

AN INVESTIGATION OF INFLUENCE OF THE WEIGHTING CONSTANTS TO THE OPTIMAL CONTROLLED ACTIVE SUSPENSION

J. Úradníček*, M. Musil*

Summary: *This paper deal with investigation of the influence of weighting constant to the optimal controlled active suspension without preview. Main objective of this paper is explanation of the proper selection of weighting constant. Paper also points to the possibilities of system adaptability to the different type of road excitation trough alterations of weighting constant directly during vehicle running.*

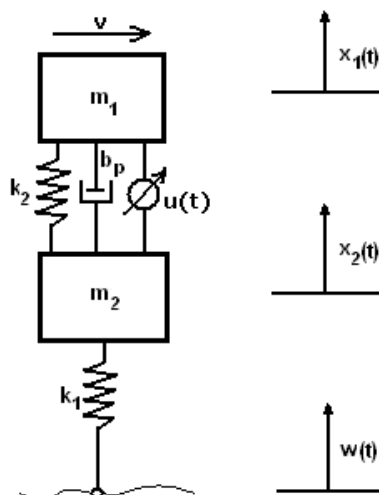
1. Úvod

Vhodný návrh odpruženia automobilu spočíva v nájdení kompromisu medzi bezpečnosťou jazdy a pohodlím posádky. Keďže pasívne odpruženie nieje vždy schopné splniť požiadavku na bezpečnosť jazdy a zároveň pohodlie posádky, je nutné uvažovať aktívne, alebo semiaktívne odpruženie automobilu. Pri použití optimálneho riadenia tohto zavesenia je nutná správna voľba váhových koeficientov, ktoré majú zásadný vplyv na konečné zosilnenie späťoväzobného regulátora a teda aj výsledné vlastnosti odpruženia. Pri skúmaní jednotlivých váhových koeficientov sa taktiež vynára možnosť ich prehodnocovania priamo počas prevádzky, čím je možné dosiahnuť schopnosť aktívneho alebo semiaktívneho odpruženia sa prispôbiť na rôzne typy budenia od vozovky tak, aby bolo zabezpečené maximálne možné pohodlie bez prekročenia obmedzujúcich podmienok.

2. Model aktívneho odpruženia vozidla

Je uvažovaný štvrtinový model vozidla s dvoma stupňami voľnosti. Hmoty m_1 a m_2 reprezentujú odpruženú a neodpruženú časť vozidla, s možnosťou vykonávať len posuvný pohyb $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Pasívna pružina a pasívny tlmič sú uvažované ako lineárne prvky s koeficientmi k_1 a b_1 . $u(t)$ reprezentuje akčnú silu, k_2 tuhosť pneumatiky a $w(t)$ nerovnosť vozovky.

* Ing. Juraj Úradníček, Doc. Ing. Miloš Musil, PhD.: Katedra Technickej Mechaniky, Strojnícka Fakulta, Slovenská Technická Univerzita, Nám. Slobody 17, 812 31 Bratislava 1



Obr.1. Model aktívneho zavesenia kolies automobilu.

Systém rovníc popisujúcich uvažovaný model vozidla možno zapísať v stavovom priestore

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{f}\xi(t) \quad (1)$$

kde vektory $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$ a matica $\mathbf{A}$ sú

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_2(t) \\ x_2(t) - w(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a.v \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a.v \end{bmatrix} \quad (2)$$

$w(t)$ je náhodný proces ktorý je riešením diferenciálnej rovnice

$$\dot{w}(t) + avw(t) = \xi(t) \quad (3)$$

a spektrálna výkonová hustota procesu $w(t)$ je [1]

$$S_w(w) = \frac{\frac{\sigma^2}{\pi} av}{\omega^2 + a^2 v^2} \quad (4)$$

kde σ^2 reprezentuje veľkosť nerovností vozovky, v rýchlosť vozidla a a je koeficient závislý od typu vozovky. $\xi(t)$ predstavuje biely šum s kovariančnou funkciou

$$E[\xi(t)\xi(t')] = 2\sigma^2 av\delta(t-t'). \quad (5)$$

Ak nie je uvedené inak, pre všetky simulácie sú uvažované parametre, $m_1=500$ kg, $m_2=100$ kg, $k_1=5$ kN/m, $k_2=200$ kN/m, $b_1=2.8$ kNs/m, $a=0.15$ m⁻¹, $v=30$ km/h, $\rho^2=9$ mm².

3. Optimálne riadenie

V predchádzajúcej časti bol dynamický systém popísaný v stavovom priestore ako

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{f}\xi(t) \quad (6)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ predstavuje stavový vektor, $u(t)$ akčnú veličinu a $\xi(t)$ biely šum s rozptylom

$$\theta = 2\sigma^2 av \quad (7)$$

Úlohou je nájsť také $u(t)$ aby ukazovateľ

$$J = E \left[\ddot{x}_1^2(t) + q_1 (x_1(t) - x_2(t))^2 + q_2 (x_2(t) - w(t))^2 + ru^2(t) \right] \quad (8)$$

bol minimálny. Na prepis výrazu (8) do maticového tvaru je využitý vektor výstupov

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t) \quad (9)$$

kde

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ x_1(t) - x_2(t) \\ x_2(t) - w(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

potom vzťah (8) možno zapísať v tvare [3]

$$J = E \left[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{n}u(t) + u^2(t)r_0 \right] \quad (11)$$

kde [3]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{d}, \quad r_0 = \mathbf{d}^T \mathbf{Q} \mathbf{d} + r \quad (12)$$

Za týchto predpokladov je optimálne riadenie akčnej veličiny $u(t)$ dané vzťahom

$$u(t) = -\mathbf{c}_0 \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

kde

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0^{-1} (\mathbf{n}^T + \mathbf{b}^T \mathbf{P}) \quad (14)$$

a matica $\mathbf{P}$ vyplýva z riešenia *Riccatiho* rovnice v tvare [3]

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}_0^{-1}\mathbf{n}^T) + (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}_0^{-1}\mathbf{n}^T)^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{r}_0^{-1}\mathbf{b}^T \mathbf{P} + (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{n}\mathbf{r}_0^{-1}\mathbf{n}^T) = 0 \quad (15)$$

Správanie optimálne riadeného systému popisuje kovariančná matica stavového vektora $\mathbf{x}(t)$,

$$\mathbf{X}(t) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)] \quad (16)$$

pre ustálený stav je táto matica konštantná a jej hodnota vyplýva z riešenia *Liapunovej rovnice* v tvare [3]

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{c}_0)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{c}_0)^T + \mathbf{f}\theta\mathbf{f}^T = 0 \quad (17)$$

Po označení $J_1 = \ddot{x}_1^2$, $J_2 = (x_1(t) - x_2(t))^2$, $J_3 = (x_2(t) - w(t))^2$ a $J_4 = u^2(t)$ sa vzťah (8) dá vyjadriť ako

$$J = J_1 + q_1 J_2 + q_2 J_3 + r J_4 \quad (18)$$

kde

$$J_1 = \left(\mathbf{C}(l, n) - \frac{l}{m_l} \mathbf{c}_0 \right) \mathbf{X} \left(\mathbf{C}(l, n) - \frac{l}{m_l} \mathbf{c}_0 \right)^T, \quad J_2 = \mathbf{X}(1, 1), \quad J_3 = \mathbf{X}(2, 2), \quad J_4 = \mathbf{c}_0 \mathbf{X} \mathbf{c}_0^T \quad (19)$$

4. Voľba váhových koeficientov

Samotné optimálne riadenie nezabezpečí neprekročenie obmedzení, ktoré vyplývajú z konštrukcie odpruženia automobilu, ako sú maximálny pracovný zdvih, maximálna riadiaca sila, ktorú je možné do sústavy dodať a maximálna dynamická deformácia pneumatiky, na ktorej závisí kontakt kolesa s vozovou a teda bezpečnosť jazdy. Spôsob, akým je možné riadiť danú sústavu, tak aby boli splnené vyššie uvedené požiadavky je vhodná voľba váhových koeficientov q_1 , q_2 a r vo vzťahu (18).

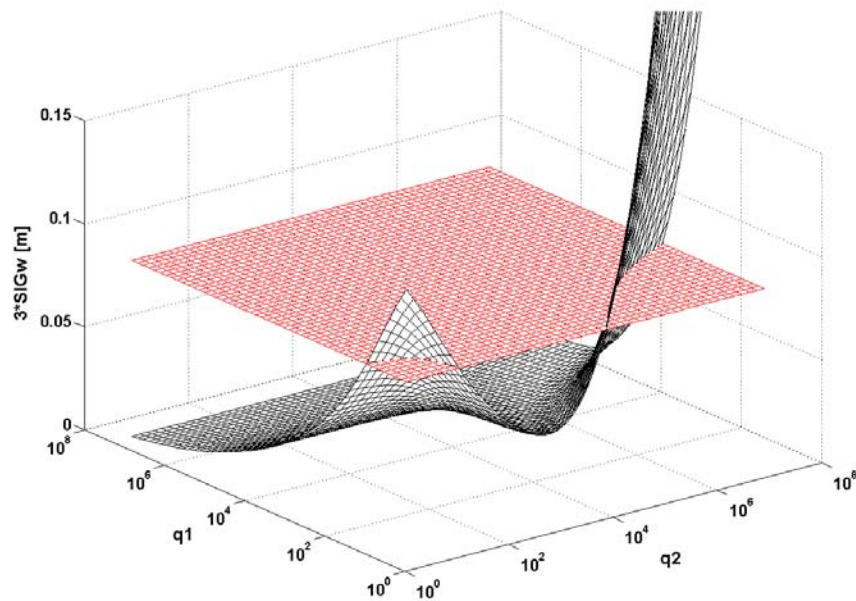
K zamedzeniu straty kontaktu kolesa s vozovkou a prepruženia zavesenia ku kritickým hodnotám na 99,7% doby prevádzky je potrebné splniť nasledovné ohraničujúce podmienky [2]

$$3\sigma_w < \delta_w \text{ a } 3\sigma_t < \delta_t \quad (20)$$

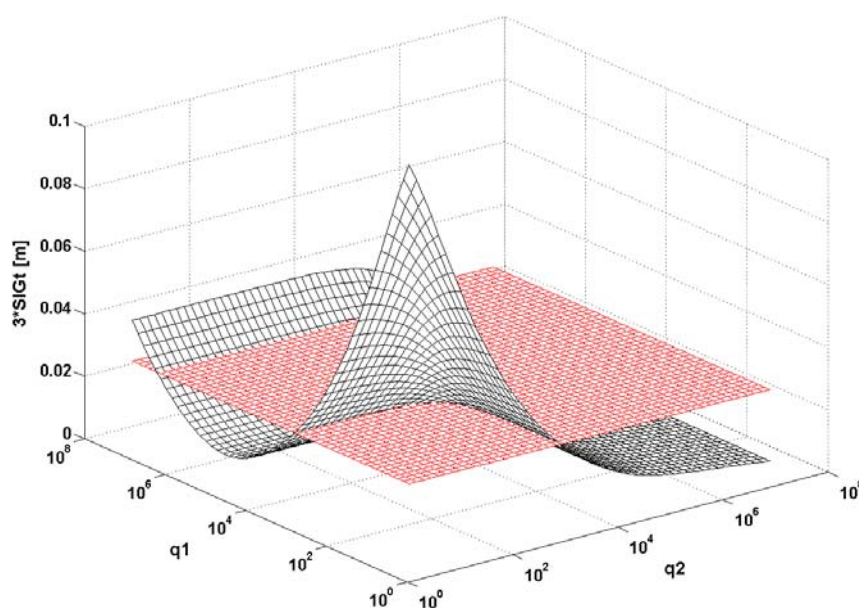
kde

$$\sigma_w = \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2} = \sqrt{J_2}, \quad \sigma_t = \sqrt{(x_2(t) - w(t))^2} = \sqrt{J_3}, \quad (21)$$

σ_w je smerodajná odchýlka veľkosti prepruženia zavesenia, σ_t je smerodajná odchýlka veľkosti dynamickej deformácie pneumatiky, δ_w je maximálne dovolené prepruženie zavesenia a δ_t je maximálna dovolená veľkosť deformácie pneumatiky. Podmienky (20) určujú množinu prípustných parametrov q_1, q_2 . Pre jednoduchšie znázornenie, nieje kladené obmedzenie na veľkosť akčnej sily a preto parameter r je uvažovaný ako nulový.

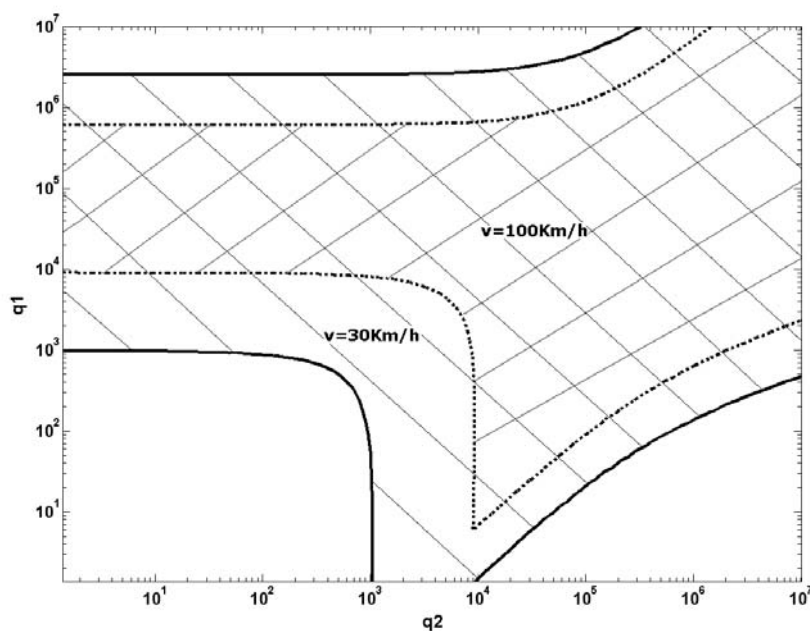


Obr.2. plocha – závislosť $3\sigma_w$ od q_1, q_2 , rovina - obmedzenie $\delta_w = 0,09m$.



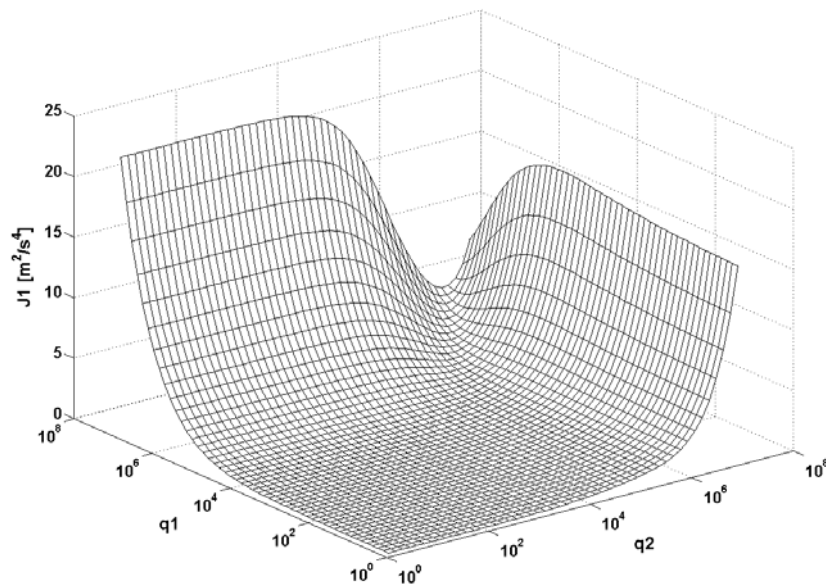
Obr.3. plocha – závislosť $3\sigma_t$ od q_1 , q_2 , rovina - obmedzenie $\delta_t=0,03m$.

Prienik plôch s rovinami (Obr.2.) a (Obr.3.) vymedzuje množinu prípustných parametrov q_1 , q_2 pre ktoré nedochádza k prekročeniu daných obmedzení.



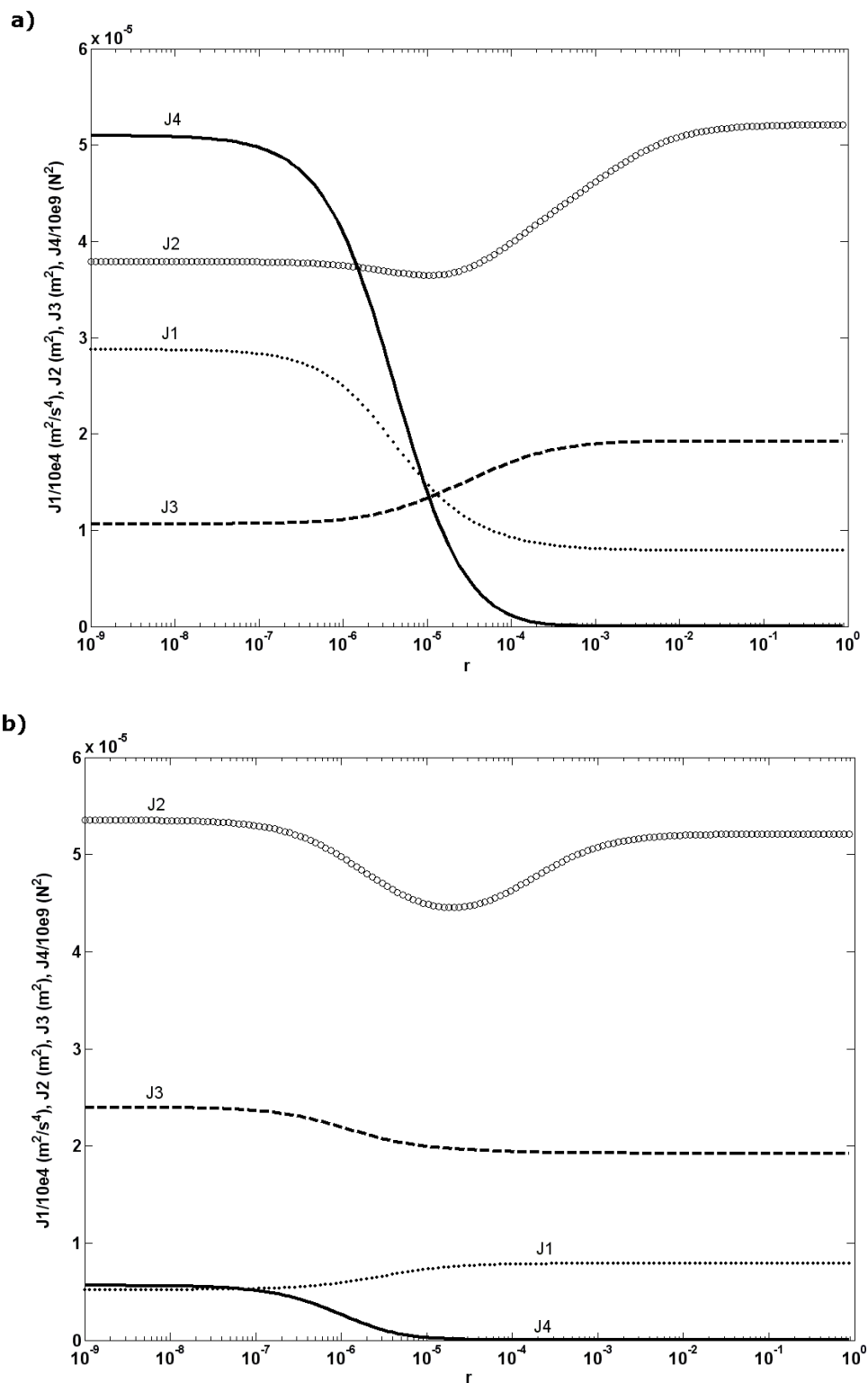
Obr.4. Množina prípustných parametrov q_1 , q_2 , — $v=30 \text{ km/h}$, $v=100 \text{ km/h}$

Ak je známa množina prípustných hodnôt, je potrebné z tejto množiny určiť vhodným spôsobom konkrétne hodnoty q_1 , q_2 .

Obr.5. Závislosť J_1 od q_1, q_2

Z hľadiska požiadavky dosiahnuť čo najväčšie pohodlie pasažierov, za predpokladu splnenia obmedzujúcich podmienok, je potrebné vybrať z prípustnej množiny parametrov q_1, q_2 také hodnoty, pre ktoré bude J_1 ako ukazovateľ pohodlia minimálny. Z klesajúcim q_1, q_2 taktiež klesá J_1 (Obr.5.), preto je vhodné vybrať z prípustnej množiny najmenšie možné parametre q_1, q_2 . Takouto voľbou parametrov sa však systém dostáva na hranicu obmedzenia dynamickej deformácie pneumatiky δ_t (Obr.3. ,Obr.4.) a pri zmene budenia, napríklad zvýšením rýchlosti vozidla, by toto obmedzenie bolo prekročené. Ako znázorňuje (Obr.4.), množina vhodných parametrov sa pri zmene rýchlosti z 30 km/h na 100 km/h pri rovnakom type vozovky podstatne zmenšila a pri takejto rýchlosti je preto nutné zvoliť väčšie hodnoty parametrov q_1, q_2 na úkor pohodlia pasažierov. Z uvedeného vyplýva, že najvhodnejšie je meniť q_1, q_2 priamo počas prevádzky, čím sa zabezpečí efektívnejšie využitie riadenia aktívneho zavesenia, avšak toto je možné len za predpokladu predbežnej identifikácie budenia a následného prispôbenia parametrov q_1, q_2 . V prípade, že systém je obmedzený na konštantné parametre, je nutné tieto parametre voliť tak, aby pre čo najväčšie spektrum budenia, neboli prekročené obmedzujúce podmienky.

Váhový koeficient r pridáva alebo uberá na váhe ukazovateľa J_4 vo vzťahu (18), ktorý hovorí o veľkosti akčnej sily, ktorú je do systému nutné dodať prostredníctvom vonkajšieho zdroja.



Obr.6. Priebeh ukazovateľov J_{1-4} v závislosti od r a) pre $q_1=10e4$, $q_2=10e5$, b) pre $q_1=10e3$, $q_2=10e3$

Z (Obr.6.) vyplýva, pre $r=1$ je akčná sila nulová, teda systém je pasívny. Oproti tomu, znižujúcim sa r je do systému dodávaná stále väčšia sila. Taktiež je možné pozorovať, od

určitej veľkosti r , že akčná sila a aj jednotlivé ukazovatele zostávajú prakticky konštantné. Na základe týchto skutočností je možné zvoliť koeficient r tak, aby mal systém požadované vlastnosti a aby neboli prekročené obmedzenia na maximálnu energiu, ktorú je možné do systému dodať. Pre prípad kde $q_1=10e4$, $q_2=10e5$ (Obr.6.a) pri zvyšovaní akčnej sily dochádza k znižovaniu J_2 , čo znamená zníženie pracovného zdvihu zavesenia, znižovaniu J_3 , čo znamená menšiu dynamickú deformáciu pneumatiky a vyššiu bezpečnosť, ale na druhej strane k zväčšeniu J_1 , čo má za následok zhoršenie pohodlia pasažierov. Na (Obr.6.b) je znázornený priebeh jednotlivých ukazovateľov pre $q_1=10e3$, $q_2=10e3$. V tomto prípade dochádza k nárastu J_2 , čím sa zväčší pracovný zdvih odpruženia, nárastu J_3 , čím sa zníži bezpečnosť, k poklesu J_1 , čím sa zvýši pohodlie, ale najmä k podstatnému zníženiu sily, ktorú je nutné do sústavy dodávať. Keďže v tomto prípade nedôjde k prekročeniu obmedzení spomínaných v predchádzajúcej časti, koeficienty $q_1=10e3$, $q_2=10e3$ pri danom type vozovky a rýchlosti 30 km/h sú vhodnejšou voľbou. Po zvýšení rýchlosti, alebo zväčšení nerovností vozovky, by však bolo nutné tieto koeficienty zvýšiť tak, aby boli splnené dané obmedzenia.

5. Záver

V článku boli objasnené závislosti jednotlivých ukazovateľov pohodlia jazdy J_1 , pracovného zdvihu odpruženia J_2 , dynamickej deformácie pneumatiky J_3 a veľkosti akčnej sily aktívneho odpruženia J_4 na váhových koeficientoch q_1 , q_2 a r . Z výsledkov simulácie pre daný typ budenia od vozovky je poukázané na možný spôsob voľby týchto parametrov tak, aby neboli prekročené stanovené obmedzenia odpruženia. Taktiež je poukázané na možnosť efektívnejšieho využitia optimálneho riadenia na základe kontinuálnej zmeny parametrov q_1 , q_2 , čím by bolo zabezpečené pre rôzne typy budenia maximálne možné pohodlie pasažierov bez prekročenia daných obmedzujúcich podmienok.

6. PodĎakovanie

Táto práca vznikla v rámci projektu VEGA č.1/2103/05.

7. Literatúra

- Hac, A. (1985) Suspension optimization of a 2-DOF vehicle model using a stochastic optimal control technique. *Journal of Sound and Vibration* (1985) 100(3), 343-357
- Thompson, A.G and Davis B.R. (2000) RMS values for control force, suspension stroke and tyre deflection in an active suspension. *Vehicle System Dynamics*, 34 (2000), pp. 143-150
- Tewari, A. (2002) *Modern control design with matlab and simulink*, John Wiley & Sons Ltd.