

THE RESIDUAL STRESS DETERMINATION BY THE HOLE DRILLING METHOD BY MEANS OF THE INFLUENCE FUNCTION

K. Švaříček¹, M. Vlk²

Summary: *The hole drilling method is widely used for residual stresses measurement. The evaluation of the inhomogeneous residual stresses through the depth can be performed by the integral method or power series method. The calibration coefficients are necessary to determinate by the finite element method for each method separately. The determination of the calibration coefficients takes usually much time. The generally view of the residual stress determination gives the influence function. The problem of the influence function solved Beghini (2000). The calibration coefficients for the integral method and for the power series method and for an arbitrary “new” method can be determined by the influence function. The base of the integral method consists in the approximation of the residual stress by a piecewise constant function. The base of the power series method consists in the approximation of the residual stress by a polynomial function. The new method would be consisted in an approximation of an arbitrary function. In this paper the influence function is determined for the strain gauge rosette RY 61 S. Then the influence function is used for the residual stress determination. Further the calibration coefficient of the integral method was compared with the calibration coefficients determined by the influence function which was provided with kindness by M. Beghini from University of Pisa, Italy.*

1. Úvod

Metoda vrtání otvoru je široce užívaná pro měření zbytkové napjatosti. K vlastnímu výpočtu zbytkových napětí existuje několik procedur. Pro výpočet nehomogenního zbytkového napětí po hloubce jsou nejvhodnějšími metodami integrální metoda a metoda mocninných řad. Před vlastním použitím jednotlivé metody je nutno určit její kalibrační koeficienty nejlépe metodou konečných prvků, což je obvykle značně časově náročné. Obecný pohled na výpočet zbytkových napětí metodou vrtání otvoru za dodržení základních předpokladů přináší zavedení příčinkové funkce tak jak popsal Beghini (2000). Pomocí této příčinkové funkce mohou být jednoduše stanoveny kalibrační koeficienty jak pro integrální metodu, pro metodu mocninných řad, tak i pro libovolnou „novou“ metodu. Tato nová metoda by spočívala v aproximaci zbytkových napětí libovolnou funkcí, nejen po částech konstantní funkcí – jak je tomu u integrální metody – nebo mocninou funkcí – jak je tomu u metody mocninných řad. V tomto příspěvku je stanovena příčinková funkce pro tenzometrickou růžici RY 61 S a je

¹ Ing. Karel Švaříček: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně; Technická 2, 616 69 Brno, tel.: +420-5-41142804, e-mail: svaricek@umt.fme.vutbr.cz

² Doc. Ing. Miloš Vlk, CSc.: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, Fakulta strojního inženýrství, VUT v Brně; Technická 2, 616 69 Brno, tel.: +420-5-41142886; e-mail: vlk@fme.vutbr.cz

použita pro určení zbytkové napjatosti. Dále jsou určeny kalibrační koeficienty integrální metody ze stanovené příčinkové funkce a jsou porovnány s koeficienty, které byly určeny z příčinkové funkce, kterou nám s velkou laskavostí pro námi dané parametry poskytl M. Beghini z University of Pisa, Italie.

2. Definice příčinkové funkce

Vztah mezi měřenou uvolněnou deformací a hledaným nehomogenním zbytkovým napětím po hloubce měřeného vzorku může být při splnění základních předpokladů psán ve tvaru (viz Švaříček, 2005):

$$p(h) = \int_0^h 2I_A(H, h)P(H)dH \quad (1)$$

$$q(h) = \int_0^h 2I_B(H, h)Q(H)dH \quad (2)$$

$$t(h) = \int_0^h 2I_C(H, h)T(H)dH \quad (3)$$

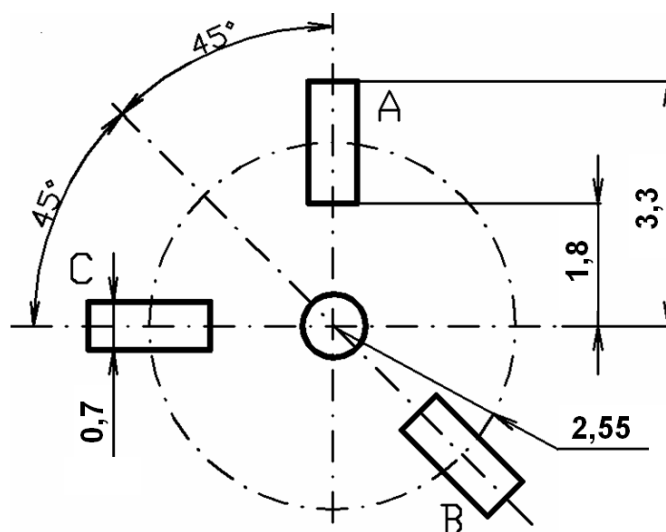
kde:

$$p(h) = \frac{\varepsilon_A(h) + \varepsilon_C(h)}{2} \quad (4)$$

$$q(h) = \frac{\varepsilon_A(h) - \varepsilon_C(h)}{2} \quad (5)$$

$$t(h) = \frac{\varepsilon_A(h) + \varepsilon_C(h) - 2\varepsilon_B(h)}{2} \quad (6)$$

$\varepsilon_A(h)$, $\varepsilon_B(h)$ a $\varepsilon_C(h)$ jsou uvolněné deformace v závislosti na hloubce otvoru h měřené tenzometry A, B a C tenzometrické růžice dle obr. 1.



Obr. 1: Tenzometrická růžice RY 61 S firmy HBM

$P(H)$, $Q(H)$, $T(H)$ jsou transformovaná zbytková napětí v závislosti na hloubce H , ze kterých mohou být určena hlavní zbytková napětí dle vztahu:

$$\sigma_{I,II}(H) = P(H) \pm \sqrt{Q^2(H) + T^2(H)} \quad (7)$$

a úhel natočení hlavních zbytkových napětí α měřený ve směru chodu hodinových ručiček od tenzometru A k hlavnímu napětí σ_I dle vztahu:

$$\alpha(H) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{T(H)}{Q(H)}\right) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{t(h)}{q(h)}\right) \quad (8)$$

$I_A(H, h)$ resp. $I_B(H, h)$ jsou **příčinkové funkce**, které jsou rovny uvolněné deformaci p resp. q pro rovnoměrné resp. smykové jednotkové zbytkové napětí působí v hloubce H při hloubce otvoru h . Příčinková funkce je definována na intervalu $0 \leq H \leq h \leq h_{\max}$. U těchto příčinkových funkcí může být odstraněna závislost na modulu pružnosti v tahu E a zmírněna závislost na Poissonově čísle μ zavedením příčinkové funkce $I_a(H, h)$ resp. $I_b(H, h)$ dle vztahu:

$$I_a(H, h) = -\frac{2E}{1+\mu} I_A(H, h) \quad (9)$$

$$I_b(H, h) = -2E I_B(H, h) \quad (10)$$

H je poměrná, bezrozměrná hloubka, na které působí zbytkové napětí, definovaná: $H = \frac{Z}{R_m}$, kde Z [mm] je hloubka, na které působí zbytkové napětí. h je poměrná, bezrozměrná hloubka vrtaného otvoru definovaná: $h = \frac{z}{R_m}$, kde z [mm] je hloubka vrtaného otvoru. R_m je střední poloměr tenzometrické růžice.

Základní předpoklady pro platnost vztahů (1), (2) a (3) jsou:

- homogenní, izotropní, lineárně pružný materiál
- nulová napětí ve směru kolmém k povrchu vzorku
- zbytková napětí se mohou lišit pouze v různých rovinách rovnoběžným s povrchem tělesa (podél hloubky tělesa)
- otvor je umístěn centricky vzhledem ke středu tenzometrické růžice, je kolmý k povrchu a má tvar válce
- povrch vzorku je rovinný
- při vrtání otvoru nejsou zanesena další zbytková napětí.

Dále je vhodné zavést předpoklad o dostatečně velkých rozměrech tělesa (tloušťka, šířka), aby těmito rozměry nebyla ovlivněna uvolněná deformace resp. příčinková funkce.

3. Stanovení příčinkové funkce

Beghini (2000) uvádí, že je možné příčinkovou funkci aproximovat polynomem ve tvaru:

$$I_a(H, h) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} H^{k-1} h^{l-1} \quad (11)$$

$$I_b(H, h) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \beta_{kl} H^{k-1} h^{l-1} \quad (12)$$

Koeficienty α_{kl} a β_{kl} mohou být určeny dosazením $I_a(H,h)$ resp. $I_b(H,h)$ z rovnice (11) resp. (12) do rovnice (9) resp. (10) a následným dosazením $I_A(H,h)$ resp. $I_B(H,h)$ do rovnice (1) resp. (2). Abychom získali p resp. q jako funkci h i H , budeme integrovat od nuly do H . Potom dostáváme:

$$p(H,h) = -\frac{1+\mu}{E} \int_0^H I_a(H,h) P(H) dH = -\frac{1+\mu}{E} \int_0^H \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} H^{k-1} h^{l-1} \right) P(H) dH \quad (13)$$

$$q(H,h) = -\frac{1}{E} \int_0^H I_b(H,h) Q(H) dH = -\frac{1}{E} \int_0^H \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \beta_{kl} H^{k-1} h^{l-1} \right) Q(H) dH \quad (14)$$

Na základě těchto rovnic pro známé uvolněné deformace $p(h)$ a $q(h)$ při známém zbytkovém napětí $P(H)$ a $Q(H)$ můžeme určit koeficienty α_{kl} a β_{kl} . Vzhledem k tomu, že počet neznámých koeficientů α_{kl} resp. β_{kl} je $m \times n$, je potřebný minimálně stejný počet rovnic, tj. počet různých hodnot $p(H,h)$ resp. $q(H,h)$ pro různé hloubky otvoru h a různé hloubky H , na kterých působí zbytkové napětí tak, aby pokryly celý definiční obor $0 \leq H \leq h \leq h_{\max}$. Pro usnadnění můžeme zvolit $P(H) = Q(H) = 1$ MPa a po dosazení do rovnice (13) resp. (14) a po integrování dostáváme:

$$p(H,h) = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} \frac{H^k}{k} h^{l-1} \quad (15)$$

$$q(H,h) = -\frac{1}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \beta_{kl} \frac{H^k}{k} h^{l-1} \quad (16)$$

Koeficienty α_{kl} a β_{kl} mohou být určeny i na základě kalibračních koeficientů pro integrální metodu a to následujícím způsobem. Vztah mezi uvolněnou deformací a zbytkovým napětím pro integrální metodu s diskretními přírůstky hloubky otvoru a hloubkami, na kterých působí zbytkové napětí, může být psán ve tvaru (viz Švaříček, 2005):

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} P_j = -\frac{E}{1+\mu} p_{ij} \quad 1 \leq j \leq J \leq i \leq I \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^J b_{ij} Q_j = -E q_{ij} \quad 1 \leq j \leq J \leq i \leq I \quad (18)$$

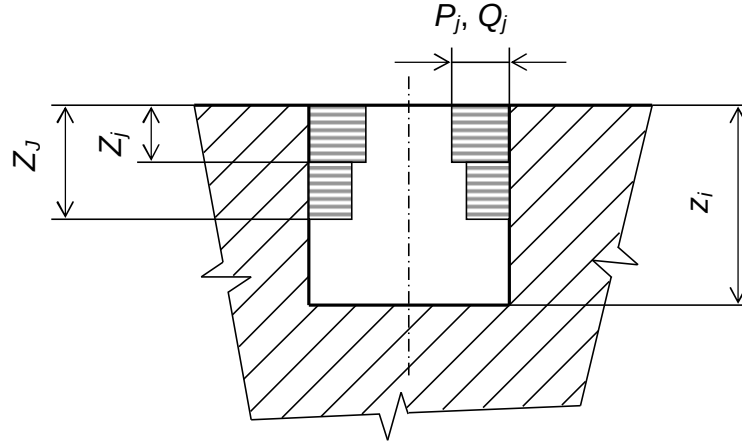
kde P_j resp. Q_j je zbytkové napětí působící o konstantní velikosti na j -tém přírůstku hloubky; p_{ij} , q_{ij} je uvolněná deformace, když hloubka otvoru je h_i (resp. z_i) a zbytkové napětí působí do hloubky H_j (resp. Z_j) (viz obr. 2). a_{ij} jsou kalibrační koeficienty pro integrální metodu. J je maximální hloubka, na které uvažujeme působící zbytkové napětí. I je maximální hloubka otvoru.

Opět zvolíme $P_j = Q_j = 1$ MPa (obráz. 3) a dostáváme:

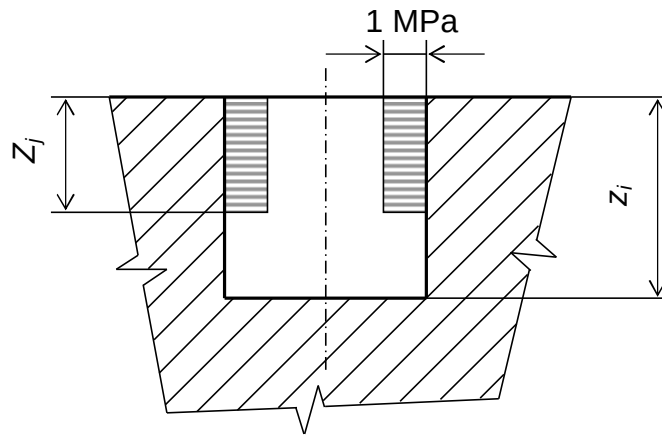
$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = -\frac{E}{1+\mu} p_{ij} \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^J b_{ij} = -E q_{ij} \quad (20)$$

kde $\sum_{j=1}^J a_{ij}$ resp. $\sum_{j=1}^J b_{ij}$ je tzv. součtový (kumulativní) kalibrační koeficient, který můžeme označit ${}^c a_{ij}$ resp. ${}^c b_{ij}$. Lze vidět, že tyto koeficienty odpovídají uvolněné deformaci, při jednotkovém napětí působícím do hloubky H_j (resp. Z_j), když hloubka otvoru je h_i (resp. z_i) (obr. 3).



Obr. 2: Zbytkové napětí působící na přírůstcích hloubky Z_j až do hloubky Z_j při hloubce otvoru z_i



Obr. 3: Jednotkové zbytkové napětí působící do hloubky Z_j při hloubce otvoru z_i

Vztah mezi kalibračními koeficienty a součtovými kalibračními koeficienty je:

$$a_{ij} = {}^c a_{ij} - {}^c a_{i,j-1} \quad (21)$$

$$b_{ij} = {}^c b_{ij} - {}^c b_{i,j-1} \quad (22)$$

Po dosazení I_A resp. I_B z rovnice (9) resp. (10) do rovnice (1) resp. (2) a následně z této rovnice dosazení p resp. q do rovnice (19) resp. (20) při $P(H) = Q(H) = 1$ MPa můžeme vidět, že pro součtové kalibrační koeficienty platí:

$${}^c a_{ij} = \int_0^{H_j} I_a(H, h_i) dH \quad (23)$$

$${}^c b_{ij} = \int_0^{H_j} I_b(H, h_i) dH \quad (24)$$

a pro kalibrační koeficienty potom platí:

$$a_{ij} = \int_{H_{j-1}}^{H_j} I_a(H, h_i) dH \quad (25)$$

$$b_{ij} = \int_{H_{j-1}}^{H_j} I_b(H, h_i) dH \quad (26)$$

Z rovnice (19) resp. (20) vyjádříme p_i resp. q_i , dosadíme do rovnice (15) resp. (16) a pro diskrétní přírůstky hloubky otvoru a hloubky, na kterých působí zbytkové napětí, dostáváme:

$${}^c a_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} \frac{H_j^k}{k} h_i^{l-1} \quad (27)$$

$${}^c b_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \beta_{kl} \frac{H_j^k}{k} h_i^{l-1} \quad (28)$$

Z těchto dvou rovnic je již vidět, že koeficienty α_{kl} a β_{kl} mohou být určeny na základě součtových kalibračních koeficientů stanovených pro integrální metodu. Součtové kalibrační koeficienty pro tenzometrickou rūžici RY 61 S stanovil Švaříček (2005) a byly tedy použity pro určení koeficientů α_{kl} a β_{kl} . Počet členů ve výrazu (27) nebo (28) (počet koeficientů α_{kl} resp. β_{kl}) byl stanoven na 25, tj. $m = n = 5$, vzhledem k numerické stabilitě a k přesnosti aproximace. Počet součtových kalibračních koeficientů je 55 (deset přírůstků hloubek otvoru a deset přírůstků hloubek, na kterých působí zbytkového napětí). Například rovnici (27) potom můžeme napsat maticově takto:

$$\begin{bmatrix} {}^c a_{11} \\ {}^c a_{21} \\ {}^c a_{22} \\ {}^c a_{31} \\ {}^c a_{32} \\ {}^c a_{33} \\ \vdots \\ \vdots \\ {}^c a_{10,10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^0 H_1^1 & h_1^1 H_1^1 & h_1^2 H_1^1 & \dots & h_1^5 H_1^1 & \frac{h_1^0 H_1^2}{2} & \dots & \frac{h_1^5 H_1^2}{2} & \dots & \frac{h_1^0 H_1^6}{6} & \dots & \frac{h_1^5 H_1^6}{6} \\ h_2^0 H_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h_2^5 H_1^6}{6} \\ h_2^0 H_2^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h_2^5 H_2^6}{6} \\ h_3^0 H_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h_3^5 H_1^6}{6} \\ h_3^0 H_2^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h_3^5 H_2^6}{6} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{10}^0 H_{10}^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h_{10}^5 H_{10}^6}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{15} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{25} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{51} \\ \vdots \\ \alpha_{55} \end{bmatrix} \quad (29)$$

a analogicky pro kalibrační koeficienty ${}^c b_{ij}$ a koeficienty β_{kl} . Zkráceně potom můžeme tyto maticové rovnice napsat ve tvaru:

$${}^c \mathbf{a}_{55,1} = \mathbf{H}_{55,25} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{25,1} \quad (30)$$

$${}^c \mathbf{b}_{55,1} = \mathbf{H}_{55,25} \cdot \boldsymbol{\beta}_{25,1} \quad (31)$$

Z těchto matic můžeme již vyjádřit koeficienty α_{kl} a β_{kl} . Vzhledem k tomu, že počet rovnic (počet součtových kalibračních koeficientů) je 55 a je větší než počet neznámých (koeficientů α_{kl} resp. β_{kl}), kterých je 25, jedná se o přeurený systém, který vyřešíme za pomoci metody nejmenších čtverců dle vztahu (32) resp. (33).

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T \cdot {}^c\mathbf{a}) \quad (32)$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^T \cdot {}^c\mathbf{b}) \quad (33)$$

Takto určené koeficienty příčinkové funkce α_{kl} a β_{kl} byly zpětně použity pro určení součtových kalibračních koeficientů ${}^c a_{ij}$ a ${}^c b_{ij}$. Tyto kalibrační koeficienty vyšly s nepodstatnou odchylkou od původních koeficientů, ze kterých byly stanoveny koeficienty příčinkové funkce. Dále byly tyto součtové kalibrační koeficienty porovnány se součtovými kalibračními koeficienty, které byly určeny na základě příčinkové funkce, kterou nám s velkou laskavostí poskytl pro naše parametry tenzometrické růžice a vrtaného otvoru M. Beghini z Univerzity v Pise. Odchylka mezi našimi kalibračními koeficienty a koeficienty M. Beghiniho je pouze okolo 3% (u 90% všech kalibračních koeficientů je odchylka menší jak 3,3%).

4. Použití příčinkové funkce

Jak již bylo v úvodu řečeno, příčinkovou funkci můžeme použít ke stanovení zbytkového napětí integrální metodou, metodou mocninných řad nebo jakoukoliv jinou metodou, která by spočívala v aproximaci zbytkového napětí v závislosti na hloubce libovolnou funkcí. Dále je možné při aplikaci příčinkové funkce na integrální metodu, stanovit jednoduše zbytková napětí v libovolných hloubkách tělesa, ne jen v těch hloubkách, pro které jsou určeny kalibrační koeficienty integrální metody nebo pro ty přírůstky hloubky otvoru, ve kterých bylo provedeno odvrtávání.

4.1. Použití příčinkové funkce – integrální metoda

Dle vztahů (1), (9) a (11) můžeme psát:

$$p(h) = -\frac{1+\mu}{E} \int_0^h \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} H^{k-1} h^{l-1} P(H) dH \quad (34)$$

Pro integrální metodu platí, že průběh nehomogenního zbytkového napětí po hloubce aproximujeme schodovitou funkcí, tj. konstantními napětími postupně o velikostech $P_1, P_2, \dots, P_J$. Přičemž platí:

$$P(H) = P_j \quad H_{j-1} \leq H \leq H_j \quad (35)$$

po dosazení P_j do rovnice (34) dostáváme:

$$p(h) = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} h^{l-1} \left(\sum_{j=1}^J \int_{H_{j-1}}^{H_j} H^{k-1} P_j dH + \int_{H_J}^h H^{k-1} P_{J+1} dH \right) \quad (36)$$

po zintegrování získáme:

$$p(h) = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h^{l-1} \left(\sum_{j=1}^J P_j (H_j^k - H_{j-1}^k) + P_{J+1} (h_i^k - H_J^k) \right) \quad (37)$$

a pro diskrétní přírůstky hloubky otvoru můžeme psát:

$$p_i = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h_i^{l-1} \left(\sum_{j=1}^J P_j (H_j^k - H_{j-1}^k) + P_{J+1} (h_i^k - H_J^k) \right) \quad (38)$$

Pro všech I přírůstků hloubek otvoru můžeme rovnici (38) napsat maticově:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_I \end{bmatrix} = -\frac{1+\mu}{E} \begin{bmatrix} g_{11}^\alpha & g_{12}^\alpha & \dots & g_{1J}^\alpha \\ g_{21}^\alpha & g_{22}^\alpha & \dots & g_{2J}^\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{I1}^\alpha & g_{I2}^\alpha & \dots & g_{IJ}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_J \end{bmatrix} \quad (39)$$

přičemž platí, že:

$$\text{když } h_i \geq H_j \text{ potom: } g_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h_i^{l-1} (H_j^k - H_{j-1}^k)$$

$$\text{když } h_i < H_j \text{ potom: } \text{když } h_i > H_{j-1} \text{ potom: } g_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h_i^{l-1} (h_i^k - H_{j-1}^k)$$

$$\text{když } h_i \leq H_{j-1} \text{ potom: } g_{ij}^\alpha = 0$$

Potom můžeme zjednodušeně psát:

$$\mathbf{p}_{I,1} = -\frac{1+\mu}{E} \mathbf{G}_{I,J}^a \cdot \mathbf{P}_{J,1} \quad (40)$$

Analogicky pro Q a T dostáváme:

$$\mathbf{q}_{I,1} = -\frac{1}{E} \mathbf{G}_{I,J}^\beta \cdot \mathbf{Q}_{J,1} \quad (41)$$

$$\mathbf{t}_{I,1} = -\frac{1}{E} \mathbf{G}_{I,J}^\beta \cdot \mathbf{T}_{J,1} \quad (42)$$

Pokud počet přírůstků hloubek J , na kterých působí zbytková napětí (počet neznámých) je menší než počet přírůstků hloubek otvoru I (počet rovnic) získáváme opět přeurený systém s I rovnic o J neznámých na jehož řešení použijeme metodu nejmenších čtverců ve tvaru:

$$\mathbf{P} = -\frac{E}{1+\mu} \cdot (\mathbf{G}^{aT} \cdot \mathbf{G}^a)^{-1} \cdot (\mathbf{G}^{aT} \cdot \mathbf{p}) \quad (43)$$

a analogicky pro Q a T :

$$\mathbf{Q} = -E \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{G}^\beta)^{-1} \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{q}) \quad (44)$$

$$\mathbf{T} = -E \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{G}^\beta)^{-1} \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{t}) \quad (45)$$

4.2 Použití příčinkové funkce – metoda mocninných řad

Opět vyjdeme ze vztahu (34). Pro metodu mocninných řad platí, že zbytkové napětí v závislosti na hloubce otvoru aproximujeme polynomem $(R-1)$ -tého řádu ve tvaru:

$$P(H) = c_0 + c_1 H + c_2 H^2 \cdots + c_{R-1} H^{R-1} = \sum_{r=1}^R c_{r-1} H^{r-1} \quad (46)$$

po dosazení $P(H)$ do rovnice (34) dostáváme:

$$p(h) = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} h^{l-1} \int_0^h H^{k-1} \left(\sum_{r=1}^R c_{r-1} H^{r-1} \right) dH \quad (47)$$

po zintegrování získáme:

$$p(h) = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \alpha_{kl} h^{l-1} \sum_{r=1}^R c_{r-1} \frac{h^{r+k-1}}{r+k-1} \quad (48)$$

Pro diskrétní přírůstky hloubky otvoru a po úpravě dostáváme:

$$p_i = -\frac{1+\mu}{E} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^R \frac{\alpha_{kl}}{r+k-1} c_{r-1} h_i^{r+k+l-2} \quad (49)$$

Pro všech I přírůstků hloubek otvoru můžeme rovnici (49) napsat maticově:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_I \end{bmatrix} = -\frac{1+\mu}{E} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h_1^{k+l-1} & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k+1} h_1^{k+l} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{R+k-1} h_1^{R+k+l-2} \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h_2^{k+l-1} & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k+1} h_2^{k+l} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{R+k-1} h_2^{R+k+l-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k} h_I^{k+l-1} & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{k+1} h_I^{k+l} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{R+k-1} h_I^{R+k+l-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{R-1} \end{bmatrix} \quad (50)$$

kde:

$$g_{ir} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_{kl}}{r+k-1} h_i^{r+k+l-2} \quad (51)$$

Potom můžeme zjednodušeně psát:

$$\mathbf{p}_{I,1} = -\frac{1+\mu}{E} \mathbf{G}_{I,R}^a \cdot \mathbf{p}_{R,1} \quad (52)$$

Analogicky pro Q a T dostáváme:

$$\mathbf{q}_{I,1} = -\frac{1}{E} \mathbf{G}_{I,R}^b \cdot \mathbf{q}_{R,1} \quad (53)$$

$$\mathbf{t}_{I,1} = -\frac{1}{E} \mathbf{G}_{I,R}^b \cdot \mathbf{T}_{R,1} \quad (54)$$

Vzhledem k tomu, že počet neznámých koeficientů c_r v polynomu stupně $R-1$ je obvykle menší než počet přírůstků hloubek otvoru I (počet rovnic) získáváme opět přeurčený systém s I rovnic o R neznámých na jehož řešení použijeme metodu nejmenších čtverců ve tvaru:

$$\mathbf{P} = -\frac{E}{1+\mu} \cdot (\mathbf{G}^{\alpha T} \cdot \mathbf{G}^{\alpha})^{-1} \cdot (\mathbf{G}^{\alpha T} \cdot \mathbf{p}) \quad (55)$$

a analogicky pro $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{T}$:

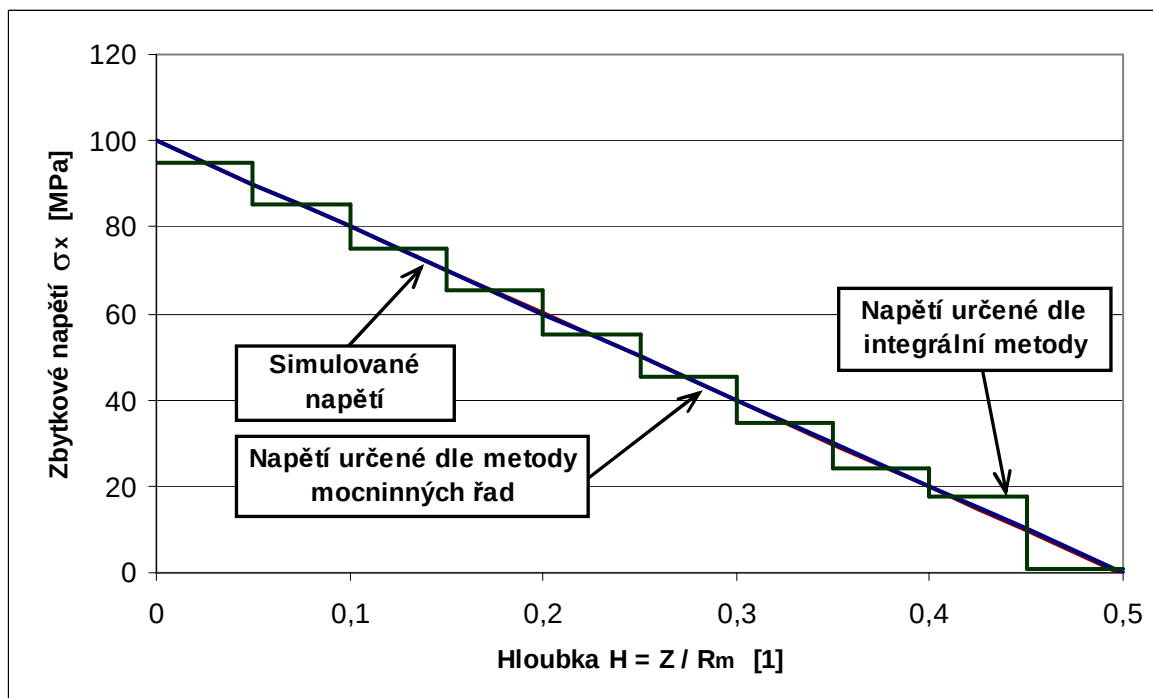
$$\mathbf{Q} = -E \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{G}^{\beta})^{-1} \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{q}) \quad (56)$$

$$\mathbf{T} = -E \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{G}^{\beta})^{-1} \cdot (\mathbf{G}^{\beta T} \cdot \mathbf{t}) \quad (57)$$

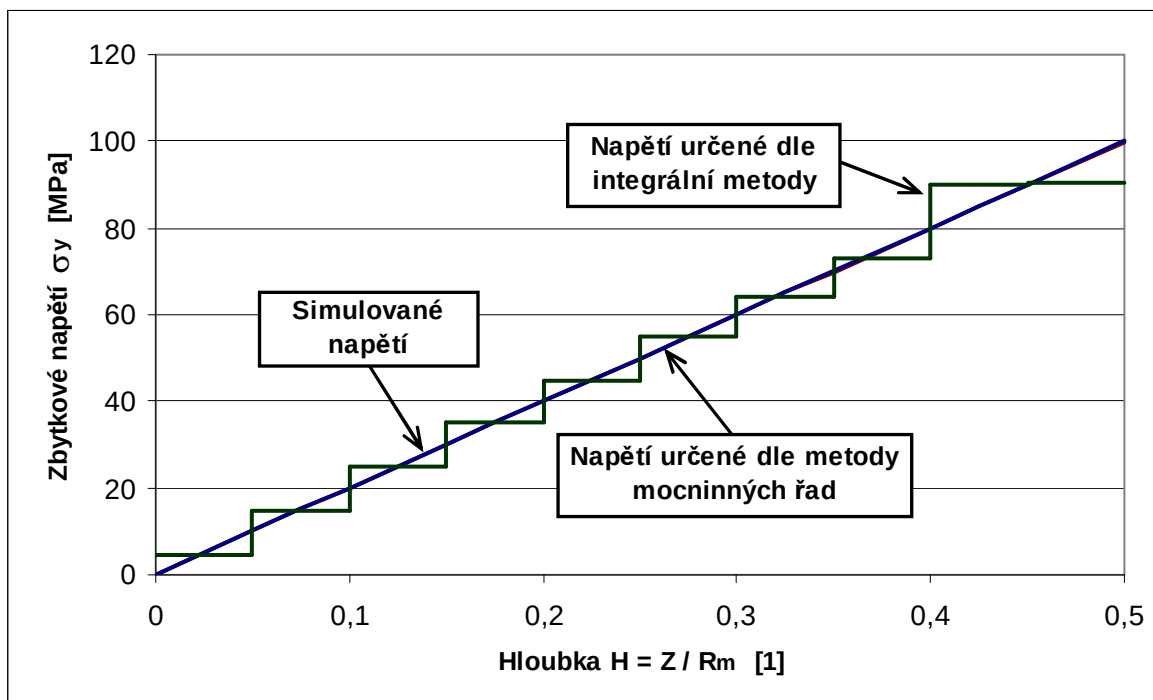
5. Stanovení zbytkového napětí pomocí příčinkové funkce

Pomocí metody konečných prvků bylo simulováno několik případů nehomogenního zbytkového napětí po hloubce a byla stanovena odezva tenzometrické růžice RY 61 S při postupném odvrtávání s deseti rovnoměrnými přírůstky hloubky otvoru. Průměr otvoru byl 1,6 mm o maximální hloubce $\frac{1}{2}$ středního poloměru tenzometrické růžice, tj. 1,275 mm. Tyto simulované průběhy zbytkových napětí byly ve tvaru lineární, exponenciální a polynommické funkce. Zbytkové napětí bylo vypočteno pomocí integrální metody a metody mocninných řad, které byly odvozeny na základě koeficientů příčinkové funkce definované výše. Zbytkové napětí bylo vypočteno pomocí integrální metody v deseti rovnoměrných přírůstcích hloubky otvoru. Pro metodu mocninných řad byl použit aproximační polynom různého stupně tak, aby dostatečně vystihoval zvolený průběh zbytkového napětí.

Na obr. 4 a 5 je znázorněn průběh lineárně klesajícího napětí v ose x od 100 do 0 MPa a vzrůstajícího napětí v ose y od 0 do 100 MPa. Pro tento případ byl pro metodu mocninných řad použit polynom druhého stupně. Nicméně při použití polynomu prvního stupně (lineární funkce) a vyššího byly výsledky zcela dostatečně uspokojivé a to až do šestého stupně polynomu. Při použití polynomu šestého a vyššího stupně polynomu se již začala projevovat numerická chyba výpočtu.

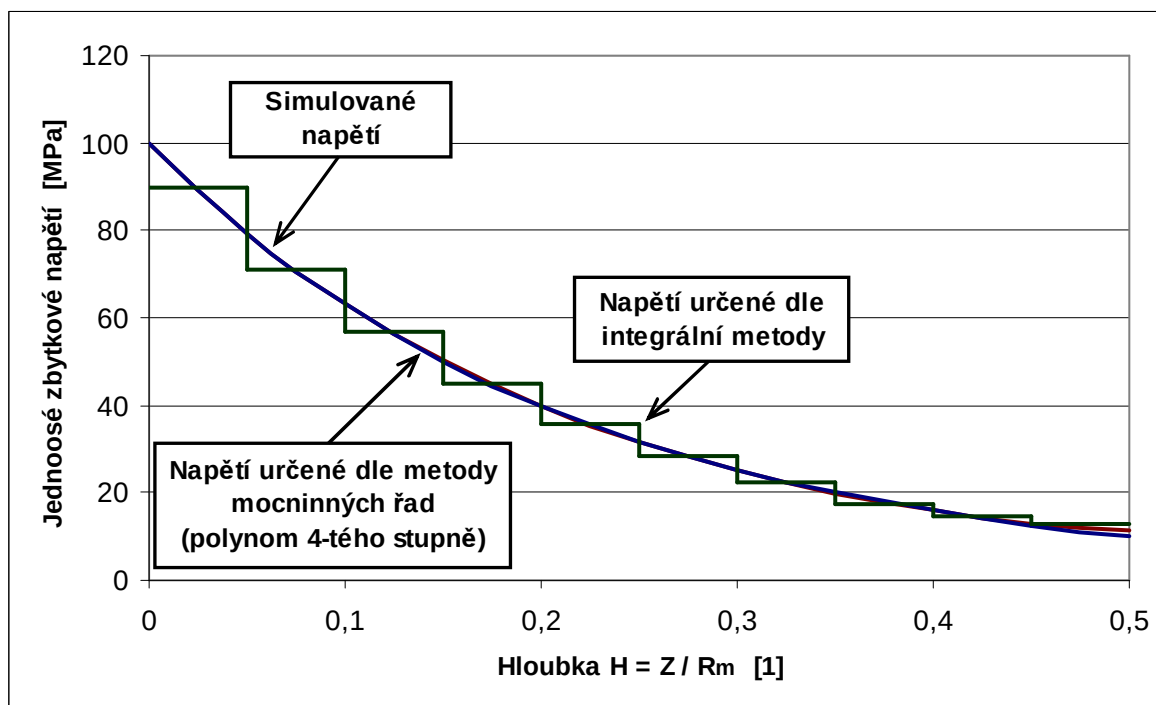


Obr. 4: Simulované a vypočtené zbytkové napětí v ose x ve tvaru lineární funkce



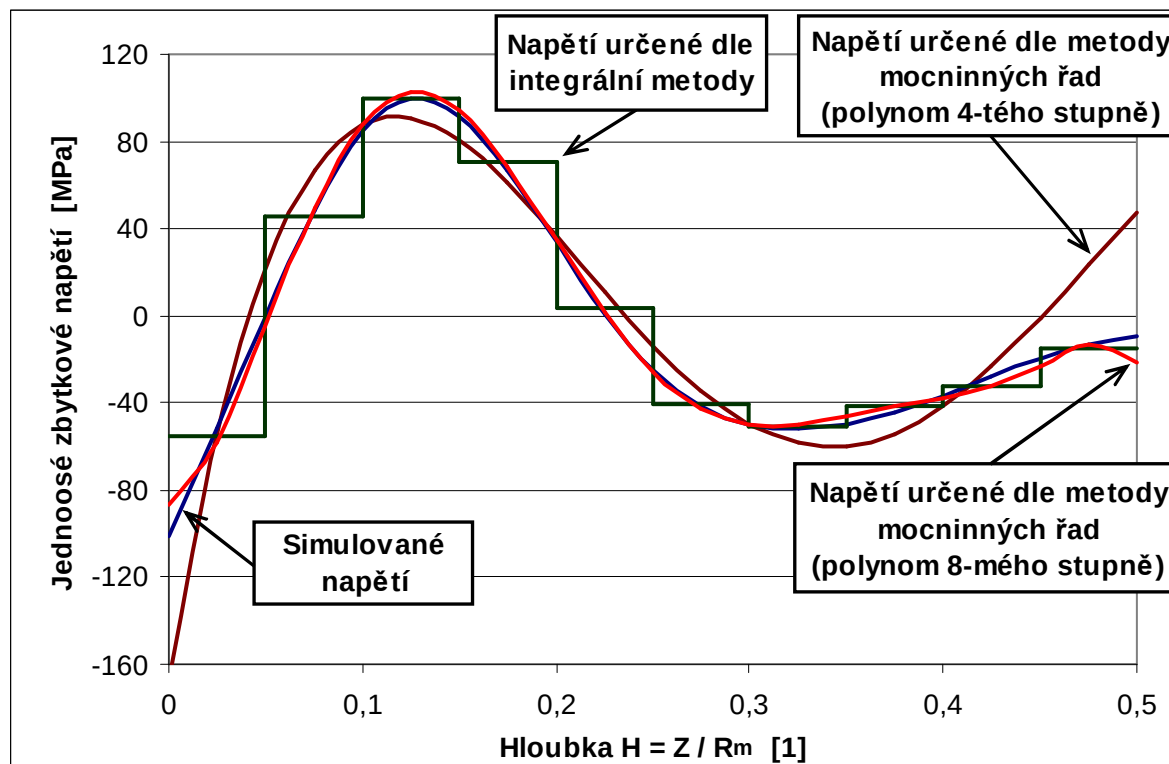
Obr. 5: Simulované a vypočtené zbytkové napětí v ose y ve tvaru lineární funkce

Na obr. 6 je znázorněn průběh zbytkového jednoosého napětí ve tvaru exponenciální funkce ve tvaru: $\sigma_x = 100^{1-H}$, tzn. že např. pro $H = 0$ je velikost zbytkového napětí 100 MPa. Pro metodu mocninných řad byl použit aproximační polynom čtvrtého stupně. Avšak i polynom třetího stupně již dostatečně vystihoval zvolený průběh zbytkového napětí. Při použití polynomu osmého a vyššího stupně docházelo při maximální hloubce otvoru již ke znatelným numerickým chybám.



Obr. 6: Simulované a vypočtené jednoosé zbytkové napětí ve tvaru exponenciální funkce

Na obr. 7 je znázorněn průběh zbytkového jednoosého napětí ve tvaru polynomicke funkce. Pro metodu mocninných řad byl použit aproximační polynom čtvrtého stupně. Avšak ani tento polynom s dostatečnou přesností nevystihuje zvolené simulované zbytkové napětí. Až při použití polynomu šestého a vyššího stupně dochází ke zlepšení přesnosti, ovšem napětí kolem maximální hloubky vrtaného otvoru se opět v důsledku numerické chyby odlišuje od zvoleného průběhu.



Obr. 7: Simulované a vypočtené jednoosé zbytkové napětí ve tvaru polynomicke funkce

6. Závěr

V tomto článku je uveden způsob výpočtu zbytkového napětí pomocí příčinkové funkce pro metodu vrtání otvoru. Pomocí příčinkové funkce může být snadno použita integrální metoda, metoda mocninných řad, případně jakákoliv metoda spočívající v aproximaci libovolnou funkcí nehomogenní zbytkové napětí po hloubce. Z tohoto důvodu příčinková funkce přináší jakési zobecnění při výpočtu nehomogenního napětí po hloubce metodou vrtání otvoru.

V příspěvku byla stanovena příčinková funkce ze součtových kalibračních koeficientů integrální metody. Přesnost této příčinkové funkce byla ověřena zpětným výpočtem kalibračních koeficientů, které byly porovnány s kalibračními koeficienty, které byly určeny z příčinkové funkce, kterou nám s velkou laskavostí poskytl M. Beghini z Univerzity v Pise pro námi požadované parametry. Odchyly mezi těmito kalibračními koeficienty se pohybovaly pouze okolo 3%. Stanovená příčinková funkce byla poté použita pro výpočet zbytkových napětí integrální metodou a metodou mocninných řad pro několik různých zvolených průběhů zbytkového napětí po hloubce tělesa, které byly simulovány pomocí metody konečných prvků. Z výše uvedených grafů lze vidět, že vypočtené zbytkové napětí jak integrální metodou tak i metodou mocninných řad je velmi přesné pokud zbytkové napětí

není velmi silně nehomogenní po hloubce tělesa. Pro dostatečně výstižný popis nehomogenního napětí, které je výrazně nehomogenní po hloubce tělesa, je potom nutné použít pro metodu mocninných řad aproximační polynom vyššího stupně nebo při použití integrální metody více přírůstků hloubky napětí. Ovšem v takovémto případě zejména při reálném měření může dojít ke zvýšenému projevu numerické chyby. Nicméně dosažené výsledky ukazují, že použití příčinkové funkce je velmi výhodné k výpočtu zbytkového napětí zejména z důvodu její snadné aplikace pro integrální metodu i metodu mocninných řad s nastavitelnými parametry (snadno nastavitelný počet přírůstků hloubek, na kterých působí zbytkové napětí resp. stupeň aproximačního polynomu). Použití příčinkové funkce je vhodné i z důvodu přesnosti vypočtených zbytkových napětí i z důvodu možného dalšího rozvoje směrem k nalezení vhodnější aproximace nehomogenního zbytkového napětí po hloubce tělesa.

7. Literatura

- Beghini, M., Bertini L., 2000. Analytical expressions of the influence functions for accuracy and versatility improvement in the hole-drilling Method. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 35, No. 2, pp. 125-135
- Schajer, G. S., 1988. Measurement of Non-Uniform Residual Stresses Using the Hole-Drilling Method. Part I, II, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 110, pp. 338-349.
- Švaříček, K., 2003. Determination of the Calibration Coefficients through the FEM for Measurement of the Uniform Residual Stress by the Hole-Drilling Method, *Experimental Stress Analysis 2003*, 41st International Conference, pp. 101-102.
- Švaříček, K., Vlk, M., 2005. Porovnání procedury ASTM E 837-01 a integrální metody pro výpočet zbytkové napjatosti nehomogenní po hloubce, *sborník 11. konf. Inženýrská mechanika 2005*, pp. 303-304.