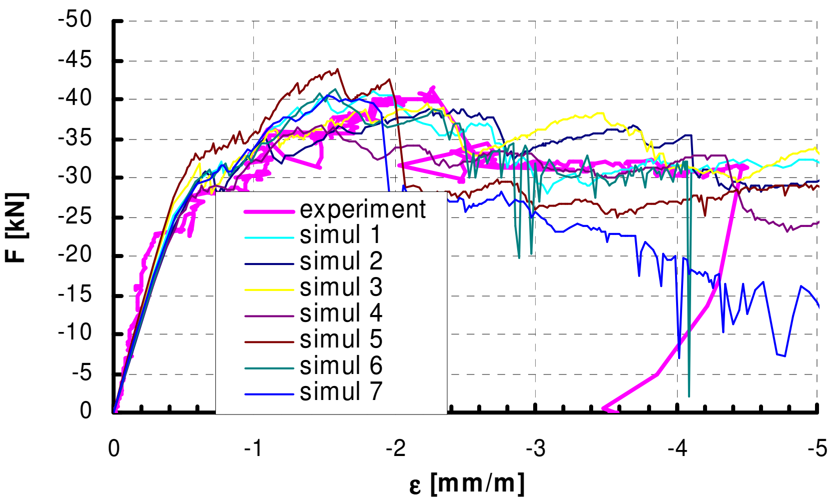
Jelikož, oba komponenty – malta i kamenné bloky jsou kvazikřehké materiály, lze využít k počítačovému řešení program ATENA 2D [Červenka V. a kol., 2003] vytvořený na bázi MKP. Snížená soudržnost a tahová pevnost ITZ je vystižena kontaktními prvky s Mohr-Coulombovou podmínkou porušení s omezením v tahu. V tomto příspěvku pracujeme s přesnou kopií geometrie vzorku použitého k experimentu (obr. 9a) a s pracovními diagramy (obr. 9b) získanými zkouškou provedenou v Kloknerově ústavu. K vytvoření binární mapy posloužila digitální fotografie vzorku.

6. Kalibrace modelu s přechodovou vrstvou

Pro počítačovou analýzu opukového zdiva byla zvolena metoda tzv. *detailního modelování*. Jak již bylo uvedeno (odst. 5), mnohé faktory ovlivňují vlastnosti přechodové oblasti, proto je obtížné stanovení vlastností přechodových prvků bez provedení potřebných zkoušek v laboratoři. Při našem počítačovém modelování nebyly tyto zkoušky k dispozici, proto zjištění vlastností přechodové vrstvy je provedeno zpětnou analýzou. Počáteční vstupní charakteristiky (střední hodnoty) přechodové vrstvy jsou určeny odborným odhadem s důrazem na co největší přiblížení výsledného pracovního diagramu skutečné zkoušce provedené v Kloknerově ústavu.

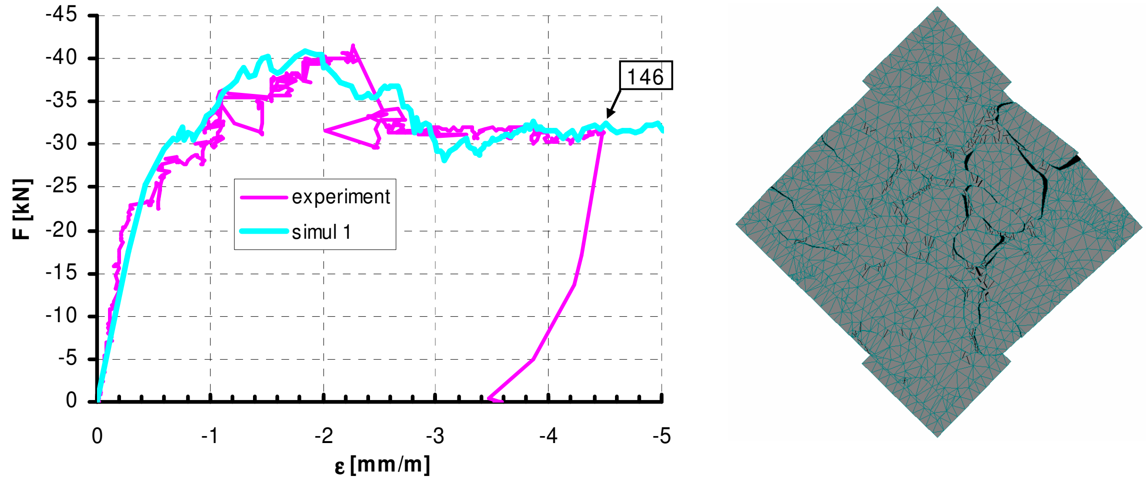
Pro upřesnění vlastností kontaktních prvků je nutné provést dostatečného množství simulací, ve kterých jsou tyto vlastnosti měněny. Nalezením pracovního diagramu (výsledek simulace), nejvíce odpovídajícího zkoušce uskutečněné v Kloknerově ústavu, se určí nejvíce pravděpodobné charakteristiky.

Pro vytvoření požadovaného počtu simulací je využit komerční software SARA [Červenka Consulting, 2003], umožňující pravděpodobnostní nelineární analýzu. Materiálové vlastnosti a vstupy používané programem ATENA jsou převedeny do programu FREET (součást programového balíku SARA), kde jsou použity pro náhodná rozdělení zadaných parametrů. Náhodné (Gaussovo) rozdělení je provedeno u všech parametrů kontaktních prvků a zároveň u Youngova modulu pružnosti malty, přidaného z důvodu velkého vlivu na strmost počáteční elastické části pracovního diagramu. Pro všechny náhodné veličiny našeho modelového příkladu je definován variační koeficient w = 0,1. Výsledky simulací viz obr. 10 (blíže viz [Vorel, 2005].



Obr. 10: Zatěžovací dráhy jednotlivých simulací v porovnání se skutečnou zkouškou

Metoda nejmenších čtverců je použita pro nalezení pracovního diagramu, jenž nejvíce odpovídá diagramu experimentálně zjištěného v Kloknerově ústavu. Metoda nejmenších čtverců je založena na nalezení simulace, jejíž pracovní diagram má nejmenší odchylku od skutečného. Vybrané optimální řešení je znázorněno na obr. 11a, současně je zde (obr. 11b) znázorněno rozložení trhlin v kroku 146, který odpovídá maximální deformaci dosažené při experimentu.

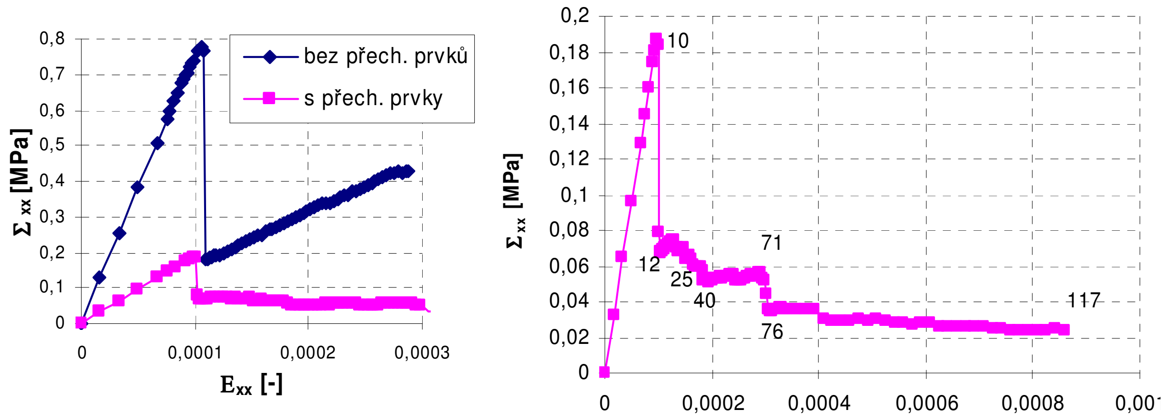


a) b)

Obr. 11: a) porovnání vypočteného pracovního diagramu experimentem
b) rozložení trhlin v kroku 146

7. Model PUC s přechodovými prvky

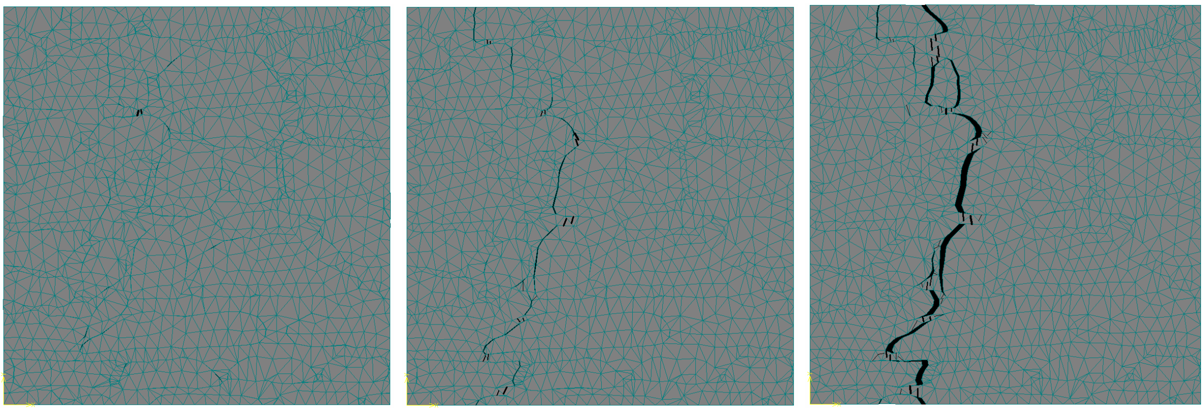
Z důvodů uvedených v odst. 5 je v dané periodické buňce zavedena přechodová oblast mezi maltou a opukou. Materiálové charakteristiky odpovídají vlastnostem získaných zpětnou analýzou z makroskopické zatěžovací zkoušky (viz odst. 6).



a) b)

Obr. 12: a) porovnání pracovních diagramů pro model s a bez přechodových prvků, $E_{xx}>0$
b) zvětšený pracovní diagram pro model s přechodovými prvky

Pracovní diagramy, získané při zatěžování periodické buňky ve směru osy *x*, jsou znázorněny na obr. 12. Na obr. 12a jsou porovnány diagramy počítačových modelů bez a s přechodovými prvky.



a) b) c)

Obr. 13: Vývoj trhlin při $E_{xx} > 0$: a) zatěžovací krok 10
b) zatěžovací krok 12
c) zatěžovací krok 117

8. Efektivní lomová energie zdiva

Průměrná lomová energie je popsána jako integrál pod křivkou pracovního diagramu v tahu (tlaku) vztažený na plochu porušení. Z výsledků simulací lze odvodit průměrnou lomovou energii opukového zdiva pomocí periodické buňky. Uvážíme-li, že lomová plocha trhliny o délce *a* [m] nabývá velikosti $A_{trhlina} = a \cdot b$ (*b* je tloušťka vzorku) a výslednice $F = \Sigma_{xx} \cdot A = \Sigma_{xx} \cdot h \cdot b$ pro směr *x* vyvozuje posun $u = \mathrm{E}_{xx} \cdot l$, můžeme psát (obdobně lze i pro směr *y*)

$$\hat{G}_F^x = \frac{\int F(u)\,\mathrm{d}u}{A_{trhlina}} = \frac{\int \Sigma_{xx} hb\,\mathrm{d}(\mathrm{E}_{xx} l)}{ab} = \frac{lh}{a} \cdot \int \Sigma_{xx}\,\mathrm{d}E_{xx} \ . \tag{3}$$

Aktuální lomovou energii lze určit pomocí přírůstkového řešení, vycházejícího z pracovního diagramu zjištěného při zkoušce (simulaci) a definice lomové energie. Při uvažování délky trhliny *a* [m], můžeme pro dva různé zatěžovací kroky *i*, *j* (*j* > *i*) pracovního diagramu psát

$$\tilde{G}_F = \frac{W_j - W_i}{(a_j - a_i) \cdot b} \ . \tag{4}$$

Lomová energie je určována na vzorku modelovaného s přechodovými prvky a z nich vycházejících pracovních diagramů (obr. 12b). Výsledné hodnoty lomové energie určené dle vztahů (3) a (4) jsou uvedeny v tab. 1, v níž jsou rozděleny dle způsobu určení a směru.

Na obr. 14 je znázorněná matice lomové energie pro směr *x*, vzniklá použitím přírůstkového řešení, kde jednotlivé členy vyjadřují hodnotu lomové energie, zjištěnou rozdílem daných výpočtových kroků. Jako nejpravděpodobnější se ukazují hodnoty, nacházející se uprostřed trojúhelníkové matice (viz obr. 14), jejichž vzájemné odchylky jsou minimální. Aritmetické průměry těchto členů matic jsou uvedeny v tab. 1.

Tab. 1: Hodnoty lomové energie rozdělené dle směru a způsobu určení

označení	*N/m*
$\hat{G}_F^x$	**11,5**
$\tilde{G}_F^x$	**11,7**
$\hat{G}_F^y$	**4,9**
$\tilde{G}_F^y$	**4,6**

$\tilde{G}_F$	**[N/m]**						
krok	10	12	25	40	71	76	117
10		0,2	1,6	2,7	4,5	4,7	8,8
12			12,9	9,3	12,1	11,6	17,7
25				7,6	11,9	11,3	18,4
40					17,3	14,8	23,0
71						7,3	25,9
76							29,6
117							

Obr. 14: Matice výsledků přírůstkového řešení lomové energie ve směru osy x

9. Závěr

Zvolená periodická buňka je vhodná pro mezoskopickou úroveň počítačové analýzy, pro niž se jeví jako dostatečně definovaný model, především při použití programu ATENA. Řešení modelů na mezoskopické úrovni slouží k určení efektivních vlastností zdiva a zatěžovacích křivek, použitelných při analýze na makroskopické úrovni. Definováním přechodových prvků je docíleno přesnějšího vystižení chování zdiva.

Detailní model, použitý jak při zpětné analýze při zjišťování vlastností přechodové vrstvy, tak při modelování periodické buňky, poskytuje dostatečně přesné výsledky, velice se přibližující skutečnému chování zdiva, což je dobře patrné z obr. 11. Model vykazuje schodu se zkušebním vzorkem v počáteční elastické části, tak v části po dosažení pevnosti zdiva.

Efektivní lomové energie zdiva, zjištěné z pracovních diagramů dle vzorce (1) nebo (2), je vhodné porovnat s hodnotami lomových energií určených experimentálně, které nejsou v současné době k dispozici. Hodnoty efektivních lomových energií zdiva, vypočtených na základě různých přístupů, se liší minimálně, proto je nyní označujeme za dostatečně přesné a použitelné při makroskopické analýze.

Výsledky počítačových simulací byly použity při statické a dynamické analýze Karlova mostu.

10. Poděkování

Tento příspěvek byl vypracován za finančního přispění MŠMT ČR, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS a vychází z teoretických výsledků získaných řešením grantů projektu GAČR 103/04/1321 a GAČR 106/03/H150.

11. Literatura

[Červenka Consulting, 2003] Červenka Consulting (2003) *SARA User's manual*, Praha, 26 str.

[Červenka V. a kol., 2003] V. Červenka, L. Jendele, J. Červenka (2003) *ATENA Program Documentation*, Praha, 129 str.

[ESSroc] ESSroc *ESStech – M20: Properties of Masonry Mortars,* http://essroc.com/default.aspx?pageid=171

[Roca a kol., 1998] P. Roca, J.L. González, E. Oñate a P.B. Lourenço (1998) *Structural analysis of historical constructions II - Experimental and numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry*, in proceedings CIMNE, Barcelona, 35 pp.

[Sýkora, 2005] J. Sýkora (2005) *Diplomová práce – Počítačové modelování lomového zdiva*, Praha, 76 str.

[Šejnoha J. a kol., 2003] J. Šejnoha, V. Blažek, M. Šejnoha, J. Zeman (2003) *Počítačový model pro analýzu napětí a přetvoření Karlova mostu*, zpráva ČVUT Praha, 64 str.

[Vorel, 2005] J. Vorel (2005) *Diplomová práce – Efektivní termomechanické vlastnosti zdiva*, Praha, 77 str.