

INTERPLAY OF SIZE EFFECTS IN CONCRETE SPECIMENS BY COMPUTATIONAL STOCHASTIC FRACTURE MECHANICS

M. Vořechovský, D. Matesová¹

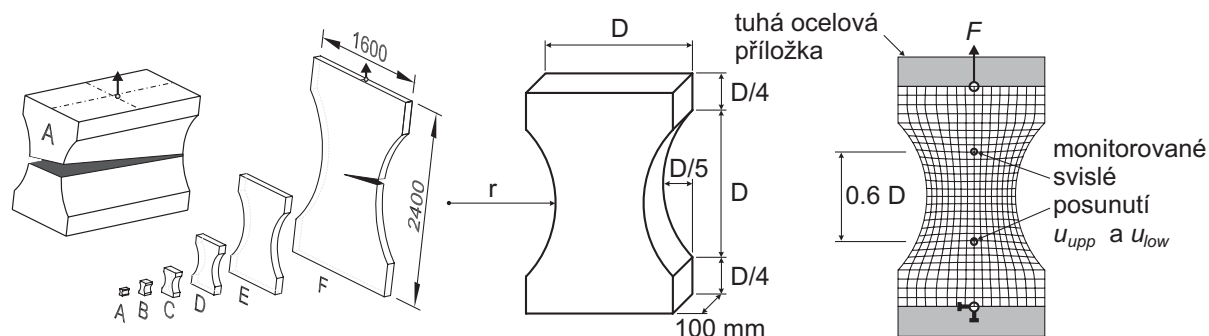
Summary: *We attempt at identifying, studying and modeling possible sources of size effects in concrete structures both separately and brought together. We are particularly motivated by an interplay of several identified scaling lengths stemming from material, boundary conditions and geometry. We model well published results on direct tensile tests of dog-bone specimens with rotating boundary conditions performed by van Vliet and van Mier by methods of stochastic nonlinear fracture mechanics. Using the numerical example, we document how different sources of size effects on strength can interact and result in relatively complex processes in quasibrittle failure. The presented study documents the well known fact that an experimental determination of material parameters (needed for rational and safe design of structures) is very difficult for quasibrittle materials such as concrete.*

1. Úvod

Tento příspěvek se zabývá studiem komplexního vlivu velikosti na pevnost betonových konstrukcí. Snahou je identifikovat jednotlivé možné zdroje tohoto vlivu a modelovat je každou zvlášť nebo společně v jednom komplexním modelu. Chceme ukázat jak spolu jednotlivé vlivy velikosti interagují. Zejména nás zajímá souhra a vzájemné ovlivnění několika materiálových délek a efekt takové souhry na vliv velikosti. Tematicky asi nejbližší dosud publikovaná práce jiných autorů je článek (Gutiérrez and de Borst 2002) zabývající se deterministickou a statistickou délkou a jejich rolemi u vlivu velikosti.

Přesto, že předložená práce má ambici studovat jevy obecně, pro jednodušší přiblížení čtenáři a možnost konkrétních výsledků článek představuje problematiku na nosnících konkrétní geometrie. Konkrétně se zabýváme studiem experimentálních výsledků vzorků tvaru psí kosti (tzv. dog-bones) různých velikostí (rozsah velikostí 1:32) namáhaných v přímém tahu s rotačními okrajovými podmínkami publikovaných van Vlietem a van Mierem (van Vliet and van Mier 1998; van Vliet and van Mier 1999; van Vliet and van Mier 2000a; van Vliet and van Mier 2000b; van Mier and van Vliet 2003; Dyskin, van Vliet, and van Mier 2001). Konkrétně je studována „suchá“ série betonových vzorků A až F (rozměr D je v rozsahu od 50 do 1600

¹ Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D., Ing. Dita Matesová, Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 95, 602 00 Brno, tel. +420 54114 7370, e-mail vorechovsky.m@fce.vutbr.cz



Obrázek 1: Vzorky testované van Vlietem and van Mierem: série A až F, 2D model v programu ATENA

mm, viz obr. 1); tato série je ještě doplněna ověřovacími testy v tahu pomocí tlaku vzorku (tzv. Brazilská zkouška na „splitting tensile strength“). Cílem tohoto příspěvku je vysvětlení komplexního vlivu velikosti na střední hodnotu a rozptyl nominální pevnosti kombinací (i) simulace lokálních materiálových vlastností náhodným polem, (ii) vlivu oslabeného okraje a (iii) nástroje nelineární lomové mechaniky založeném na modelu kohezivní trhliny. Několik různých pohledů a vysvětlení experimentálně získaného vlivu velikosti již bylo předloženo. Nejprve byl diskutován vliv nerovnoměrného rozložení deformací v nejužším průřezu pomocí jednoduchého lineárního konstitutivního zákona (van Vliet and van Mier 1999; van Vliet and van Mier 2000a) a oddělení konstrukčního a materiálového vlivu velikosti. Výsledky byly také porovnány s Weibullovou teorií (Weibull 1939) založenou na modelu nejslabšího článku, který vcelku dobře podchytil střední hodnotu nominální pevnosti pro velikosti B až F (van Vliet and van Mier 1998; van Vliet and van Mier 1999; van Vliet and van Mier 2000a; van Vliet and van Mier 2000b; van Mier and van Vliet 2003). Bohužel sklon závislosti střední hodnoty na vlivu velikosti koresponduje s Weibullovým modulem 6, což neodpovídá naměřenému rozptylu pevností pro každou velikost. Nicméně, toto je otázkou Weibullova typu vlivu velikosti. Dále byl studován vliv Gaussovského kolísání napětí při nerovnoměrném zatěžování (Dyskin, van Vliet, and van Mier 2001) a vytvořený model zahrnující limitující rozdělení nezávislých Gaussovských veličin s lineárním trendem vystihuje velmi dobře experimentální výsledky. Van Vliet a van Mier také srovnali výsledky s „Delft lattice modelem“ s využitím jednoduchého lokálního elastického materiálového zákona s křehkým porušením s pravidelným i náhodným uspořádáním mřížky a získali velmi dobré výsledky. Statistická složka experimentálně naměřeného vlivu velikosti byla nedávno modelována autory (Lehký and Novák 2002) pomocí Weibullova rozložení pevnosti.

Autoři tohoto příspěvku se nejprve snaží o vysvětlení střední křivky vlivu velikosti deterministickými vlivy (bez uvažování lokální náhodné materiálové pevnosti). Toto částečně vysvětluje pokles střední křivky vlivu velikosti (MSEC) v dvojitém logaritmickém měřítku (nominální pevnost vs. charakteristický rozměr). Předpokládá se, že významný pokles střední pevnosti nejmenšího vzorku A bude podchycen modelováním oslabené okrajové vrstvy tloušťky asi 2 mm. Bude prezentována parametrická studie vlivu tloušťky oslabeného okraje a procentuální redukce pevnosti tohoto okraje vzhledem k plné pevnosti vzorku s ohledem na výslednou MSEC. V dalším je aproximována lokální materiálová pevnost pomocí autokorelovaného náhodného pole s cílem vystihnout celkový vliv velikosti s uvažováním rozptylu a nakonec kombinovat všechny zdroje dohromady.

2. Experiment

Výsledky experimentů jsou podrobně dokumentovány v prvních šesti referencích uvedených v úvodu. Zde stručně zmíníme pouze data nezbytná k osvětlení výpočtového modelu, všechny další informace lze nalézt v uvedených publikacích. Vzorky tvaru „dog-bone“ byly namáhány jednoosým tahem s excentricitou v geometrickém poměru vzhledem k vertikální ose symetrie $e = D/50$ mm. Zatěžovací desky se mohly volně otáčet ve všech směrech kolem bodu vnesení zatížení na horním i dolním líci betonových vzorků, ke kterým byly přilepeny. Testováno bylo šest různých velikostí, všechny vzorky byly geometricky podobné (viz obr. 1). Tloušťka vzorku byla konstantní (100 mm) což způsobuje přechod podmínek ze stavu blízkého rovinné deformaci pro nejmenší velikost na rovinnou napjatost pro velikost největší. Průměrná pevnost použitého betonu v tlaku byla 50 MPa a maximální zrno kameniva $d_{\max} = 8$ mm.

Pro účely srovnání je nutno definovat nominální pevnost. Excentricita zatížení byla v poměru vzhledem k geometrii (a elastické pole napětí jsou si podobná pro všechny velikosti), a proto lze její vliv zanedbat a definovat nominální napětí σ jednoduše jako funkci charakteristického rozměru D (maximální šířka vzorku), tahové síly F na působící lících betonu na excentricitě e a průřezové plochy ve středu vzorku $A (= 0.6Db)$:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1}{0.06} \frac{F}{D} \quad (1)$$

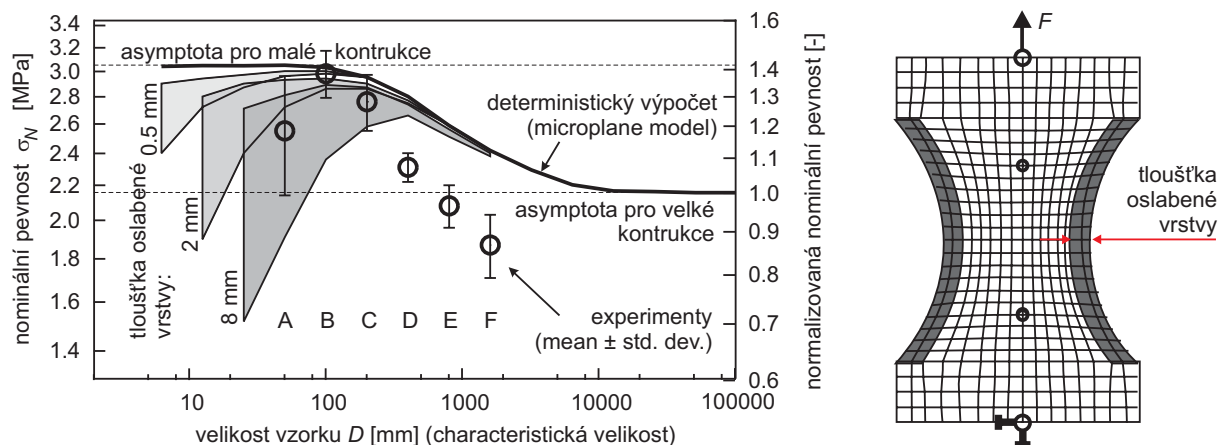
Pomocí nominálního napětí nyní definujeme nominální pevnost σ_N jako nominální napětí dosažené při maximální zatěžující síle ($\sigma_N = F_{\max}/A$).

Tabulka 1: Experimentální data: rozměry, nominální pevnost a počet vzorků.

	D	r	σ_N	Počet test.
		$0.725D$	střed. hodn. (směr. odch.)	vzorků
	mm	mm	MPa	#
A	50	36.25	2.54 (0.41)	10
B	100	72.5	2.97 (0.19)	4
C	200	145	2.75 (0.21)	7
D	400	290	2.30 (0.09)	5
E	800	580	2.07 (0.12)	4
F	1600	1160	1.86 (0.16)	4

3. Deterministický model

Významným zdrojem nerovnoměrnosti nominální pevnosti při změně velikosti je „energeticko-deterministický“ vliv velikosti způsobený přibližně konstantní velikostí lomové procesní zóny (FPZ) s přerozdělením napětí ve vzorcích všech velikosti, viz např. (Bažant and Planas 1998). Tento jev může být modelován např. metodou konečných prvků za podmínky, že jsou správně vystiženy lomová energie a celý tvar chování na vzestupné i sestupné větvi. V našem případě byl deterministický model vytvořen v programu ATENA (Červenka and Pukl 2005) s využitím Bažantova materiálového modelu microplane (verze 4) a crack band modelu (Bažant and Oh 1983) jako regularizace úlohy. Vzorky byly zatíženy přírůstkem deformace



Obrázek 2: Vlevo: vliv velikosti - experimentální data, deterministický výpočet a výpočet s vlivem oslabeného okraje. Vpravo: výpočtový model s oslabeným okrajem

v místě monitorované síly F (Obr. 1 vpravo). Byl zanedbán přechod z rovinné deformace na rovinnou napjatost s rostoucí velikostí vzorku a všechny velikosti byly modelovány jako rovinná napjatost. Experimentálně zjištěná pevnost v tlaku na krychlích 50 MPa sloužila jako vstupní parametr do ATENY, na základě kterého byly automaticky vygenerovány parametry microplane modelu: $K1=1.5644E-04$, $K2=500$, $K3=15$, $K4=150$, crack band $c_b = 30$ mm, počet mikroplošek 21. Velikost crack bandu byla změněna na 8 mm, tato hodnota lépe vystihuje experimentální výsledky, viz obr. 2 vlevo. Velikost crack bandu je vztažena k lomové energii materiálu a řídí, při které velikosti dojde k přechodu z duktilního na elasticko-křehké porušení. Za zmínku stojí fakt, že křivku vlivu velikosti lze posouvat doleva či doprava jako celek pouhou změnou c_b . Přesněji, deterministická nominální pevnost vypočtená pro danou hodnotu D při daném c_b je vždy nominální pevnost velikosti $k D$ vypočtená pomocí šířky pásu trhlin $k c_b$:

$$\text{pro } \forall k > 0 : \sigma_N^{\text{det}}(D, c_b) = \sigma_N^{\text{det}}(k D, k c_b) \quad (2)$$

4. Oslabený okraj

Pro ilustraci vlivu oslabeného okraje byla provedena parametrická studie (i) tloušťky okrajové vrstvy a (ii) a redukce materiálové pevnosti této vrstvy. Na obr. 2 je vyneseno šest vypočtených křivek vlivu velikosti deterministického modelu s oslabenou okrajovou vrstvou na obou zakřivených bocích vzorku (viz ilustrace vlevo). Konkrétně byly vybrány tři tloušťky t_w (0.5, 2 a 8 mm) a pro každou tloušťku 2 různé redukce parametru materiálové pevnosti r_t (0.5 and 0.9). V obrázku jsou pro každou tloušťku vyneseny dvě křivky a prostor mezi nimi je vyplněn šedou barvou (horní křivka vždy odpovídá redukci 0.9 a spodní redukci 0.5). Je zřejmé, redukce nominální pevnosti se stává zanedbatelnou se zmenšující se tloušťkou okraje vzhledem k velikosti konstrukce D . Navíc, poměr mezi redukovanou pevností a deterministickou nominální pevností lze zhruba použít jako redukční koeficient pevnosti pro libovolný poměr t_w/D . Na základě tohoto lze odvodit jednoduché pravidlo pro změny velikosti (scaling) pro libovolný kladný násobitel k jako redukční faktor r_σ pevnosti vzorku způsobený oslabeným okrajem vzhledem k deterministické pevnosti vzorku bez oslabení:

$$r_\sigma \left(\frac{t_w}{D} \right) = \frac{\sigma_N(D, t_w)}{\sigma_N^{\text{det}}(D)} \cong \frac{\sigma_N(kD, kt_w)}{\sigma_N^{\text{det}}(kD)} \quad (3)$$

$r_\sigma \in \langle r_t; 1 \rangle$, kde $\sigma_N^{\text{det}}(D)$ = deterministická pevnost pro velikost D ; $\sigma_N(D, t_w)$ = deterministická pevnost pro velikost D a tloušťku oslabeného okraje t_w ; r_t = redukční faktor materiálové pevnosti oslabené vrstvy $r_t \in \langle 0; 1 \rangle$.

Nejlepší výsledky byly získány pro $t_w = 2$ mm a redukční koeficient $r_t = 0.5$. Tato tloušťka zhruba koresponduje velikosti kameniva, která je nejvíce zastoupena na okrajích (zastoupení velikosti zrn u okraje je jistě jiné než v celém objemu vzorku). Jak je zřejmé z obr. 2, jsme schopni zachytit prudký pokles pevnosti vzorku, u kterého je tloušťka t_w nezanedbatelná vzhledem k nejmenší šířce vzorku 0.6 D . Deterministický vliv velikosti (přechod z plastické pevnosti na elastickou) je ve výpočtu automaticky zohledněn, protože je použit stejný materiálový model a parametry. Nicméně nejdůležitější vliv redukce pevnosti pro velké vzorky nelze modelovat výše popsanými postupy. Takto také není možno modelovat variabilitu pevností, protože doposud nebyla uvažována žádná náhodnost v modelu.

5. Stochastický model

Je velmi pravděpodobné, že výrazný vliv velikosti na experimentálně určenou pevnost je způsoben zejména prostorovou variabilitou/náhodností lokální materiálové pevnosti. Jako náhodný je tedy uvažován v modelu microplane parametr vztažený k pevnosti, v ATENĚ označený jako K1 a je provedena simulace typu Monte Carlo pro každou velikost vzorku. Konkrétně je vygenerováno 64 realizací náhodného pole parametru K1 pro každou velikost a spočteny odezvy (kompletní diagram zatížení-průhyb, pole napětí, rozvoj trhlin, atd.). Numerický test ukázal, že parametr K1 má přibližně lineární vztah k lokální pevnosti konstrukce ve velkém rozsahu kolem střední hodnoty použité v deterministickém modelu. Důvodem pro generování lokální materiálové pevnosti náhodným polem namísto nezávislými náhodnými veličinami je domněnka, že ve skutečnosti se pevnost dvou blízkých míst navzájem silně ovlivňuje (je korelována) a takový vztah lze vhodně modelovat pomocí autokorelovaného náhodného pole. Rozložení lokální pevnosti bylo uvažováno jako identické v každém materiálovém bodě, konkrétně s Weibullovým rozložením. Lokální pravděpodobnost poruchy p_f (kumulativní distribuční funkce F_σ) závisí na hladině napětí σ a má tvar:

$$p_f = F_\sigma(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (4)$$

kde σ_0 = parametr měřítka Weibullova rozložení [MPa], hodnota 1.6621E-4 použita pro K1; m = parametr tvaru Weibullova rozložení (bezrozměrný, závislý pouze na cov = variačním koeficientu). $m = 7.91$ užito pro hodnotu náhodného K1.

Abychom získali výsledky konzistentní s předešlou deterministickou analýzou, uvažujeme deterministickou hodnotu K1 jako střední hodnotu. Druhý parametr Weibullova rozložení byl nastaven s ohledem na cov nominální pevnosti nejmenšího vzorku (experimentálně zjištěný cov pro velikost A byl 0.16). Tato volba je podpořena skutečností, že pro velikost A bylo testováno nejvíce vzorků (10 realizací, viz Tab. 1). Tedy odhad rozptylu má větší statistickou významnost než u ostatních velikostí. A navíc se domníváme, že vliv oslabeného okraje redukuje pouze střední nominální pevnost, ale neovlivňuje rozptyl pevností. Pro jednoduchost byla použita hodnota cov=0.15 (15% relativní variabilita lokální materiálové pevnosti). Tato hodnota je

relativně vysoká, což naznačuje relativně nízký Weibullův modul zmiňovaný výše. Diskretizované náhodné pole je soubor autokorelovaných náhodných veličin. Nejdůležitějším parametrem (vedle autokorelační funkce) je autokorelační délka, která řídí vzdálenost, ve které je náhodná materiálová pevnost korelována. Použili jsme kvadratickou exponenciální autokorelační funkci:

$$R = \exp \left[- \left(\frac{d}{l_r} \right)^2 \right] \quad (5)$$

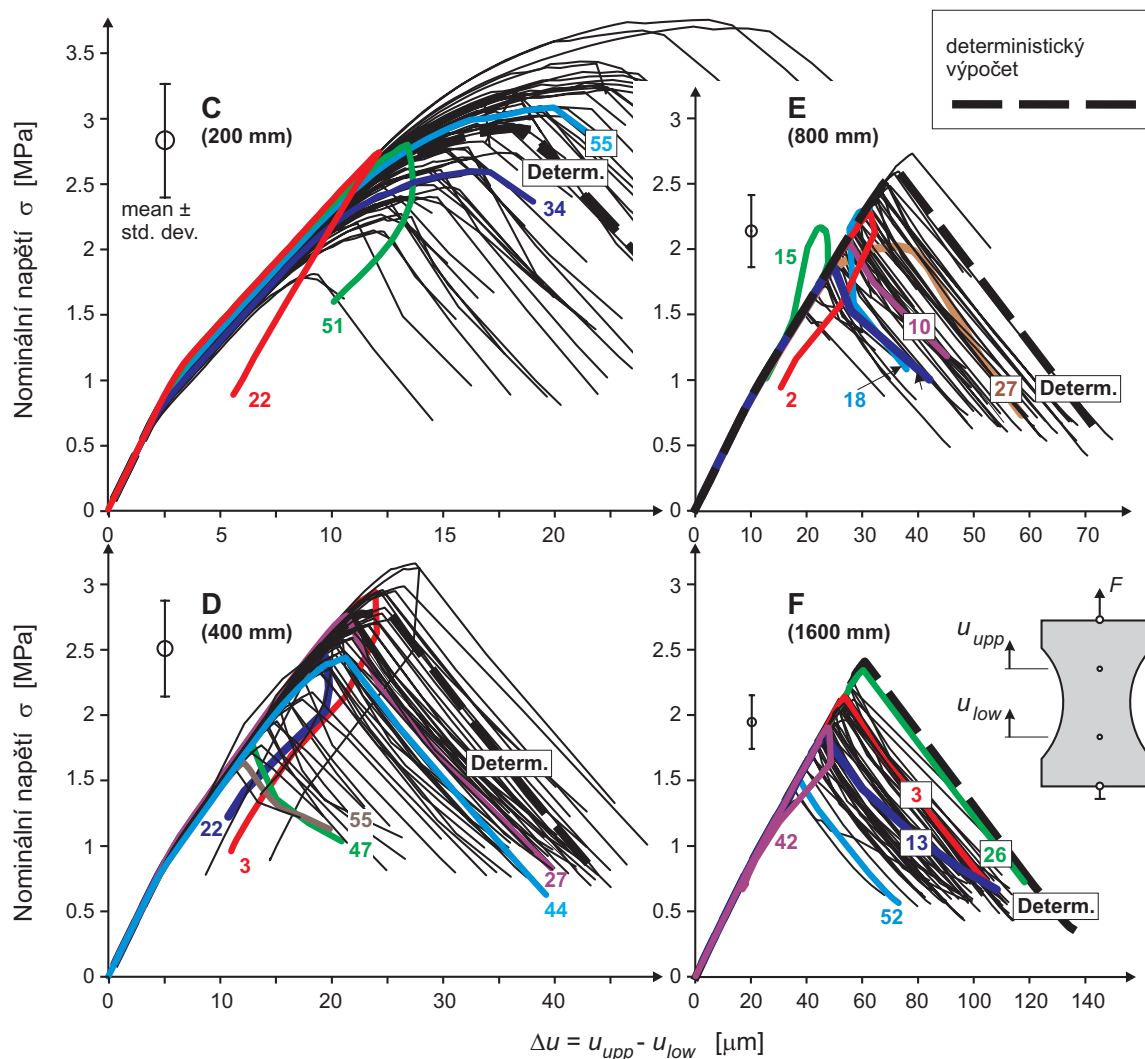
kde d = vzdálenost dvou bodů; l_r = korelační délka, pro náhodné pole K1 použita hodnota 80 mm.

Lze ukázat, že realizace náhodného pole lokální pevnosti K1 pro vzorky, které jsou mnohem menší než jedna autokorelační délka, je konstantní funkce v celém rozsahu a všechny lokální pevnosti celého vzorku mohou být reprezentovány pomocí náhodné veličiny (namísto počtu prostorově korelovaných veličin). Protože nominální pevnost vzorků je pouze jednoduchá transformace vstupního pevnostního parametru K1 (bez prostorové variability, která by dovolila lokalizovat trhlinu jinde oproti deterministické analýze), víme, že střední hodnota nominální pevnosti nejmenšího vzorku bude stejná jako v deterministické analýze. Toto je důvodem využití K1 z deterministické analýzy jako střední hodnoty náhodného pole parametru K1.

Realizace náhodných polí vypočítané v místech integračních bodů byly simulovány metodou popsanou v (Vořechovský 2005; Vořechovský 2004b; Vořechovský and Novák 2005). Simulovaná náhodná pole jsou stacionární, izotropní a homogenní. Stručně řečeno, ortogonální transformace kovarianční matice byla použita v kombinaci s Latin Hypercube Sampling náhodné složky expandovaného pole (Novák, Lawanwisut, and Bucher 2000). Tato kombinace je při generování náhodných polí velmi efektivní, s vysokou přesností odhadu statistické odezvy ve srovnání s klasickou metodou Monte Carlo. Numerické studie dokumentující tuto efektivitu jsou např. (Vořechovský 2005; Vořechovský 2004b; Vořechovský and Novák 2005). Toto je velmi důležitý rys v případech kdy výpočet každé odezvy trvá relativně dlouhou dobu. V našem případě je jeden výpočet reprezentován nelineárním výpočtem odezvy metodou konečných prvků pomocí microplane modelu. Je zřejmé, že taková náročnost musí být vyváжена co nejmenším možným počtem simulací. Bylo testováno, že 64 simulací je dostatečné množství poskytující stabilní a přesný statistický odhad parametrů pole (průměry, odhady směrodatné odchylky, autokorelační strukturu) a také reprodukovatelné odhady statistik odezvy konstrukce (nominální pevnost, atd.).

Automatická simulace všech odezev konstrukce byla provedena pomocí software SARA integrující programy (i) ATENA (výpočet odezvy) na jedné straně a (ii) FREET (Vořechovský 2004b; Novák, Vořechovský, and Rusina 2006; Novák, Vořechovský, and Rusina 2003) na straně druhé (generace realizací náhodných parametrů, statistické vyhodnocení).

Na obr. 3 je zobrazena vypočtená sada diagramů zatížení-průhyb a ilustrace definice posunutí (separace dvou měřicích bodů). Vybrané diagramy jsou zvýrazněny a odpovídající realizace náhodného pole pevnosti jsou na obr. 4. Písmeno značí velikost vzorku a číslo pořadovým číslem simulace. Vedle nejběžněji se vyskytujících křivek zatížení-průhyb je zvýrazněno i několik průběhů neobvyklého tvaru (typu snap-back nebo „smyčka“). V běžné experimentální praxi mohou být takovéto průběhy naměřeny pouze výjimečně. Jak bude diskutováno později, v našem případě byly získány některé neobvyklé a neočekávané tvary průběhů, což je částečně dáno definicí přemístění Δ_u a zejména prostorovou náhodností s vysokou variabilitou. Srovnání maximální pevnosti deterministického diagramu zatížení-průhyb se střední hodnotou nominální pevnosti přibližuje Obr. 3. Rozdíl mezi nimi roste s velikostí vzorku. Zatímco se střední pevnost



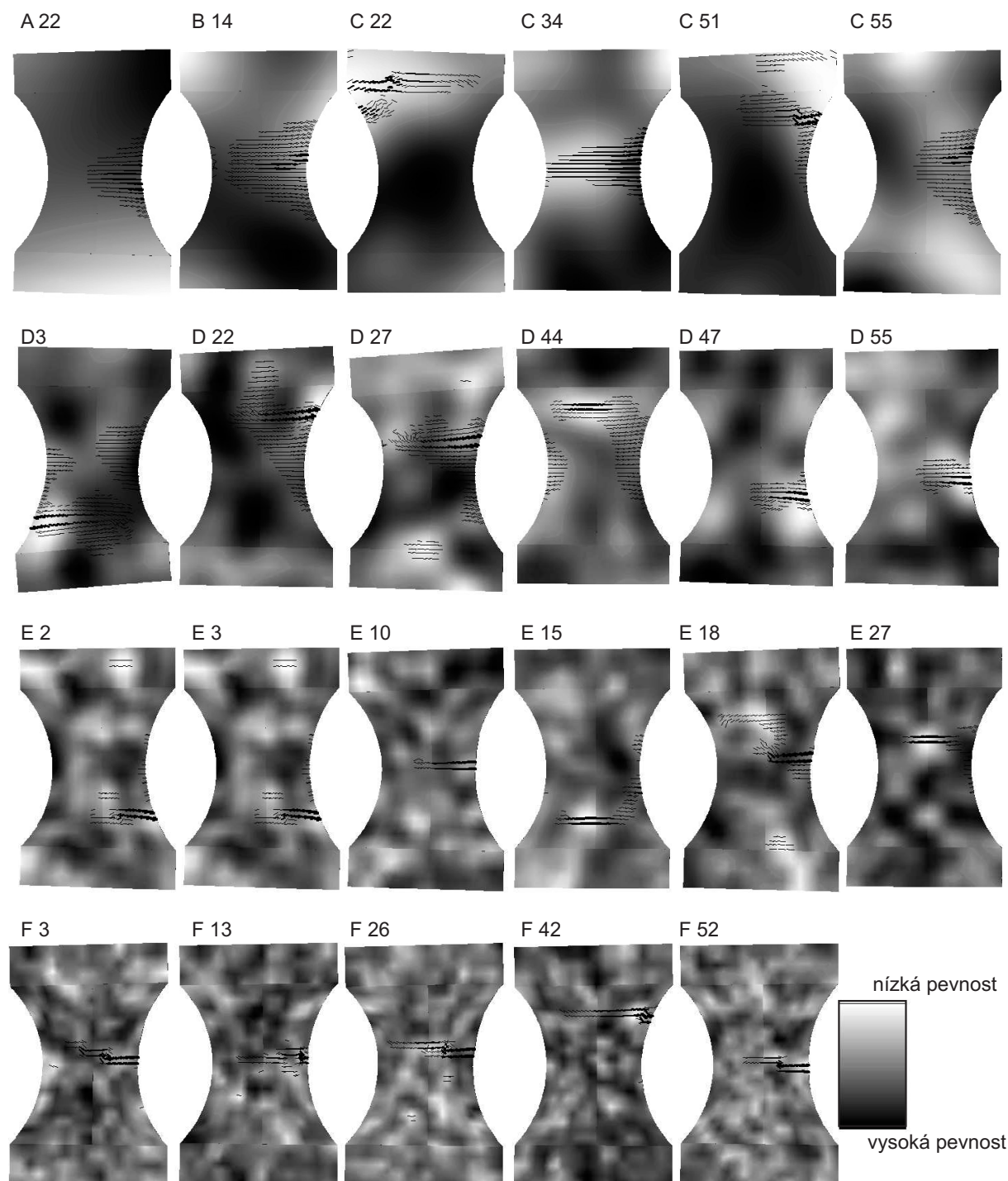
Obrázek 3: Diagramy zatížení-posunutí (64 realizací) pro velikosti C, D, E a F. Vybrané průběhy jsou zvýrazněny.

velikosti C takřka kryje s maximální hodnotou deterministického diagramu, u vzorku E je deterministická křivka nad všemi 64 náhodnými realizacemi diagramu, viz Obr. 3.

Na obr. 4 jsou zobrazeny vybrané realizace náhodného pole pevnosti pro všechny velikosti A - F. Poznamenejme, že podobné pravidlo jako v rovnici 2 lze napsat i pro význam statistické délky (zde ve formě autokorelační délky l_r). Pro dané náhodné pole pevnosti (statistické rozdělení a autokorelační strukturu) lze vztah mezi l_r a D zapsat jako:

$$\text{for } \forall k > 0 : \sigma_N(D, l_r) = \sigma_N(k D, k l_r) \quad (6)$$

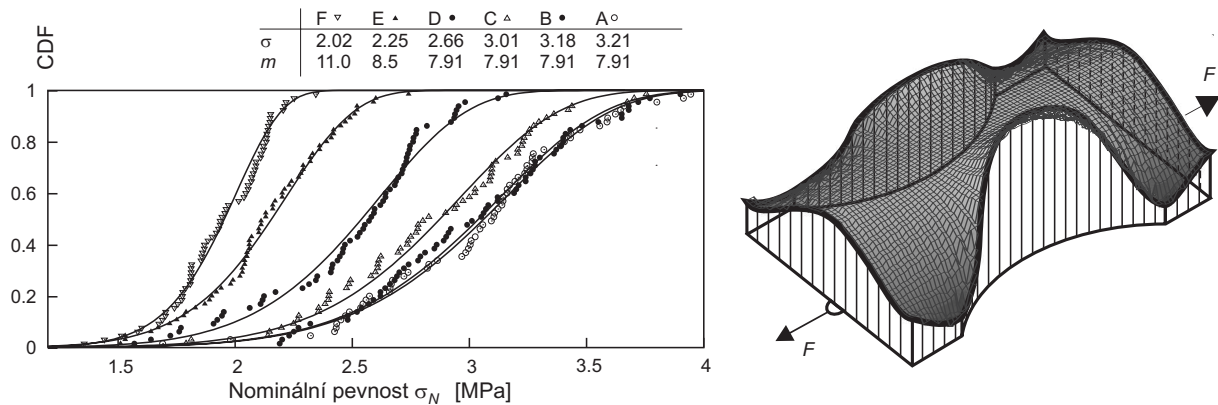
Je zřejmé, že s poklesem poměru autokorelační délky a velikosti vzorku D roste míra prostorové fluktuace realizace náhodného pole. Tedy roste počet míst s malou materiálovou pevností (možná místa porušení). Jinými slovy, s rostoucí velikostí vzorku roste pravděpodobnost výskytu slabého místa v oblastech s vysokým napětím. Tento jev byl již dávno pojmenován jako vliv velikosti. Klasický statistický vliv velikosti je modelován pomocí jednoduchého „modelu nejslabšího článku“ a obvykle aproximován Weibullovým zákonem (Weibull 1939). Nicméně, jak bylo vysvětleno v (Vořechovský 2004b; Vořechovský 2004a; Vořechovský and Chudoba 2006),



Obrázek 4: Simulace realizací náhodného pole pevností a příslušející mapy trhlin v deformovaných vzorcích těsně po dosažení maximální síly $F_{\max}$. Výpočet pole a šířky trhlin v integračních bodech.

klasický Weibullův model není schopen zohlednit prostorovou korelaci mezi lokálními materiálovými pevnostmi. Weibullův model je založen na IID (nezávislosti a identickém rozložení) náhodných veličin uspořádaných sériově (řetěz). Vliv takových předpokladů je ten, že pevnost nekonečně malého vzorku je nekonečná. Ve Weibullově modelu je každá konstrukce ekvivalentní řetězu namáhanému v tahu, řetězu nezávislých členů s identickým statistickým rozložením na-

pětí. Jestliže je lokální pevnost modelována autokorelovaným náhodným polem (a uvažujeme-li autokorelační délku jako materiálovou vlastnost), je asymptota pevnosti malých velikostí ekvivalentní rozložení lokální materiálové pevnosti. Na druhé straně, asymptota velkých velikostí je přesně rovna asymptotě Weibullova modelu (Vořechovský 2004b; Vořechovský 2004a; Vořechovský and Chudoba 2006), (pro vhodný výběr referenční délky a příslušného parametru měřítka Weibullova rozložení ve Weibullově modelu). Autokorelační délka hraje důležitou roli statistického „scaling“ délky v materiálu řídící přechod z pevnosti jako náhodné veličiny (plná korelace v malých konstrukcích) na mnoho nezávislých lokálních pevností (velké konstrukce, Weibullův model).



Obrázek 5: Vlevo: odhad rozložení nominální pevnosti vzorků s Weibullovským náhodným polem K1. Nejlepší aproximace Weibullovým rozložením (Rov. 4). Vpravo: spočtené pole hlavních tahů na vzorku při elastickém stavu napjatosti.

Rozložení trhlin ve dvou náhodně vybraných vzorcích A 22 a B 14 (viz obr. 4) ukazuje nejčastější místa lokalizace porušení. Malá excentricita zatížení a relativně úzký krček vzorku ve tvaru psí kosti s velkou jistotou zaručuje inicializaci trhliny na pravé straně zúžení. Realizace náhodného pole v obou případech (A, B) jsou téměř konstantní a tudíž nezbyvá prostor pro uplatnění principu nejslabšího článku. Struktura trhlin C 22 ve stejném obrázku dokládá, že lokální pevnost určitého místa může být tak malá, že relativně malé napětí v tomto místě může inicializovat porušení. Pootočení desek ve vzorku C 22 bylo v opačném směru oproti běžnému případu. Protože porušení bylo lokalizováno mimo vzdálenost měřících bodů, které monitorují posunutí Δ_u , tak odpovídající σ - Δ_u diagram na Obr. 3 je ve tvaru snap-back. To stejné platí pro C 51, zatímco C 34 a C 55 jsou typickými reprezentanty σ - Δ_u diagramů a rozložení trhlin. Podobné rysy mohou u série D. Pozice trhlin u D 3 a D 22 způsobila snap back, zatímco D 27, D 44, D 47 a D 55 ilustrují náhodné realizace inicializace trhliny vedoucí k obvyklejšímu tvaru σ - Δ_u diagramu z našeho virtuálního testovacího zařízení.

Velmi zajímavé jsou diagramy E 15 a E 18. „Smyčky“ na Obr. 3 jsou výsledkem poněkud nešťastného případu trhlin blízko měřících bodů. Může se stát, že v jistém místě zatěžování se spodní měřící bod začne pohybovat rychleji než horní a výsledkem toho je neobvyklý tvar σ - Δ_u diagramu u E 15. Vzorek se může později začít porušovat v krčku, jak se stalo v případě E 18. U série F je autokorelační délka tak malá ve srovnání s rozměry vzorku, že trhlina se opět inicializuje na pravé straně krčku téměř ve všech případech, viz obr. 3 a 4. U série A nebyla v žádné simulaci získána křivka typu snap-back způsobená rozvojem trhlin mimo vzdálenost měřících bodů a v případech B a F byl zaznamenán pouze jeden případ, viz Obr. 3. Lze prohlásit, že nejzajímavější procesy probíhají ve vzorcích o velikosti srovnatelné s jedno až dvojnásobnou

korelační délkou (oblast přechodu z pevnosti jako jedné náhodné veličiny na soubor nezávislých proměnných).

Poznamenejme, že na rozdíl od experimentů jsme nekontrolovali přítěžování přírůstkem posunutí Δ_u , ale posunutím na horním a dolním líci a tudíž bylo možno bez problémů zaznamenat diagramy typu snap-back.

Jsme schopni simulovat náhodnou odezvu vzorků menších než A s náhodným polem K1 a navíc můžeme k reprezentaci náhodnosti v tak malých vzorcích jednoduše použít generování pomocí náhodných veličin. Na druhé straně je ale velmi problematické simulovat realizace náhodného pole pro vzorky o mnoho větší než F. I přes zájem prvního autora o techniky řešení technických obtíží výpočtů velkých konstrukcí stochastickými konečnými prvky (Vořechovský, Chudoba, and Jeřábek 2006), bude zde použit jiný způsob. Naštěstí je totiž v našich výpočtech náhodná pouze pevnost a lze využít klasického Weibullova integrálu pro velké konstrukce. Jak bylo vysvětleno v (Vořechovský 2004b; Vořechovský 2004a; Vořechovský and Chudoba 2006), jestliže je konstrukce dostatečně velká, prostorová korelace lokální pevnosti se stává nedůležitou a Weibullův integrál dává řešení ekvivalentní plné simulaci stochastickými konečnými prvky. Stručně naznačme výpočtový postup vyhodnocení Weibullova integrálu pro pravděpodobnost poruchy konstrukce, detaily mohou být nalezeny např. v (Bažant and Planas 1998). Weibullův integrál má tvar:

$$-\ln(1 - P_f) = \int_V c[\sigma(\mathbf{x}); m, \sigma_0] dV(\mathbf{x}) \quad (7)$$

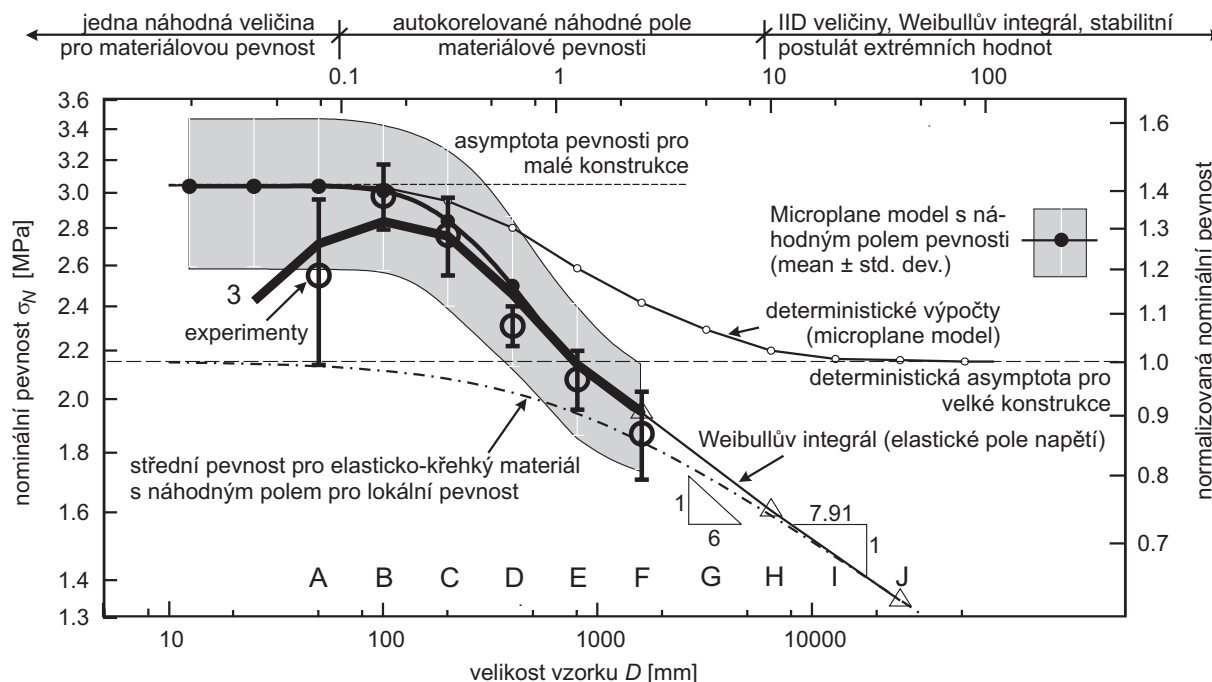
kde P_f = pravděpodobnost (kumulativní hustota pravděpodobnosti) zatížení vedoucí k selhání konstrukce; $c[\bullet]$ = funkce koncentrace napětí.

Existuje několik možných definic pro funkci koncentrace napětí, viz (Bažant and Planas 1998). U zde studovaných vzorků je hlavní složkou tenzoru napětí normálové napětí σ_{yy} . Pole napětí σ_{yy} téměř splývá s hlavními tahy σ_I . Protože jsou uvažována pouze tahová napětí jako původce porušení, definujeme funkci koncentrace napětí jednoduše jako:

$$c[\sigma(\mathbf{x}); m, \sigma_0] = \frac{1}{V_0} \left\langle \frac{\sigma_I(\mathbf{x})}{\sigma_0} \right\rangle^m \quad (8)$$

kde V_0 = referenční objem asociovaný s dvojicí parametrů m a σ_0 .

Na obr. 5 vpravo je zobrazeno spočtené pole hlavních tahů po ploše vzorku v elastickém stavu napjatosti. Numerickou integraci tohoto pole napětí pro různé velikosti vzorků a pravděpodobnosti poruchy lze vhodně přepsat do bezrozměrných souřadnic, čímž se výpočet stává velmi snadným. Výsledná střední hodnota vlivu velikosti je vynesena na obr. 6 (asymptotická křivka středních hodnot vlivu velikosti). Poznamenejme, že jiný způsob simulace náhodné pevnosti velkých konstrukcí je možný s využitím stabilního postulátu extrémních hodnot (Fisher and Tippett 1928). Takový výpočtový postup je elegantní trik využívající rekurzivní vlastnosti distribuční funkce a je popsán v (Bažant, Vořechovský, and Novák 2005; Novák, Bažant, and Vořechovský 2003) společně s konkrétní aplikací. Výsledky takového přístupu (a také Weibullova integrálu jak zde byl prezentován) jsou platné pouze pro extrémně velké konstrukce, kde vymizí vliv konstrukční nelinearity (způsobující přerozdělení napětí). Pro malé velikosti zde vznikají dva problémy: (i) prostorová korelace lokální pevnosti a (ii) vliv redistribuce napětí. Výsledkem musí být přímka v dvojitém logaritickém měřítku velikosti vs. pevnosti (průběh vlivu velikosti je mocninový zákon). Přístup založený na jednoduché změně měřítka u Weibullových náhodných veličin sdruženými s oblastmi konstrukce různých velikostí byl použit v (Lehký and



Obrázek 6: Srovnání výsledků vlivu velikosti.

Novák 2002). Autoři zde jednoduše použili pravidlo pro „scaling“ pouze pro velikosti větší než velikost C a toto jim pomohlo simulovat experimentální data. Použitý numerický model ovšem nedovoľoval volné otáčení desek a nebyla modelována excentricita zatěžující síly, což oboje z našeho pohledu negativně ovlivnilo výsledky statistické odezvy. Předepsáním okrajových podmínek desek bez volné rotace se vzorek porušuje jinak než v případě volně rotujících desek. Toto je velmi důležité zejména při prostorově náhodném rozložení pevnosti.

6. Analýza výsledků a diskuse

Zavedením třech různých délek měřítka (scaling lengths) jsme schopni nezávisle začlenit tři různé vlivy do modelu popisujícího tři vlivy velikosti na nominální pevnost. Šířka pruhu trhlin c_b (deterministické měřítko) řídí u kterých velikostí dojde k přechodu z duktilního na elasticko-křehké chování a tudíž také ovlivňuje přechod mezi dvěma horizontálními asymptotami závislosti vlivu velikosti (viz obr. 2). Druhá zavedená délka (tloušťka oslabeného okraje t_w) spolu s redukcí materiálové pevnosti ovlivňuje u kterých velikostí dojde k významnému poklesu nominální pevnosti. Tato redukce zesiluje s klesající velikostí vzorku a způsobuje opačný sklon křivky vlivu velikosti oproti deterministické a statistické křivce (viz Obr. 2). Poslední uvažovanou délkou je autokorelační délka l_r řídící přechod od náhodnosti způsobené rozptylem materiálové pevnosti (jedna náhodná veličina pro materiálovou pevnost) k sadě nezávislých shodně rozložených náhodných veličin lokální materiálové pevnosti skrz autokorelované náhodné pole. Jinými slovy řídí konvergenci k Weibullovu statistickému vlivu velikosti založenému na principu nejslabšího článku. Taková souhra tří nezávislých materiálových délek je velmi komplexní. Je takřka nemožné určit všechny tyto parametry na základě dostupných experimentálních dat a to i v případě, že by model odrážející tyto tři vlivy byl zcela správný.

Na obr. 5 vlevo je zobrazen odhad distribuční funkce nominální pevnosti všech testovaných velikostí jak byl získán z plné stochastické simulace metodou konečných prvků, kde byl parametr

K1 modelován náhodným polem. Tabulka nad grafy prezentuje parametry Weibullova rozložení, které vedou k nejlepší aproximaci empirických histogramů. Weibullův modulus z z nějakých důvodů roste pro velikosti E a F i když sklon příslušné křivky vlivu velikosti na obr. 6 naznačuje hodnotu 7.91 (očekávaná hodnota vyplývající z Weibullova vlivu velikosti elasticko-křehkých konstrukcí). Odchylky mohou být způsobeny numerickými chybami; zejména nedostatečnou diskretizací náhodného pole s ohledem na autokorelační délku: variabilita není dostatečně podchycena hustotou integračních bodů, protože síť konečných prvků u modelů velkých velikostí nebyla zahuštěna. Přesněji řečeno, počet konečných prvků byl stejný u všech velikostí z důvodů šetření výpočtového času.

Výsledné nominální pevnosti pro všechny velikosti získané prostředky nelineární stochastické FEM jsou vyneseny a srovnány s experimenty na obr. 6. Je zřejmé, že počínaje velikostí C se závislost nominální pevnosti na velikosti stává převážně statistickou a nejsme schopni ji modelovat samostatným deterministickým modelem, viz např. (Novák, Vořechovský, Pukl, and Červenka 2001). Zahrnuty jsou taktéž velikosti F, H a J spočtené Weibullovým integrálem (Rov. 7 a 8). Weibullovo řešení je přímka a reprezentuje asymptotický vliv velikosti konstrukcí způsobený výhradně prostorovou náhodností pevnosti. Nad uvedenými závislostmi jsou zobrazeny oblasti velikostí pro různé výpočtové postupy použité pro modelování náhodné pevnosti.

Silná křivka na obr. 6 (označená jako 3) je výsledkem kombinace všech tří vlivů zde popsaných. Křivka byla získána uplatněním bezrozměrného redukčního faktoru r_σ jako vlivu oslabeného okraje na výsledky nelineární stochastické FEM (tloušťka okraje $t_w = 2$ mm, redukce $r_t = 0.5$). Toto byl jednoduchý způsob, jak odhadnout konečný výsledek modelu kombinujícího všechny vlivy. Tento jednoduchý způsob není zcela přesný, protože uplatňuje redukci okrajové vrstvy až na konečnou hodnotu výsledku simulací s náhodným polem. Obecně nelze takto postupovat, protože zdroje vlivu velikosti spolu interagují. Pro získání konzistentních výsledků by bylo třeba modelovat lokální pevnosti náhodným polem a použít redukci okrajové vrstvy pro každou realizaci pole zvlášť. Toto by pomohlo inicializovat trhlinu v okrajové vrstvě častěji. Nicméně čas k provedení plných simulací by byl nezbytný. Na první pohled je zřejmé, že pevnost velikosti A neodpovídá zcela experimentu (i přes odpovídající rozptyl). Věříme, že to lze částečně napravit uvažováním podmínek rovinné deformace a zejména důležitý je fakt, že tloušťka (0.1 m) je větší než šířka vzorku a 3D model by často dovolil inicializaci trhliny z přední či zadní plochy vzorku (viz Obr. 1 vlevo). Tento jev by zajisté vedl k poklesu pevnosti velikosti A.

Korelační délka l_r byla v této studii nastavena na hodnotu přibližně rovnou tloušťce vzorku. Právě při této délce začíná být variabilita lokální pevnosti významná a může zkreslit výsledky velmi malých velikostí. Autoři experimentů vždy upozorňovali, že díky betonáži vzorků má přední vrstva rozdílné materiálové vlastnosti než vrstva zadní. Tento vliv nyní modelujeme pomocí 3D modelu, výsledky jsou však mimo rozsah tohoto příspěvku a 3D vlivy jsou zde zanedbány (Vořechovský and Matesová 2006).

7. Závěry

Provedené numerické simulace náhodné odezvy zkoušky v tahu na vzorcích tvaru psí kosti s rotačními okrajovými podmínkami publikované van Vlietem a van Mierem jsou v dobré shodě s publikovanými výsledky. Na základě srovnání trendu závislosti nominální pevnosti na velikosti vzorku lze říci, že numerický model zahrnující tři délková měřítka je schopen postihnout nejdůležitější mechanismy porušení. Zejména bylo ukázáno, že část experimentálně naměřeného vlivu

velikosti lze postihnout na deterministické úrovni s pomocí deterministické délky reprezentované v našem modelu šířkou pásu trhlin. V dalším je vliv velikosti na pevnost velkých vzorků modelován pomocí autokorelovaného náhodného pole. Důležitá statistická délka je zavedena formou autokorelační délky pole. Forma asymptotického vlivu velikosti způsobeného náhodnou pevností je klasický Weibullův mocninný zákon. Náhodným generováním pole lokální pevnosti jsme schopni modelovat také náhodný rozptyl výsledné nominální pevnosti. Poslední vliv zde prezentovaný je oslabená okrajová vrstva konstantní šířky. Tento oslabený okraj má za následek redukci pevnosti malých vzorků, což vede k opačnému trendu než u dvou předešlých vlivů velikosti. Prezentovaná studie dokumentuje dobře známý fakt, že experimentální určování materiálových parametrů (potřebných pro racionální a bezpečný návrh konstrukcí) je velmi obtížné u kvazikřehkých materiálů jako je beton.

8. Poděkování

Prezentované výsledky byly dosaženy s finanční podporou projektu Grantové agentury České Republiky č. 103/04/2092. Autoři děkují panu Sadílkovi za pomoc při rozsáhlých numerických simulacích.

References

- Bažant, Z. P. and B.-H. Oh (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures* 16, 155–177.
- Bažant, Z. P. and J. Planas (1998). *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton and London.
- Bažant, Z. P., M. Vořechovský, and D. Novák (2005). Asymptotic prediction of energetic-statistical size effect from deterministic finite element solutions. *Journal of Engineering Mechanics*, in review.
- Dyskin, A., M. van Vliet, and J. van Mier (2001). Size effect in tensile strength caused by stress fluctuations. *International Journal of Fracture* 108, 43–61.
- Fisher, R. A. and L. H. C. Tippett (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc., Cambridge Philosophical Society* 24, 180–190.
- Gutiérrez, M. A. and R. de Borst (2002). Deterministic and probabilistic material length-scales and their role in size-effect phenomena. In R. Corotis, G. Schuëller, and M. Shinozuka (Eds.), *ICoSSaR '01 8th International Conference on Structural Safety and Reliability*, Newport Beach, California, pp. 129–136. A.A.Balkema Publishers, Netherlands; Swets & Zeitinger.
- Lehký, D. and D. Novák (2002). Nonlinear fracture mechanics modeling of size effect in concrete under uniaxial tension. In P. Schießl (Ed.), *4th International Ph.D. Symposium in Civil Engineering, volume 2*, Munich, Germany, pp. 410–417. Millpress, Rotterdam.
- Novák, D., Z. P. Bažant, and M. Vořechovský (2003). Computational modeling of statistical size effect in quasibrittle structures. In D. Kiureghian, Madanat, and Pestana (Eds.), *ICASP 9, International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, San Francisco, USA, pp. 621–628. Millpress, Rotterdam.

- Novák, D., W. Lawanwisut, and C. Bucher (2000). Simulation of random fields based on orthogonal transformation of covariance matrix and latin hypercube sampling. In M. G. I. Schuëller P. D. Spanos Der Kiureghian and Pestana (Eds.), *International Conference on Monte Carlo Simulation MC 2000*, Monaco, Monte Carlo, pp. 129–136. Swets & Zeitlinger, Lisse (2001).
- Novák, D., M. Vořechovský, R. Pukl, and V. Červenka (2001). Statistical nonlinear analysis - size effect of concrete beams. In R. de Borst, J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, and J. G. M. van Mier (Eds.), *4th Int. Conference FraMCoS – Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, Cachan, France, pp. 823–830. Swets & Zeitlinger, Lisse.
- Novák, D., M. Vořechovský, and Rusina (2006). FREET – Feasible Reliability Engineering Efficient Tool. Technical report, Institute of Engineering Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology. User's and Theory Guides, Program documentation, <http://www.freet.cz>.
- Novák, D., M. Vořechovský, and R. Rusina (2003). Small-sample probabilistic assessment - FREET software. In D. Kiureghian, Madanat, and Pestana (Eds.), *ICASP 9, International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, San Francisco, USA, pp. 91–96. Millpress, Rotterdam.
- van Mier, J. and M. van Vliet (2003). Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 70, 2281–2306.
- van Vliet, M. and J. van Mier (1998). Experimental investigation of size effect in concrete under uniaxial tension. In H. Mihashi and K. Rokugo (Eds.), *FRAMCOS-3*, Japan, pp. 1923–1936. Aedificatio Publishers.
- van Vliet, M. and J. van Mier (1999). Effect of strain gradients on the size effect of concrete in uniaxial tension. *International Journal of Fracture* 95, 195–219.
- van Vliet, M. and J. van Mier (2000a). Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Engineering Fracture Mechanics* 65, 165–188.
- van Vliet, M. and J. van Mier (2000b). Size effect of concrete and sandstone. *Engineering Fracture Mechanics* 45, 91–108.
- Červenka, V. and R. Pukl (2005). Atena program documentation. Technical report, Červenka Consulting, Prague, Czech Republic. <http://www.cervenka.cz>.
- Vořechovský, M. (2004a). Statistical alternatives of combined size effect on nominal strength for structures failing at crack initiation. In M. Stibor (Ed.), *Problémy lomové mechaniky IV (Problems of Fracture Mechanics IV)*, Academy of Sciences - Institute of physics of materials of the ASCR, pp. 99–106. Brno University of Technology.
- Vořechovský, M. (2004b). *Stochastic fracture mechanics and size effect*. Ph. D. thesis, Brno University of Technology, Brno, Czech Republic.
- Vořechovský, M. (2005). Simulation of cross correlated random fields by series expansion methods. *Structural safety*, in review.
- Vořechovský, M. and R. Chudoba (2006). Stochastic modeling of multi-filament yarns II: Random properties over the length and size effect. *International journal of Solids and Structures* 43(3-4), 435–458.

- Vořechovský, M., R. Chudoba, and J. Jeřábek (2006). Adaptive probabilistic modeling of localization, failure and size effect of quasi-brittle materials. In *ECCM-2006 - III European Conference on Computational Mechanics*, Lisbon, Portugal, pp. in print.
- Vořechovský, M. and D. Matesová (2006). Interplay of sources of size effect in concrete specimens. *International Journal of Solids and Structures*, under preparation.
- Vořechovský, M. and D. Novák (2005). Simulation of random fields for stochastic finite element analyses. In G. Augusti, G. I. Schuëller, and M. Ciampoli (Eds.), *ICoSSaR '05 the 9th International Conference on Structural Safety and Reliability*, Rome, Italy, pp. 2545–2552. Millpress Rotterdam, Netherlands.
- Weibull, W. (1939). The phenomenon of rupture in solids. *Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingenioersvetenskaps Akad. Handl.)*, Stockholm 153, 1–55.