

SYMMETRY GROUP ANALYSIS OF SUDDENLY ACCELERATED FLOW PAST A FLAT PLATE

V. Tesař*

Summary: *Modern symmetry group theory provides constructive procedures for finding similarity transformations and invariants, leading to fundamental change in the similarity solutions of shear flows, based so far on inspection analysis, ad hoc assumptions, and physical considerations. The new approach is here demonstrated on classical Stokes' (1851) problem of the suddenly accelerated flow above a stationary flat plate, with the gradual growth of boundary layer thickness.*

1. Úvod

Velmi užitečnou metodou teoretického vyšetřování smykových proudění je *similaritní transformace* [1, 3, 16]. Tou se Prandtlova rovnice pro danou úlohu transformuje na obyčejnou diferenciální rovnici, nejen mnohem snadněji řešitelnou, ale hlavně s řešením majícím obecný charakter. To přináší mnohem více informací než numerická řešení, vždy platná jen pro jeden konkrétní soubor okrajových podmínek. Idea similaritního řešení má starou historii, počínající u Stokesových prací o aerodynamickém tlumení kyvadla hodin z poloviny 19-tého stol. [2]. Později, ve 20-tém století, metodu aplikovali Prandtlovi doktorandi a spolupracovníci zejména na řadu laminárních smykových proudění jako je mezní vrstva (Blasius 1908), zatopený proud (Schlichting 1933), a stěnový proud (Glauert 1955). Detailní popis těchto řešení je např. v [1]. Aplikace na turbulentní proudění, po slibných počátcích Tollmienových s jednoduchými modely turbulence, dlouho stagnovala. Mělo se zato, že dokonalejší a tím složitější modely turbulence jsou použitelné jen pro numerické výpočty metodou sítí. Až poměrně nedávno se uplatnily i jednorovnicové a dvourovnicové modely u similaritních řešení [3]. Jsou dosud málo známy. Příkladem může být třeba řešení rovinného turbulentního zatopeného proudu [4, 7, 16, 19], průtok trubicí [5, 20], konvektivní teplotní pole [17] nebo řešení směšovací vrstvy po stranách jádra proudu [6]. Nedávno našlo similaritní řešení turbulentního osově souměrného proudu [7] zajímavé využití pro korelaci experimentálních dat v aktuální problematice syntetického proudu [8].

Potíže se similaritní transformací jsou zejména v jejích výchozích krocích. Je obtížné najít vhodné transformační vztahy, obvykle hledané zkusmo a na základě úvah o fyzikálním charakteru vyšetřovaného proudění. Až poměrně nedávno bylo rozpoznáno, že existují systematické postupy nepotřebující žádné informace z vnějšku a vystačující tedy s rozбором charakteru diferenciální rovnice (a okrajových podmínek) již se problém řídí. Similaritní transformace nejsou než zvláštním případem spojitých transformací proměnných jaké zkoumá teorie grup symetrií, založená na historických myšlenkách Lieových [9] a v nedávné době zpracovaná v monografiích jako [10] a [11].

Další výhodou analýzy založené na metodě grup symetrií je schopnost tohoto postupu identifikovat invarianty jednotlivých problémů. To je velmi závažný aspekt – existuje ostatně názor, že cílem všech vědeckých výzkumů je nakonec nalezení invariantů. V problematice smykových proudění o důležitosti neměnných veličin není nejmenších pochyb. Je zřejmé, jak

* Prof. Ing. Václav Tesař, CSc., Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Dolejškova 5, 182 00 Prague 8, tel.: 420 26605 3282, fax: 420 28658 4695, e-mail: v.tesar@it.cas.cz

mocným nástrojem třeba u zatopeného proudu je znalost toho, že se u něj podél osy proudu zachovává průtočná hmotnost. Ovšem identifikace takovéto invariantní veličiny u složitějších případů – viz např. Tesař [12] – vyžaduje mimořádné znalosti o daném problému a někdy vysloveně záleží jen na štěstí. Nötherová v r. 1918 [13] přinesla důkaz, že každé symetrii diferenciální rovnice spjaté s Lagrangianem odpovídá zákon zachování – i když u nejjednodušších symetrických transformací ovšem může jít o invarianty které mnoho nepřinášejí, např. neměnnost vzhledem ke Galileovským transformacím souřadné soustavy. Ibragimov aj. [14] šli dále a prokázali vztah mezi veličinami pro něž platí zákon zachování a Lie-Bäcklundovými operátory které generují odpovídající Nötherovskou symetrii. Nedávno pak Kara a Mahomed [15] formulovali obecný vztah mezi symetrickými transformacemi a odpovídajícími zákony zachování a ukázali, jak tyto zákonitosti mohou být explicitně určeny. Přínejmenším se takto lze přesvědčit i u známých případů třeba o tom, zda nějaká taková zákonitost nebyla snad dosud přehlédnuta.

Praktická aplikace tohoto moderního přístupu v mechanice tekutin je ztížena tím, že teorie grup nepatří do běžné matematické výzbroje inženýrů. Předkládaný příspěvek má za cíl překlenout tuto mezeru tím, že uvádí základní pojmy a postupy v přehledné formě. Jde o východisko k připravovaným studiím o uplatnění u složitějších smykových oblastí. Pro jednoduchost je sledován příklad aplikace na problém řešení tradiční similaritní transformací již v 19-tém století.

2. Demonstrační případ smykového proudění

Ukázkový případ na něž je zde grupová analýza aplikována je snad nejstarší řešený problém proudění viskózní tekutiny s charakterem mezní vrstvy [2]. Jde navíc o nestacionární smykové proudění, ale s extrémně jednoduchou geometrií. Tekutina vyplňuje poloprostor nad rovinnou stěnou rozprostírající se na všech stranách do nekonečna – ve směru jak souřadných os X_1 tak X_3 ležících v rovině stěny. Zbývající osa X_2 je kolmá ke stěně. K proudění ve směru osy X_1 dochází po náhlém urychlení tekutiny v čase $t = 0$ na rychlost w_e , která poté zůstává neměnná. Tradiční řešení této úlohy pomocí similaritní transformace je popsáno v [1]. V zásadě zachycuje transport hybnosti z tekutiny směrem ke stěně přes vrstvu jež je stěnou strhávána a zastavena. Na počátku děje v $t = 0$ je tato vrstva extrémně tenká a uplatňuje se v ní velký příčný gradient $\partial w_1 / \partial X_2$. Na rozdíl od obvyklých stacionárních případů mezní vrstva ovšem její tloušťka s časem monotonně roste až má nakonec tendenci vyplnit celý poloprostor, jak ukazuje příklad vypočítaných rychlostních profilů na obr. 1.

V notaci podle [1] (operátory působí na operand ležící vlevo od nich) je problém popsán variantou Prandtlovy rovnice s nulovou pravou stranou a bez advektivních členů, tedy pouze s nestacionárním členem ($\partial / \partial t$ je zprava působící derivace podle času) a s členem reprezentujícím laminární gradientovou difúzi ($\nabla_2^2 = \partial^2 / \partial X_2^2$ je derivace podle příčné prostorové souřadnice)

$$w_1 (\partial - \nabla_2^2) = 0 \quad \dots (1)$$

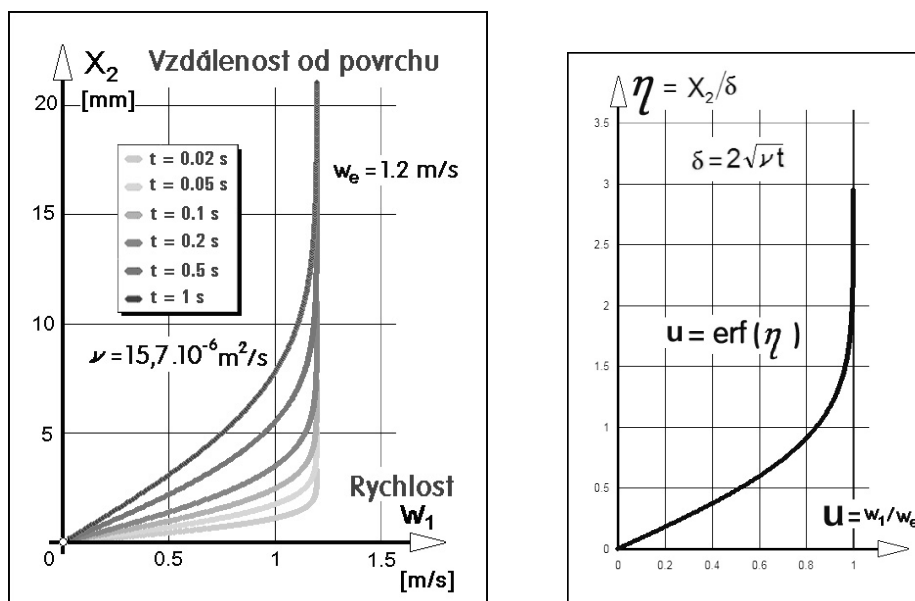
Ta je transformována na obyčejnou diferenciální rovnici zavedením rychlostní similaritní proměnné

$$u = w_1 / w_e \quad \dots (2)$$

a příčné similaritní souřadnice

$$\eta = X_2 / \delta \quad \delta = 2\sqrt{\nu t} \quad \dots (3)$$

Kritickým aspektem je nalezení výrazu pro tloušťku vrstvy δ . V klasickém přístupu je určována z fyzikálních úvah, v [1] uvážením difúzního molekulárního transportu napříč vrstvou. Transformované členy rovn. (1) pak jsou (v zápisu používajícím bezindexový operá-



Obr. 1 Příklad rozložení horizontální rychlostní složky w_1 v tekutině nad nehybnou vodorovnou stěnou v jednotlivých časových okamžicích t .

Obr. 2 Similaritní řešení, které se dostane integrací rov. (5) a platí univerzálně pro všechny případy jakými jsou třeba křivky v ukázce z obr. 1.

rátor ∇ derivace podle η)

$$\begin{aligned} w_1 \circ &= u \nabla w_e(\eta \circ) \\ w_1 \nabla_2 &= u \nabla^2 w_e / (4 \nu t) \end{aligned} \quad \dots (4)$$

takže výsledná rovnice je po transformaci je

$$u \nabla^2 + 2u \nabla \eta = 0 \quad \dots (5)$$

- se známým řešením pro poměrný rychlostní profil ve tvaru chybové funkce [1], jak jej zachycuje obr. 2.

3. Metoda grup symetrií

S ohledem na předpokládané uplatnění k řešení právě popsaného problému lze zjednodušit formulaci úlohy omezením na případy popsané pouze jedinou skalární proměnnou Y , což může být například horizontální rychlostní složka w_1 z obr. 1 nebo třeba proudová funkce. Hledáme její prostorové rozložení a u nestacionárních úloh změny tohoto rozložení v čase, tedy závislost na veličinách které lze pro přehlednost shrnout do jediného vektoru nezávisle proměnných $\mathbf{X}$. Těchto veličin je celkem m . U stacionárních případů je $\mathbf{X}$ ovšem vektor polohy ($m=3$ nebo v rovinné úloze $m=2$), v nestacionárních dějích $\mathbf{X}$ obsahuje také čas t . Problém je popsán diferenciální rovnicí (obvykle parciální), kterou lze zapsat jako

$$F(\mathbf{X}, Y, Y \nabla, Y \nabla^2, \dots) = 0 \quad \dots (6)$$

- ve které kromě $\mathbf{X}$ a Y vystupují také $Y \nabla^i$, což jsou vektory všech derivací i -tého řádu veličiny Y podle složek vektoru $\mathbf{X}$. Studium transformací souřadnic, které je zde nyní aplikováno, se zabývá vztahem mezi řešením $Y = f(\mathbf{X})$ rovnice (6) a jemu odpovídajícím řešením $Y^* = f(\mathbf{X}^*)$ v transformovaných proměnných. Transformace je dána funkcemi

$$\mathbf{X}^* = \phi(\mathbf{X}, Y), \quad Y^* = \psi(\mathbf{X}, Y) \quad \dots (7)$$

kde se zajímáme zvláště o vektor $\mathbf{X}^*$ transformovaných nezávisle proměnných a o transformovanou závisle proměnnou $\mathbf{Y}^*$. Označí-li se jako $\dot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{Y}}, \dots$ atd. vektory operátorů derivací podle nových nezávislých proměnných $\mathbf{X}^*$, přejde transformací rovnice (6) na

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*, \mathbf{Y}^* \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Y}^* \dot{\mathbf{Y}}^2, \dots) = 0 \quad \dots (8)$$

Výchozím objektem zájmu zde jsou nyní takové transformace (7), které ponechávají identickou formu rovnic (6) a (8),

$$\mathbf{F}^*(\cdot) = \mathbf{F}(\cdot) \quad \dots (9)$$

Z historických příčin jsou tyto transformace nazývány **symetrie**. Splňují podmínky jimiž jsou definovány grupy: vykazují uzavřenost, existenci unitárního prvku, existenci inverzního prvku a asociativitu. Název je důsledkem toho, že teorie grup v jedné ze svých východisek sledovala popis symetrických vlastností geometrických objektů jako zákrytových transformací které ponechají objekt zdánlivě identický. Takové transformace pro jednoduché objekty mající jen několik os symetrie (třeba rovnostranný trojúhelník) jsou diskrétní a tvoří algebru odpovídající algebře čísel spadající do stejné grupy. Existují ovšem i objekty (třeba kružnice) s nekonečně mnoha symetriemi spojitě na sebe navazujícími. Zájem v diskutované otázce transformace souřadnic se soustřeďuje právě na transformace spojitě závislé na změnách proměnného parametru ε :

$$\mathbf{X}^* = \phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varepsilon), \quad \mathbf{Y}^* = \psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \varepsilon) \quad \dots (10)$$

- a sice takové, že při nulové hodnotě tohoto parametru je transformace identitou:

$$\varepsilon = 0: \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{X} \quad \text{and} \quad \mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} \quad \dots (11)$$

Díky spojitosti je možné provést Taylorův rozvoj transformačních vztahů (10) podle ε v nejbližším okolí identity. Výsledek se označuje jako *infinitesimální* forma transformace

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^* &= \mathbf{X} + \varepsilon \left. \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) & \text{and} & & \mathbf{Y}^* &= \mathbf{Y} + \varepsilon \left. \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) \\ &= \mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{h}_X(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + O(\varepsilon^2) & & & &= \mathbf{Y} + \varepsilon \mathbf{h}_Y(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad \dots (12)$$

kde $\mathbf{h}_X$ a $\mathbf{h}_Y$ jsou infinitesimální multiplikátory nebo stručně *infinitesimály*:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \mathbf{h}_X \quad \text{a} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{Y}^*}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \mathbf{h}_Y \quad \dots (13)$$

4. Generátory a podmínky invariance

Nyní je možné formulovat podmínku symetrie (tj. tvarové invariance) pro diferenciální rovnici (6). K tomu se provede rozvoj $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Y}\dot{\mathbf{Y}}^2, \dots, \mathbf{Y}\dot{\mathbf{Y}}^p) = 0$ podle ε v okolí $\mathbf{F} = 0$ na

$$\mathbf{F} + \mathbf{F} \mathbf{G}^{(p)} \varepsilon + \mathbf{F} \left[\mathbf{G}^{(p)} \right]^2 \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3) = 0 \quad \dots (14)$$

- kde je zaveden Lie-Bäcklundův operátor řádu p nazývaný generátor $\mathbf{G}^{(p)}$. Je to (jako ostatně všechny operátory zde diskutované) operátor působící zprava na operand $\mathbf{F}$ a je definován

$$\mathbf{G}^{(p)} = \nabla \mathbf{h}_X + \diamond \mathbf{h}_Y + \mathcal{P}_p \quad \dots (15)$$

Členy ve výrazu (15) jsou základní generátor $\mathbf{G} = \nabla \mathbf{h}_X + \diamond \mathbf{h}_Y$ a prolongace $\mathcal{P}_p$. Dva členy v $\mathbf{G}$ mají následující význam:

a) Skalární součin vektoru ∇ operátorů derivace podle nezávislých proměnných $\mathbf{X}$ a vektoru odpovídajících infinitesimálů $\mathbf{h}_X$.

b) Součin operátoru $\diamond = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}}$ derivace podle závisle proměnné $\mathbf{Y}$ a odpovídajícího infinitesimálu $\mathbf{h}_Y$.

Symbol $[G^{(p)}]^2$ v (14) označuje opakovanou aplikaci generátoru. Ta však nevede k použitelným dalším podmínkám pro symetrii, takže tento člen lze zanedbat.

Prolongace $\mathcal{P}_p$ sestává z analogických členů jako jsou členy v základním generátoru G , tvořené ale derivováním podle derivací $Y^{\nabla i}$ závisle proměnné až do řádu p – nejvyššího řádu derivací ve vyšetřované rovnici, což může obecně vést ke značně komplikovaným výrazům, [11, 21]:

$$\mathcal{P}_p = \frac{\partial}{\partial Y^{\nabla i_1}}(h_{;i}) + \dots + \frac{\partial}{\partial Y^{\nabla i_1 i_2 \dots i_p}}(h_{;i_1 \dots i_s}) \quad \dots (16)$$

kde odpovídající infinitesimály jsou jednak

$$h_{;i} = h_X \mathcal{D}_i - h_Y \mathcal{D}_i \quad \dots (17)$$

a dále pro $s > 1$

$$h_{;i_1 \dots i_s} = h_{;i_1 \dots i_{s-1}} \mathcal{D}_{i_s} - h_Y \mathcal{D}_{i_s} (Y^{\nabla i_1 \dots i_{s-1}}) \quad \dots (18)$$

vyjádřených prostřednictvím totálních (na rozdíl od parciálních) derivací $\mathcal{D}_i$. V případě dvou nezávislých proměnných (o který půjde u smykových oblastí především)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \nabla_1 + \diamond(Y^{\nabla_1}) + \frac{\partial}{\partial Y^{\nabla_1}}(Y^{\nabla_1^2}) + \frac{\partial}{\partial Y^{\nabla_2}}(Y^{\nabla_2 \nabla_1}) + \dots \\ \mathcal{D}_2 &= \nabla_2 + \diamond(Y^{\nabla_2}) + \frac{\partial}{\partial Y^{\nabla_1}}(Y^{\nabla_1 \nabla_2}) + \frac{\partial}{\partial Y^{\nabla_2}}(Y^{\nabla_2^2}) + \dots \end{aligned} \quad \dots (19)$$

Detaily odvozování těchto vztahů lze nalézt v [11]. U Prandtlových rovnic smykových oblastí, obvykle vyjadřovaných ve tvaru s proudovou funkcí, takže jsou třetího řádu, bývá nutné vyhodnocení prolongací také až do třetího řádu, což by v principu mohlo vést až k nepřehlednému počtu výrazů. Naštěstí v rovnici vystupují jen některé z vůbec možných derivací.

První člen v (14) je eliminován díky platnosti (6). A protože, jak již bylo uvedeno, odpadá jako nezajímavý i třetí člen, výsledná nutná a postačující podmínka pro invariance je

$$\left. FG^{(p)} \right|_{F=0} = 0 \quad \dots (20)$$

Protože s diferenciální rovnicí (6) nyní popisovaný přístup zachází formálně jako s funkčním vztahem mezi proměnnými a derivacemi, lze zcela analogický postup nyní použít na určení, zda nějaká funkce $f(X, Y)$ je invariantní vůči určité transformaci (10), tedy zda splňuje

$$f(X, Y) = f(X^*, Y^*) \quad \dots (21)$$

Lze opět provést rozvoj podle parametru transformace ϵ

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= f(X + \epsilon h_X + O(\epsilon^2), Y + \epsilon h_Y + O(\epsilon^2)) \\ &= f + f G \epsilon + f[G]^2 \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad \dots (22)$$

- kde se ovšem první člen f zruší s levou stranou a členy vyšších řádů se zase neuplatní (nevedou k dalším podmínkám oproti první aplikaci generátoru, neboť $f[G]^2 = (fG)G$, podruhé je již generátor aplikován na 0), takže lze podmínku invariance (21) formulovat pro malé změny v okolí identity jako

$$fG = f \nabla h_X + f \diamond h_Y = 0 \quad \dots (23)$$

Zásadní význam nyní má pak to, že tato podmínka (23) je konstruktivní, nabízí jednoznačnou cestu jak postupovat. Jde totiž o hyperbolickou diferenciální rovnici prvního řádu, která může být řešena metodou charakteristik [22]

$$\frac{dX_1}{h_{X_1}} = \frac{dX_2}{h_{X_2}} = \dots = \frac{dX_m}{h_{X_m}} = \frac{dY}{h_Y} \quad \dots (24)$$

Řešení této soustavy má právě m integračních konstant C_i . Ty lze nyní použít jako nové nezávisle proměnné. Dostává se tak funkce $f(C_1, \dots, C_m)$ která splňuje (23) a je tedy invariantní vůči transformaci (10).

Myšlenku lze nyní rozšířit na postup určení takových řešení $Y = \Phi(X)$ rovnice (6) jež jsou invariantní vůči transformaci (10) danou jejím generátorem G . Musí zřejmě pro ně platit, že $Y - \Phi$ je invariantní funkcí, tedy podle (23) musí být

$$(Y - \Phi)G = 0 \quad \dots (25)$$

což zase vede na hyperbolickou soustavu

$$\Phi \nabla h_X = h_Y \quad \dots (26)$$

opět s řešeními jež se dostanou metodou charakteristik. Tato řešení, kterých je $m - 1$, lze pak s výhodou použít jako nové nezávisle proměnné. Pravou stranu rovnice lze pak položit rovnu libovolnému z m členů levé strany. Dostane se tak rovnice, jejíž řešení se potom použije jako nová závisle proměnná.

Podstatné je, že nových proměnných je (nejméně) o jednu méně než původních m . Toto je tedy hledaná similaritní redukce počtu proměnných. V případech $m = 2$ se řešená parciální diferenciální rovnice mění na obyčejnou.

5. Aplikace na zkoumaný příklad proudění

Rovnice (1) rychlostního pole je speciálním případem obecného tvaru

$$F(X, Y, Y\nabla, Y\nabla^2) = 0 \quad \dots (27)$$

ve kterém je $m=2$, $p=2$ a operátory derivace (zase působící na výraz nacházející se vlevo) jsou jednak $\partial/\partial t$ podle času a dále $\nabla_2 = \partial/\partial X_2$. Spolu tvoří vektor

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial t \\ \nabla_2 \end{bmatrix}$$

Vektor nezávisle proměnných je zde

$$X = \begin{bmatrix} t \\ X_2 \end{bmatrix},$$

závisle proměnná je $Y = w_1$ a dále jsou

$$Y\nabla = \begin{bmatrix} w_1 \partial/\partial t \\ w_1 \nabla_2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Y\nabla^2 = \begin{bmatrix} w_1 \partial^2/\partial t^2 \\ w_1 \nabla_2^2 \end{bmatrix} \quad \dots (28)$$

Nejjednodušší transformace proměnných mající charakter symetrie jsou translace a změna měřítka. Translaci v prostoru (ve směru vertikální osy X_2) danou aditivním členem $X_2^* = X_2 + \varepsilon$

si můžeme uvést, ale nevede bohužel k nijak zajímavým výsledkům. Je patrné, že tato

transformace splňuje vztah pro identitu při $\varepsilon = 0$, kdy je $X_2^* = X_2$. Je také zřejmé, že vztahů pro

derivace se taková transformace netýká $\nabla_2 = \nabla_2^* dX_2^*/dX_2 = \nabla_2^*$ takže transformovaná diferenciální rovnice

$$W_1(\circ - \nabla_2^2 \nu) = W_1(\overset{*}{\circ} - \overset{*}{\nabla}_2^2 \nu)$$

$$h_{W_1} = 0$$

$$h_t = 0$$

si skutečně zachovává identickou formu s (1). Infinitesimály jsou $\frac{h_{X_2}}{X_2} = 1$ a základní generátor: $\mathbf{G}_a = \nabla_2$

Mnohem zajímavější jsou změny měřítek nezávisle proměnných. Ukazuje se, že při transformaci s charakterem symetrie musí být transformovány současně obě nezávisle proměnné vektoru $\mathbf{X}$. Má-li měřítkové faktory být takové aby vedly při $\varepsilon = 0$, na identitu

$$W_1^* = W_1$$

$$t^* = t$$

$X_2^* = X_2$ je nejvhodnější aby měly charakter exponenciální závislosti ($\exp(0) = 1$), přičemž se

$$W_1^* = W_1$$

$$t^* = t \exp(2\varepsilon)$$

ukazuje, že měřítko pro čas musí být jiné: $X_2^* = X_2 \exp(\varepsilon)$

$$\circ = \overset{*}{\circ} \exp(2\varepsilon)$$

$$\nabla_2 = \overset{*}{\nabla}_2 \exp(\varepsilon)$$

$$\nabla_2^2 = \overset{*}{\nabla}_2^2 \exp^2(\varepsilon) = \overset{*}{\nabla}_2^2 \exp(2\varepsilon)$$

- jen tak se zachovává tvar rovnice po transformaci $W_1(\circ - \nabla_2^2 \nu) = W_1(\overset{*}{\circ} - \overset{*}{\nabla}_2^2 \nu)$

$$h_{W_1} = 0$$

$$h_t = 2t$$

Infinitesimály jsou $\frac{h_{X_2}}{X_2}$ a základní generátor je : $\mathbf{G}_b = \circ 2t + \nabla_2 X_2$... (29)

jako skalární součin vektoru operátorů derivací

$$\nabla = \begin{bmatrix} \circ \\ \nabla_2 \end{bmatrix}$$

s vektorem nezávislých infinitesimálů

$$h_X = \begin{bmatrix} h_t \\ h_{X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ X_2 \end{bmatrix}$$

... (30)

S první prolongací je tento generátor

$$\mathbf{G}_b^{(1)} = \circ 2t + \nabla_2 X_2 - \frac{\partial}{\partial W_1 \circ} 2(W_1 \circ) - \frac{\partial}{\partial W_1 \nabla_2} (W_1 \nabla_2)$$

Docela zajímavé výsledky lze dostat s pouhým uvažováním takovýchto základních transformací a jejich postupných aplikací na vyšetřovanou rovnici. Vezměme změnu měřítka rychlosti W_1 jakožto závisle proměnné, opět danou exponenciálním transformačním vztahem

$$W_1^* = W_1 \exp(\varepsilon)$$

$$t^* = t$$

$X_2^* = X_2$. Požadovaná neměnnost tvaru rovnice po transformaci je i zde splněna

$$\circ = \overset{*}{\circ}$$

$$\exp(\varepsilon) \neq 0$$

$$\nabla_2 = \overset{*}{\nabla}_2$$

$$W_1^*(\overset{*}{\circ} - \overset{*}{\nabla}_2^2 \nu) = W_1(\circ - \nabla_2^2 \nu) \exp(\varepsilon) = 0$$

$$W_1(\circ - \nabla_2^2 \nu) = 0$$

$$h_{W_1} = W_1 \exp(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$h_t = 0$$

$$h_{X_2} = 0$$

Infinitesimály jsou $\frac{h_{X_2}}{X_2}$ a základní generátor:

$$G_c = \diamond W_1 \quad \dots (31)$$

Aplikujme nyní tyto poznatky o generátorech bodových transformačních symetrií na podmínku invariantnosti obecné funkce f . Uvážili-li se nejprve invariantnost vůči transformaci proměnných dané generátorem (29), pak podmínka (23) vede na:

$$f G_b = f \circ 2t + f \nabla_2 X_2 \quad \dots (32)$$

- což je diferenciální rovnice hyperbolického typu, která se řeší metodou charakteristik [22]. Charakteristiky jsou zde

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dX_2}{X_2} = \frac{dW_1}{0} \quad \dots (33)$$

$$f\left(W_1, \frac{X_2}{\sqrt{t}}\right) \quad \dots (34)$$

a řešení

O invarianci tohoto výsledku vzhledem ke změně měřítek nezávisle proměnných se lze snadno přesvědčit dosazením:

$$f\left(W_1, \frac{X_2}{\sqrt{t}}\right) = f\left(W_1^*, \frac{e^{-\varepsilon} X_2^*}{\sqrt{e^{-2\varepsilon} t^*}}\right) = f\left(W_1^*, \frac{X_2^*}{\sqrt{t^*}}\right) \quad \dots (35)$$

Jestliže se bude navíc potom ještě požadovat i invariantnost vzhledem ke změně měřítka rychlosti W_1 , daná generátorem (31), kdy podmínka (23) vede na

$$f \diamond W_1 = 0 \quad \dots (36)$$

pak tato další podmínka (36) znamená, že se v předchozím obecném výrazu pro invariantnost (34) ztrácí závislost na rychlosti. Dostává se, že invariantní jsou funkční vztahy typu

$$f\left(\frac{X_2}{\sqrt{t}}\right) \quad \dots (37)$$

To je významný výsledek: sám o sobě ukazuje na charakter nezávislé similitudní proměnné (3) – ovšem až na násobné konstanty - jak ji v klasickém řešení určil rozbor fyzikální stránky úlohy.

Hledány jsou pak nejen invarianty vzhledem k takovýmto transformacím ale i k jejich lineárním kombinacím, třeba $G = k_a G_a + k_b G_b$.

Obecně jsou bodové generátory symetrie pro (27) dány řešením určující rovnice (- což je podmínka invariance (20)):

$$\left| FG^{(2)} \right|_{F=0} = 0 \quad \dots (38)$$

Vyhodnocení této podmínky je poměrně pracné, zejména vyjadřování prolongací potřebného druhého řádu, nicméně probíhá systematickým postupem. Mnohé z členů ostatně není nutné vyhodnocovat, protože jim neodpovídá žádný člen v (27). Jestliže se ve výsledku spolu sloučí členy se stejnými derivacemi závisle proměnné, rychlosti W_1 dostává se

$$G = k_a G_a + k_b G_b + k_b G_b + k_c G_c + k_d G_d + k_e G_e + k_f G_f \quad \dots (39)$$

kde jsou

$$\begin{aligned}
G_a &= \nabla_2 \\
G_b &= \circ 2t + \nabla_2 X_2 \\
G_c &= \diamond w_1 \\
G_d &= \circ \\
G_e &= \nabla_2 2t - \diamond w_1 X_2 \\
G_f &= \circ 4t^2 + \nabla_2 4tX_2 - \diamond w_1(2t + X_2^2)
\end{aligned}$$

a $k_a, k_b, k_c, k_d, k_e, k_f$ jsou koeficienty, které musí být určeny. Není ovšem nutné určovat je všechny – celou rovnici lze dělit jedním z koeficientů, o němž je zřejmé, že je nenulový. Podmínky pro určení ostatních vyplynou z aplikace generátoru (39) podle (25). Výsledná podmínka invariantnosti je kvazi-lineární rovnice opět hyperbolického typu, řešenou metodou charakteristik [22], se dvěma fundamentálními invarianty. Ty mohou být použity jako nové proměnné, závislou u a nezávislou η . Jejich dosazením do (27) dokonce přímo vede na

$$u \nabla^2 + 2u \nabla \eta = 0 \quad \dots (40)$$

- což je rovnice (5) řešeného problému v similaritních souřadnicích.

6. Závěr

Analýza založená na metodě grup symetrií otevírá nové pole působnosti pro similaritní řešení proudění ve smykových oblastech, které sice mají řadu neocenitelných teoretických výhod, ale prakticky byly jejich možnosti omezeny na nejjednodušší případy - jako jsou jednoduchá laminární smyková proudění nebo turbulentní proudění s turbulencí popsanou elementárními modely. Omezení bylo dáno nesmírnou obtížností určení výchozích transformačních vztahů, obvykle hledaných z fyzikálních úvah za pomoci nashromážděných experimentálních dat. Uvedený příklad ukázal, jak takto pracně získávané informace mohou být nahrazeny vztahy vyplývajícími přímo z rovnic které proudění popisují resp. popisují chování turbulence. Postup určení těchto vztahů je zcela systematický a přímočarý. Kromě této praktické stránky je výhodou i to, že některé z nalezených vztahů mohou mít neocenitelný teoretický význam. Přinejmenším přinášejí společnou zobecňující základnu pro celkový globální pohled na tyto problémy.

Nevýhodou bohužel je, že nový přístup pracuje s pojmy a postupy které nejsou běžně známy a zejména nepatří do matematické výzbroje inženýrů – za získané výhody se musí platit námahou již vyžaduje zvládnutí zcela neobvyklého aparátu. Předložená práce má za cíl přiblížit používané základní pojmy a ukázat aplikaci nového postupu na velmi jednoduchém ale prakticky nenezajímavém příkladu.

Literatura

- [1] Tesař V.: "Mezní vrstvy a turbulence", skripta ČVUT v Praze, různá vydání od r. 1984 do 1996
- [2] Stokes G.G.: "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, p. 8, Vol. 9, 1851
- [3] Tesař V.: "Similarity Solutions of Basic Turbulent Shear Flows with One- and Two-Equation Models of Turbulence", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, ISSN 0946-8463, Bd. 77 Sup. 1, p. 333, 1997

- [4] Tesař V.: "Two-Equation Turbulence Model Solution of the Plane Turbulent Jet", ACTA POLYTECHNICA Vol. 35, No.2, (ISSN 1210-2709), 1995
- [5] Tesař V.: "One-Equation Turbulence Model Solution of Developed Pipe Flow", Zeszyty Naukowe 241 - Mechanika 53, p.203, ISSN 0208-6395, Bydgoszcz, Poland 2002
- [6] Tesař V.: "Similarity solutions of jet development mixing layers using algebraic and 1-equation turbulence models", Acta Polytechnica, p. 40, Vol. 46, 2006
- [7] Tesař V.: "Two-Equation Turbulence Model Similarity Solution of the Axisymmetric Fluid Jet", Acta Polytechnica, p. 26, Vol.41, No.2, 2001
- [8] Trávníček Z., Tesař V., Wang A.-B.: "Enhancement of Synthetic Jets by Means of an Integrated Valve-Less Pump, Part II: Numerical and Experimental Studies", Sensors and Actuators A (Physical) 125, p. 50, 2005-11-03
- [9] Lie S.: "Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichungen", Arch. für Mathem., p. 328, Vol. 6, 1881
- [10] Ibragimov, N. Kh.: „Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations“, Chichester, New York, Wiley 1999
- [11] Bluman G.W., Kumei S.: "Symmetries and Differential Equations", Springer, New York, 1989
- [12] Tesař V.: "Integrální věta a invarianty u stěnového proudu" (Integral theorem and invariants of wall jet – in Czech), Proc. of Seminar "Topical problems of Fluid Mechanics '97", p. 57, ISBN 80-85918-26-9, vyd. ÚT AV ČR, Prague 1997
- [13] Nöther, E.: "Invariante Variationsprobleme", Nachr. König. Gessell. Wissen. Göttingen, Math.-Phys. Klasse. 2, 235, 1918
- [14] Ibragimov, N. Kh., Kara, A. H., and Mahomed, E M., "Lie-Bäcklund and Nöther Symmetries with Applications", Nonlinear Dynamics 15(2), p. 115, 1998
- [15] Kara, A. H., and Mahomed, E M.: "Relationship between Symmetries and Conservation Laws", International Journal of Theoretical Physics, Vol. 39, No. 1, 2000
- [16] Tesař V.: "Hierarchie similaritních řešení turbulentního rovinného zatopeného proudu s postupně složitějšími modely turbulence" Sborník 13. semináře kateder mechaniky tekutin a termomechaniky z České a Slovenské republiky, vyd. VŠB - Technická univerzita Ostrava, červen 1994
- [17] Tesař V.: "Similarity Solution of the Film Cooling", Proceedings of the 4th Annual university-wide Seminar Workshop 95, p. 303, Prague, January 1995
- [18] Tesař V.: "Similarity in Power Fluidics", Proc. of 'Dimensional Analysis in Fluid Mechanics', Institute of Thermomechanics Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, September 1992
- [19] Tesař V.: "Možnosti výuky moderních modelů turbulence využitím transformovaných řešení smykových oblastí", Sborník XVI. mezinárodní konference kateder termomechaniky a hydromechaniky, vyd. VUT Brno, s. 138, červen 1997
- [20] Tesař V.: "Similarity Laws for Turbulent Pipe Flow", Sborník semináře "Aktuální problémy mechaniky tekutin '98", str. 37, ISBN 80-85918-36-6, vyd. ÚT AV ČR, únor 1998
- [21] Alvarez-Moraga N., Hussin V.: "Invariant Vector Fields and the Prolongation Method for Supersymmetric Quantum Systems", Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol.36, p. 9479, 2003
- [22] Sarra S. A.: "Method of Characteristics and Conservation Laws", Journal of Online Mathematics and its Applications, February 2003