

USING THE RESIDUE THEOREM FOR COMPUTING OF DYNAMIC SYSTEM RESPONSE AT IMPULSE EXCITATION

A. Bubák, P. Souček*

Summary: The time response of the linear dynamic system after the end of its force excitation can be investigated applying the Residue theorem without using the time-shifted Heaviside function. In the case of undamped dynamic system, there exists the simple relationship between the frequency spectrum of the forcing impulse and the amplitude of the free harmonic vibrations after the impulse stops. This method is available especially for the managing of vibration-less start or stop of movable systems. They can be even completely avoided if zero values of the frequency spectra of acceleration time function are placed to the natural frequencies of a driven system.

1. Laplaceův obraz konečného impulsu

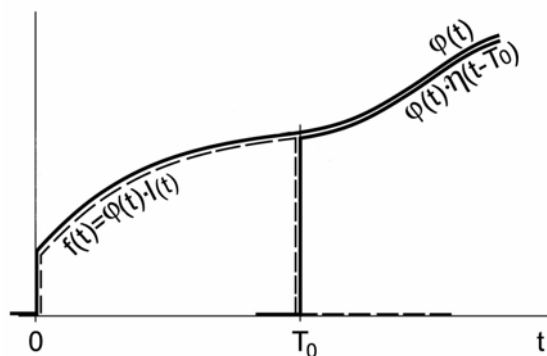
Matematický postup vyjádření konečného impulsu $f(t)$ je znázorněn na obr.1. Přitom je využita pomocná funkce $\varphi(t)$ (tzv. „vytvorující funkce“), definovaná na celém intervalu $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Její L. obraz označíme obecně $\Phi(s)$, hranici konvergence σ_1 . Dále použijeme posunutou Heavisideovu funkci $\eta(t - T_0)$, která je nulová na intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ a jednotková na intervalu $t \in (T_0, \infty)$. Konečný impuls, vytvořený z funkce $\varphi(t)$, lze vyjádřit rozdílem

$$f(t) = \varphi(t) - \varphi(t) \cdot \eta(t - T_0) = \varphi(t) \cdot [\eta(t) - \eta(t - T_0)] = \varphi(t) \cdot I(t) \quad (1)$$

kde $I(t) = \eta(t) - \eta(t - T_0)$ je obdélníkový impuls na intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ s jednotkovou výškou. Jeho L. obraz je

$$I(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} \quad (2)$$

Hranice konvergence funkce $I(s)$ je $\sigma_2 = 0$. Dále budeme předpokládat, že **L. obraz** $\Phi(s)$ **vytvorující funkce má jednonásobné póly** p_i . K vyhledání obrazu součinu (1) použijeme pravidlo o konvoluci obrazů (viz např. lit.[1]):



Obr. 1 Vytvoření konečného impulsu pomocí posunuté Heavisideovy funkce

* Ing. Antonín Bubák, Doc. Ing. Pavel Souček, DrSc.: Výzkumné centrum pro strojírenskou výrobní techniku a technologii, fakulta strojní, ČVUT v Praze; Horská 3; 128 03 Praha 2; tel.: +420.221 990 900, fax: +420.221 990 999; e-mail: a.bubak@volny.cz, p.soucek@rcmt.cvut.cz

$$F(s) = L\{\varphi(t) \cdot I(t)\} = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \Phi(q) I(s-q) dq \quad (3)$$

kde číslo σ , musí obecně splnit podmínku

$\sigma_1 < \sigma < \text{Res} - \sigma_2$ neboli (pro $\sigma_2 = 0$) $\sigma_1 < \sigma < \text{Res}$. Dosazením (2) do (3) vychází

$$F(s) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \Phi(q) \frac{1 - e^{-(s-q)T_0}}{s-q} dq \quad (4)$$

Funkce $\Phi(q) \frac{1 - e^{-(s-q)T_0}}{s-q}$ „zdědila“ póly p_i od funkce $\Phi(s)$ a navíc má ještě jeden pól

$p_{i+1} = s$ (integrační proměnnou je q !!). Integraci (4) provedeme pomocí reziduové věty, přičemž integrační dráha obklopuje celou část komplexní roviny vlevo od vodorovnice $\sigma = \text{konst}$. Pól $p_{i+1} = s$ leží ale vpravo od ní, takže stačí uvažovat pouze rezidua v pólech p_i , které leží vlevo od vodorovnice $\sigma_1 = \text{konst}$. Protože jsme předpokládali póly jednonásobné, platí

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_i \text{res}_{p_i} \left[\Phi(q) \frac{1 - e^{-(s-q)T_0}}{s-q} \right] = \sum_i \lim_{q \rightarrow p_i} (q - p_i) \Phi(q) \frac{1 - e^{-(s-q)T_0}}{s-q} = \\ &= \sum_i \lim_{q \rightarrow p_i} (q - p_i) \Phi(q) \cdot \lim_{q \rightarrow p_i} \frac{1 - e^{-(s-q)T_0}}{s-q} = \sum_i \text{res}_{p_i} [\Phi(q)] \cdot \frac{1 - e^{-(s-p_i)T_0}}{s-p_i} \end{aligned}$$

Pro reziduum obrazu vytvářející funkce v jejím pólu p_i zavedeme označení $R_{p_i} = \text{res}_{p_i} [\Phi(q)] = \text{res}_{p_i} [\Phi(s)]$, takže

$$F(s) = \sum_i R_{p_i} \frac{1 - e^{-(s-p_i)T_0}}{s-p_i} \quad (5)$$

Vztah (5) udává obecný návod, jak ze známé rovnice pro vytvářející funkci $\varphi(t)$ a z pólů p_i jejího obrazu $\Phi(s)$ zjistit Laplaceův obraz konečného impulsu o délce T_0 . Obraz vytvářející funkce i konečného impulsu mají společné singulární body.

Zpětnou transformací (5) určíme další možný tvar rovnice konečného impulsu (kromě již uvedeného tvaru (1)):

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \sum_i R_{p_i} \frac{1 - e^{-(s-p_i)T_0}}{s-p_i} \right\} = L^{-1} \left\{ \sum_i \frac{R_{p_i}}{s-p_i} - \frac{e^{p_i T_0} R_{p_i} e^{-s T_0}}{s-p_i} \right\}$$

Pomocí pravidla o obrazu exponenciální a posunuté funkce vychází

$$f(t) = \sum_i \left[R_{p_i} e^{p_i t} - e^{p_i T_0} R_{p_i} e^{p_i(t-T_0)} \cdot \eta(t-T_0) \right] = \sum_i R_{p_i} e^{p_i t} \cdot [\eta(t) - \eta(t-T_0)]$$

a konečně

$$f(t) = I(t) \sum_i R_{p_i} e^{p_i t} \quad (6)$$

Vztah (6) vyjadřuje skutečnost, že konečný impuls je složen z dílčích exponenciálních impulsů, vzniklých součinem příslušných exponenciálních vytvářejících funkcí a jednotkového obdélníkového impulsu o délce T_0 .

Příklad 1:

Uvažujme vytvářející funkci $\varphi(t) = \sin \Omega t$, jejíž L. obraz je

$$\Phi(s) = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} = \frac{\Omega}{(s - j\Omega)(s + j\Omega)}$$

L. obraz konečného impulsu, tvořeného jednou půlvlnou sinusovky v intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ (kde $T_0 = \pi/\Omega$) určíme podle (5). Rezidua funkce $\Phi(s)$ v obou komplexně sdružených pólech $\pm j\Omega$ jsou rovněž komplexně sdružená

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{+j\Omega}[\Phi(s)] &= \frac{1}{2j}, \quad \operatorname{res}_{-j\Omega}[\Phi(s)] = \frac{-1}{2j} \\ F(s) &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{1 - e^{-(s-j\Omega)T_0}}{s - j\Omega} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1 - e^{-(s+j\Omega)T_0}}{s + j\Omega} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1 + e^{-sT_0}}{s - j\Omega} - \frac{1 + e^{-sT_0}}{s + j\Omega} \right] \end{aligned}$$

(přitom jsme využili vztahu $e^{\pm j\Omega T_0} = e^{\pm j\pi} = -1$). Po úpravách vychází

$$F(s) = \Omega \frac{1 + e^{-sT_0}}{s^2 + \Omega^2}$$

Stejný výsledek bychom získali přímo z definičního integrálu L.transformace integrací v konečných mezích $0 \rightarrow T_0$, tj. $F(s) = \int_0^{T_0} \sin \Omega t \cdot e^{-s t} dt$.

Poznámky:

1) Obecný časově omezený impuls $f(t)$ má konečnou plochu pod čarou, takže integrál $\int_0^{T_0} f(t) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt$ vždy konverguje. Pro lib. komplexní číslo s tedy konverguje též integrál

$$\int_0^{T_0} f(t) \cdot e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s t} dt = F(s)$$

což je ale Laplaceův obraz funkce $f(t)$. Je tedy možno obecně prohlásit, že **Laplaceův obraz libovolného konečného impulsu je celistvou funkcí** (tj. konverguje v celé komplexní rovině, je spojitý pro všechna čísla s a jeho eventuální singulární body p_i jsou vždy odstranitelnými singularitami – viz lit.[1]). Pro každý jednotlivý sčítanec v (5) platí

$$\lim_{s \rightarrow p_i} R_{p_i} \frac{1 - e^{-(s-p_i)T_0}}{s - p_i} = (l'Hosp. pravidlem) = T_0 R_{p_i}$$

2) Pro každý konečný impuls platí, že

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = F(0) = \int_0^{T_0} f(t) dt$$

což je plocha pod čarou funkce $f(t)$. To se nutně potvrzuje i u obecných vztahů (5) a (6):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_i R_{p_i} \frac{1 - e^{-(s-p_i)T_0}}{s - p_i} = \sum_i R_{p_i} \frac{e^{p_i T_0} - 1}{p_i} = \int_0^{T_0} f(t) \sum_i R_{p_i} e^{p_i t} dt$$

3) Výraz za sumačním znaménkem v (6) bychom obdrželi též po rozkladu funkce $\Phi(s)$ na parciální zlomky v případě, že tato je racionální a ryze lomená. Obecně totiž platí, že koeficienty u parciálních zlomků jsou rezidua v jejích pólech.

4) V případě, že funkce $\Phi(s)$ má některé póly komplexně sdružené, jsou komplexně sdružená i příslušná rezidua a výraz (6) opět vede na reálnou funkci času.

5) Protože funkce $f(t)$ je absolutně integrovatelná, je možno určit i její **Fourierův obraz** (frekvenční spektrum), který vznikne pouhou záměnou $s \rightarrow j\omega$ ve výrazu $F(s)$.

2. Odezva lineárního dynamického systému na konečný exponenciální impuls

Přenosová funkce dynamického systému, popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, je racionální ryze lomená. Jde tedy o podíl dvou polynomů, který lze při znalosti kořenů d_k jmenovatele $P_n(s)$ rozložit na parciální zlomky

$$D(s) = \frac{P_m(s)}{P_n(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - d_k}, \quad m < n \quad (7)$$

C_k rezidua funkce komplexní proměnné $D(s)$ v jejích singulárních bodech (pólech) d_k . Předpokládejme nejčastější případ, kdy **póly d_k jsou jednonásobné**. Pokud jsou dva póly komplexně sdružené, jsou komplexně sdružené i jim příslušné konstanty C_k .

Exponenciální impuls je podle (6) univerzálním tvarem, pomocí něhož lze superpozicí určit odezvu systému na impuls obecného tvaru. S využitím (5) je L. obraz odezvy

$$Y(s) = D(s)F(s) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s - d_k} \sum_i \text{res}_{p_i} [\Phi(s)] \frac{1 - e^{-(s-p_i)T_0}}{s - p_i} \quad (8)$$

S ohledem na aditivnost L.transformace a princip superpozice **stačí vyšetřovat zpětnou transformaci jen pro jednu složku odezvy $y_{pd}(t)$, příslušnou jedinému pólu p obrazu $\Phi(s)$ a jedinému pólu d dynamického systému** (celkový počet všech složek je $i \times n$). Zpětná transformace funkce $Y_{pd}(s)$ proběhne pomocí reziduové věty v jejích obou pólech p, d :

A) Póly jsou od sebe různé, $p \neq d$

$$\begin{aligned} \text{Postup A1)} \quad y_{pd}(t) &= L^{-1} \left\{ R_p C \frac{1 - e^{-(s-p)T_0}}{(s-p)(s-d)} \right\} = R_p C \sum \text{res}_{p,d} \frac{(1 - e^{-(s-p)T_0}) e^{s t}}{(s-p)(s-d)} = \\ &= R_p C \sum \text{res}_{p,d} \left[\frac{e^{s t}}{(s-p)(s-d)} \right] - R_p C e^{p T_0} \sum \text{res}_{p,d} \left[\frac{e^{-s T_0} e^{s t}}{(s-p)(s-d)} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

Rozepsáním obou reziduí v prvním sčítanci (9) dostáváme

$$y_{1pd}(t) = \frac{R_p C e^{p t}}{p - d} + \frac{R_p C e^{d t}}{d - p} = R_p C \frac{e^{p t} - e^{d t}}{p - d}$$

Druhý sčítanec v (9) je L. obrazem posunuté funkce $e^{p T_0} y_{1pd}(t - T_0) \cdot \eta(t - T_0)$, takže výsledný tvar odezvy na jeden exponenciální impuls je

$$\begin{aligned}
y_{pd}(t) &= y_{1pd}(t) - e^{pT_0} y_{1pd}(t - T_0) \cdot \eta(t - T_0) = \frac{R_p C}{p - d} \left[e^{p t} - e^{d t} - e^{pT_0} (e^{p(t-T_0)} - e^{d(t-T_0)}) \cdot \eta(t - T_0) \right] = \\
&= \frac{R_p C}{p - d} \left[e^{p t} I(t) - e^{d t} + e^{(p-d)T_0} e^{d t} \eta(t - T_0) \right] \quad (10)
\end{aligned}$$

kde $I(t) = \eta(t) - \eta(t - T_0)$ je obdélníkový impulz na intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ s jednotkovou výškou.

Postup A2) Dále provedeme zjednodušený výpočet odezvy (opět jen pro její jednu složku $y_{pd}(t)$), při kterém sice vyjdeme z (8), ale zpětná transformace proběhne výpočtem reziduí přímo bez rozložení na dva sčítance, jak tomu bylo v (9). Tímto se sice z matematického hlediska dopouštíme chyby (ignorujeme pravidlo o obrazu posunuté funkce), přesto dojdeme k zajímavému výsledku:

$$\begin{aligned}
y_{pd}(t) &= R_p C \sum \text{res}_{p,d} \frac{(1 - e^{-(s-p)T_0}) e^{s t}}{(s-p)(s-d)} = R_p C \frac{(1 - e^{-(p-p)T_0}) e^{p t}}{p-d} + R_p C \frac{(1 - e^{-(d-p)T_0}) e^{d t}}{d-p} = \\
&= R_p C \frac{(1 - e^{-(d-p)T_0}) e^{d t}}{d-p} = \frac{R_p C}{p-d} \left[-e^{d t} + e^{(p-d)T_0} e^{d t} \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

a) Počínaje časem T_0 je v (10) hodnota jednotkového impulzu $I(t)$ nulová a hodnota posunuté Heavisideovy funkce $\eta(t - T_0)$ jednotková, takže **výrazy (10) a (11) dávají v intervalu $t \in (T_0, \infty)$ shodný výsledek.** Zjednodušený (a v intervalu $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ chybný!!) výpočet je tedy pro časový interval $t \in (T_0, \infty)$ správný.

b) U postupu 2 je vidět, že reziduum funkce $Y(s)$, příslušející pólu p L. obrazu konečného exponenciálního impulzu, je nulové. Pro zjištění odezvy je relevantní pouze reziduum příslušející pólu d přenosové funkce dynamického systému.

c) Předchozí závěry **a), b)** platí i v případě konečného impulzu obecného tvaru, neboť ten lze podle (6) rozložit na součet více elementárních exponenciálních impulzů.

B) Póly jsou shodné, $p = d$

I v tomto případě lze dokázat, že všechna tři předchozí tvrzení **a), b), c)** jsou pravdivá.

3. Shrnutí

Bez ohledu na to, mají-li L. obraz konečného budicího impulzu a přenosová funkce dynamického systému vzájemně různé nebo shodné póly, platí tyto závěry:

- pro výpočet odezvy dynamického systému na impulz délky T_0 lze počínaje tímto časem použít zjednodušený postup pomocí reziduové věty bez aplikace posunuté Heavisideovy funkce

- rezidua L. obrazu odezvy, příslušející singulárním bodům p_i obrazu impulzu, jsou u zjednodušeného postupu nulová, takže při zpětné transformaci stačí uvažovat jen rezidua v pólech dynamického systému. Místo úplného výrazu (5) pro obraz impulzu lze proto v případě potřeby použít jen symbolické označení $F(s)$ a pro odezvu platí

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \text{res}_{d_k} \left[\frac{C_k}{s-d_k} \sum_i R_{p_i} \frac{1-e^{-(s-p_i)T_0}}{s-p_i} e^{s t} \right] = \sum_{k=1}^n \text{res}_{d_k} \left[\frac{C_k}{s-d_k} F(s) e^{s t} \right] = \sum_{k=1}^n C_k F(d_k) e^{d_k t} \quad (12)$$

- důkaz byl proveden pouze pro případ, že póly přenosové funkce dynamického systému i obrazu budicího impulsu jsou jednonásobné. Lze však dokázat, že platí i pro případ pólů vícenásobných.

Příklad 2: Odezva systému 1. řádu na exponenciální impuls

Přenosová funkce systému 1.řádu se zesílením C a časovou konstantou τ je obecně

$$D(s) = \frac{C}{\tau s + 1} = \frac{C/\tau}{s + 1/\tau}, \text{ její pól je } d = -1/\tau. \text{ Budicí impuls délky } T_0 \text{ je vytvořen z funkce}$$

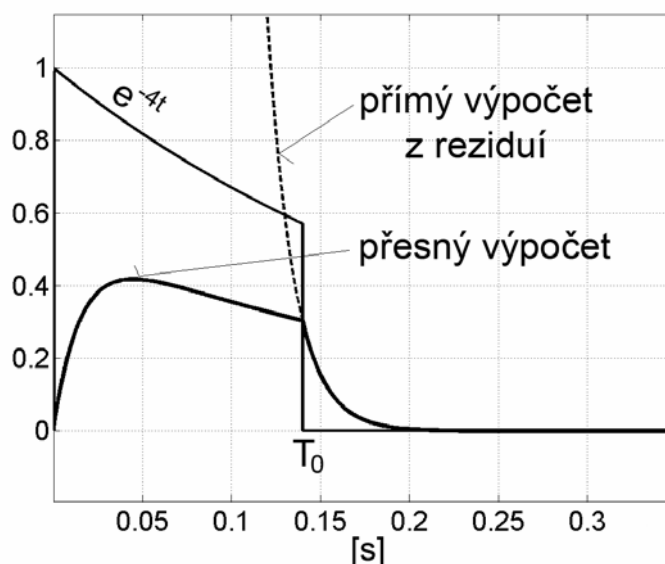
$\varphi(t) = K e^{p t}$, tj. $\Phi(s) = \frac{K}{s-p}$ a residuum $\text{res}_p[\Phi(s)] = K$. L. obraz exponenciálního impulsu je tedy podle (5)

$$F(s) = K \frac{1 - e^{-(s-p)T_0}}{s-p}$$

Zajímá-li nás odezva pouze v časovém intervalu $t \in (T_0, \infty)$, stačí provést zpětnou transformaci **postupem A2** bez použití posunuté Heavisideovy funkce, tj. výpočtem residua funkce $Y(s) = D(s)F(s)e^{s t}$ jen v pólu $d = -1/\tau$ (residuum v pólu p je nulové). Použitím (12) vychází

$$y(t) = CK \frac{e^{(1/\tau + p)T_0} - 1}{1 + p\tau} e^{-t/\tau}$$

Srovnání obou způsobů výpočtu je patrné z **obr.2**.



Obr.2 Odezva systému 1. řádu na sestupný exponenciální impuls (vytvorující funkce impulsu je $\varphi(t) = e^{-4t}$, $\tau = 0,015s$, $C = 0,5$)

Příklad 3: Odezva tlumeného systému 2. řádu na exponenciální impuls

Příkladem takového systému je soustava hmota – pružina – tlumič na **obr.3**, popsaná rovnicí

$$\ddot{y} + 2\zeta \Omega \dot{y} + \Omega^2 y = \frac{1}{m} f(t)$$

Vlastní kmitočet je $\Omega = \sqrt{k/m}$, poměrné tlumení ζ . Počáteční podmínky

jsou $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Vytvořující funkce exponenciálního impulsu síly je opět

$$\varphi(t) = K e^{p \cdot t}.$$

Laplaceův obraz výchylky hmoty je

$$Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} \quad (13)$$

Póly systému jsou $d_{1,2} = -\zeta\Omega \pm j\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$, takže

$$Y(s) = \frac{K}{m(s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2)} \cdot \frac{1 - e^{-(s-p)T_0}}{s - p} = \frac{K}{m(s - d_1)(s - d_2)} \cdot \frac{1 - e^{-(s-p)T_0}}{s - p}$$

Zajímá-li nás odezva pouze v časovém intervalu $t \in (T_0, \infty)$, stačí sečíst jen rezidua v pólech d_1, d_2 :

$$y(t) = \frac{K}{m} \left(\frac{1 - e^{-(d_1-p)T_0}}{(d_1 - d_2)(d_1 - p)} e^{d_1 t} + \frac{1 - e^{-(d_2-p)T_0}}{(d_2 - d_1)(d_2 - p)} e^{d_2 t} \right)$$

Rozdíl oproti přesnému způsobu výpočtu je patrný z příkladu na **obr.4**.



Obr.4 Odezva tlumeného systému 2. řádu na vzestupný exponenciální impuls síly (vytvořující funkce impulsu je $\varphi(t) = e^{4t}$, $m=1\text{kg}$, $\Omega/2\pi=10\text{Hz}$, tlumení $\zeta=0,05$)

4. Odezva jednohmotového netlumeného systému na obecný impuls

Při zanedbání poměrného tlumení v (13) je Laplaceův obraz výchylky hmoty

$$Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + \Omega^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{(s - j\Omega)(s + j\Omega)}$$

Póly dynamického systému jsou $d_{1,2} = \pm j\Omega$. Zásadní okolností pro další postup je, že v (12) vzniknou dva sčítance, obsahující výrazy $F(\pm j\Omega)$ (což jsou hodnoty Fourierova obrazu $F(j\omega)$ funkce $f(t)$ na kmitočtech $\pm \Omega$), takže lze použít pravidel pro počítání s frekvenčními spektry. V [4] byl odvozen vztah pro netlumené kmitání hmoty po zániku silového impulsu

$$y(t) = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega} \sin(\Omega t + \alpha), \quad t \in (T_0, \infty) \quad (14)$$

kde α je fázový posuv frekvenčního spektra $F(j\omega)$ na kmitočtu Ω .

Amplituda monotónních kmitů po zániku budícího impulsu je dána jedinou hodnotou jeho amplitudového spektra na vlastním kmitočtu systému Ω :

$$y_{\max} = \frac{|F(j\Omega)|}{m\Omega} = \frac{|F(j\Omega)|}{\sqrt{km}} = \frac{|A(j\Omega)|}{\Omega} \quad (15)$$

kde $A(j\omega)$ je Fourierův obraz (frekvenční spektrum) požadovaného zrychlení hmoty $a_{\text{žad}}(t) = f(t)/m$ a $A(j\Omega)$ je hodnota tohoto spektra na kmitočtu Ω . Dále platí viz [4], že energie vložená do systému silovým impulzem je

$$E = \frac{|F(j\Omega)|^2}{2m}$$

Příklad 4: Buzení Diracovým impulzem síly, tj. $f(t) = \delta(t)$, $L\{\delta(t)\} = 1$.

Odezvou systému na Diracův impuls je **váhová funkce $g(t)$** , kterou zjistíme zpětnou transformací (13) pro $F(s) = 1$:

$$g(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} \right\} = \frac{e^{-\zeta\Omega t}}{m\Omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\Omega\sqrt{1-\zeta^2} t)$$

a limitou pro $\zeta \rightarrow 0$ vychází váhová funkce netlumeného systému

$$g(t) = \frac{\sin \Omega t}{m\Omega} = \frac{\sin \Omega t}{\sqrt{km}}$$

Vzhledem k tomu, že amplitudové spektrum Diracova impulsu je pro všechny kmitočty konstantní jednotkové a fázové spektrum nulové, je vztah (14) potvrzen. Vložená energie

$$E_{\text{Dirac}} = \frac{1}{2m}$$

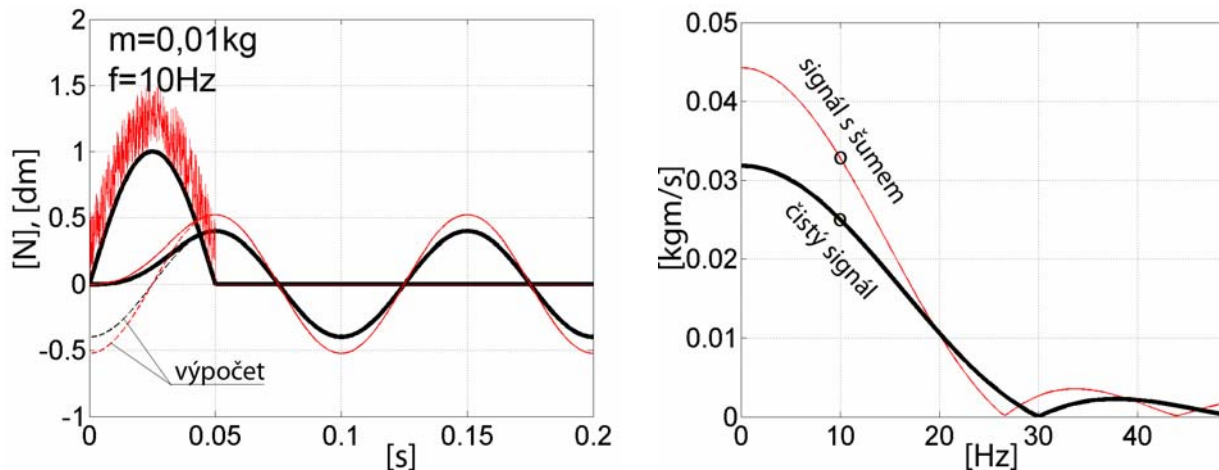
se periodicky “přelévá” z podoby potenciální do kinetické.

Příklad 5: Buzení sinusovým impulzem síly

Na obr. 5 jsou porovnány výsledky simulace a výpočtu podle (14) pro systém s hmotností $m = 0,01 \text{ kg}$ a tuhostí $k = 39,5 \text{ N/m}$. Vlastní kmitočet systému je $\Omega = \sqrt{k/m} = 2\pi \cdot 10 \text{ Hz}$, amplituda síly je $B = 1 \text{ N}$, šířka sinusové půlvlny je $0,05 \text{ s}$ (takže jde o zvláštní případ shody kmitočtu vytvářející funkce s kmitočtem systému Ω). Vlevo jsou časové průběhy silového

impulzu a výchylky v decimetrech, vpravo amplitudové spektrum impulzu s vyznačením jeho velikosti na vlastním kmitočtu systému (vše silnými čarami).

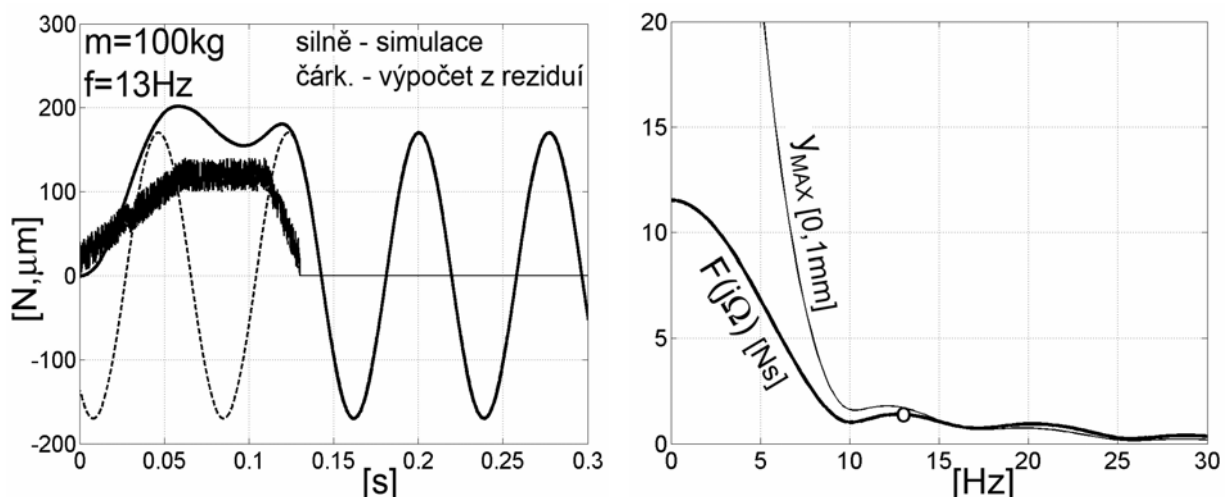
Dále je slabými čarami zobrazen případ, kdy na **budící impuls je superponován náhodný signál (šum)**. Exaktní výpočet nelze provést a je nutno použít numerickou simulaci nebo rovnici (14) s hodnotou spektra, určenou pomocí FFT. Výsledky simulace se od okamžiku zániku impulzu přesně shodují s výpočtem podle (14).



Obr.5 Buzení čistým a zašuměným sinusovým impulzem ($m=0,01 \text{ kg}$, $\Omega/2\pi=10 \text{ Hz}$, $\zeta=0$)

Příklad 6: Buzení zašuměným lichoběžníkovým impulzem síly

Rovněž zde je patrná shoda obou postupů výpočtu – viz **obr.6** vlevo. Vibrace je možno minimalizovat tvarem lichoběžníku, tj. „posazením“ lokálního minima amplitudového spektra na vlastní kmitočet systému (což v tomto příkladu nenastává úplně přesně - viz **obr.6** vpravo). Amplitudová spektra časových impulzů mají charakteristický s rostoucím kmitočtem převážně klesající průběh, takže ve zlomku (15) s růstem Ω čítec klesá a jmenovatel roste. Tím výrazně klesá amplituda vibrací $y_{\max}$, jak je znázorněno v **obr.6** vpravo slabou čarou.



Obr.6 Buzení lichoběžníkovým šumem ($m=100 \text{ kg}$, $\Omega/2\pi=13 \text{ Hz}$, $\zeta=0$)

5. Rozběh vícehmotového systému (viz [4])

Netlumený N -hmotový a od rámu uvolněný rotační systém je rozbíhán na konstantní rychlost impulzem momentu na první hmotě (motoru). Po zániku momentu platí pro parazitní torzní kmitání n -té souřadnice vztah

$$\Delta\phi_n(t) = \sum_{i=2}^N v_{in} v_{i1} \frac{|M_K(j\Omega_i)|}{\Omega_i} \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \quad (16)$$

kde $\Omega_1 = 0$, $n = 1 \dots N$, $i = 2 \dots N$, $t \in (T_0, \infty)$,

$|M_K(j\Omega_i)|$, α_i jsou hodnoty amplitudy a fáze frekvenčního spektra budicího momentu

$M_K(j\omega)$ na vlastních kmitočtech systému Ω_i ,

$v_{in} v_{i1}$ je součin n -té a první složky i -tého vlastního vektoru matice systému.

Pro případ $N = 2$ (**dvojhmotový systém** – např. vřeteno obráběcího stroje, poháněné od motoru vloženým převodem s pružným řemenem bez tlumení) byl z (16) odvozen vztah pro kolísání rychlosti hnané hmoty

$$\frac{d(\Delta\phi_2)}{dt} = -\frac{p|M_K(j\Omega_2)|}{J_C} \sin(\Omega_2 t + \alpha) = -|A(j\Omega_2)| \sin(\Omega_2 t + \alpha) \quad (17)$$

p převod

J_C celkový setrvačný moment systému redukováný na výstupní hřídel

Ω_2 (dále jen Ω) vlastní kmitočet uvolněného systému

$A(j\Omega)$, α hodnota amplitudového a fázového spektra zadávaného zrychlení hnané hmoty na vlastním kmitočtu Ω .

Amplituda kolísání rychlosti hnané hmoty po rozběhu dvojhmotového systému je přímo rovna velikosti amplitudového spektra zadávaného impulsu zrychlení na kmitočtu Ω . Toto tvrzení bylo ověřováno na dvojhmotovém systému se dvěma synchronními motory, jehož uspořádání je vidět na **obr.7**. Vložený převod je realizován pomocí torzní tyče ($p = 1$), přičemž pravý motor byl při měření pouze pasivním setrvačником. Protože jde o motory s konstantním buzením pomocí permanentních magnetů, průběh krouticího momentu hnacího motoru byl zadáván přímo proudem.

Vypočtené konstrukční parametry:

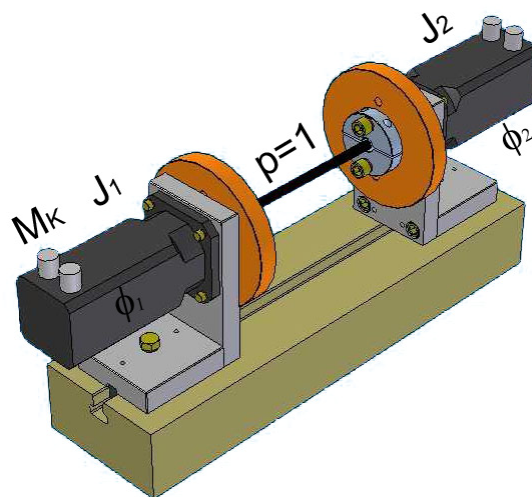
- moment setrvačnosti hnané hmoty (tj. levý setrvačnick + rotor motoru):

$$J_1 = 26,56 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

- moment setrvačnosti hnací hmoty (tj. pravý setrvačnick + rotor motoru): $J_2 = 47,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

- celkový moment setrvačnosti: $J_C = J_1 + J_2 = 73,84 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

- torzní tuhost tyče: $k_T = 927 \text{ Nm/rad}$

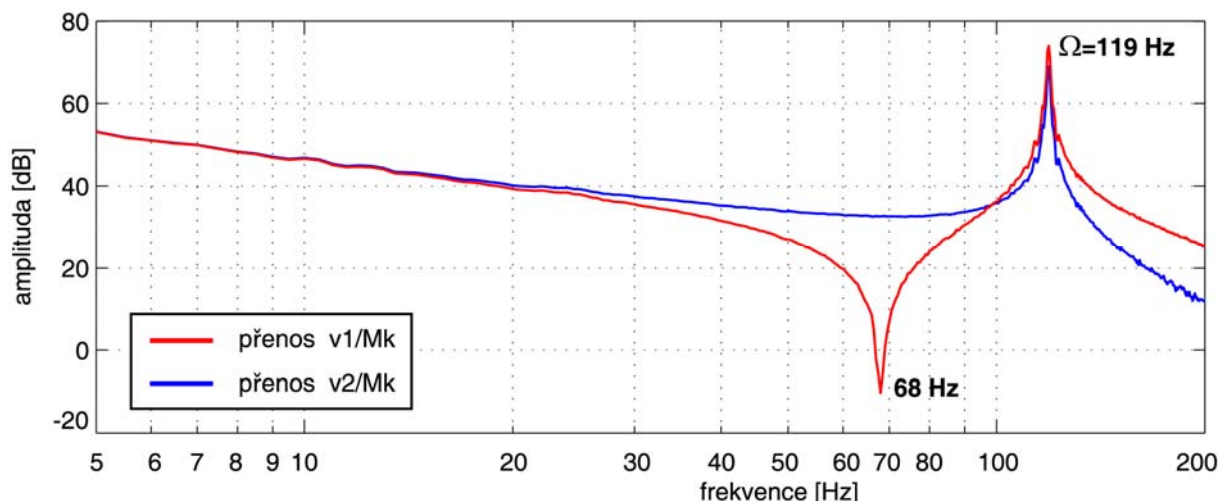


Obr.7: Dvojhmotový systém s jednotkovým převodem pomocí torzní tyče

Vlastní frekvence vypočtená z výkresové dokumentace

$$\Omega = \sqrt{k_T (1/J_1 + 1/J_2)} = 738,3 \text{ rad/s} = 117,5 \text{ Hz}$$

dosti dobře souhlasí s naměřenými amplitudovými frekvenčními charakteristikami systému - viz **obr.8**.



Obr.8: Naměřené amplitudové frekvenční charakteristiky přenosů mezi úhlovou rychlostí otáčení hnací (v_1) resp. hnané (v_2) hmoty a kroutícím momentem motoru

Systém byl buzen sinusovým pulzem $M_k(t) = (\alpha_{\max} J_c) \cdot \sin \Omega_0 t$ tvaru jedné půlvlny v časovém intervalu $t \in \langle 0, \pi/\Omega_0 \rangle$ viz **obr.9** vlevo. Frekvenční spektrum budicího pulzu je

$$M_k(j\omega) = \alpha_{\max} J_c \Omega_0 \cdot \frac{1 + e^{-j\pi\omega/\Omega_0}}{\Omega_0^2 - \omega^2} = \alpha_{\max} J_c \Omega_0 \cdot \frac{1 + \cos(\pi\omega/\Omega_0) - j \sin(\pi\omega/\Omega_0)}{\Omega_0^2 - \omega^2}, \quad (18)$$

pro hodnotu amplitudového spektra na vlastní mechanické frekvenci Ω tedy platí

$$|M_k(j\Omega)| = \alpha_{\max} J_c \Omega_0 \cdot \frac{\sqrt{2 + 2\cos(\pi\Omega/\Omega_0)}}{\Omega_0^2 - \Omega^2} = \alpha_{\max} J_c \Omega_0 \cdot \frac{2\cos(\pi\Omega/2\Omega_0)}{\Omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (19)$$

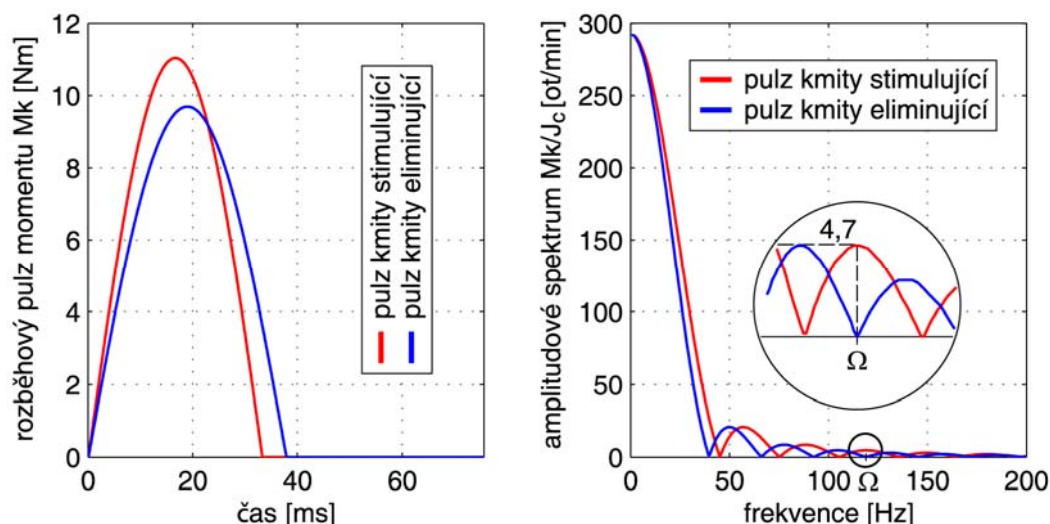
Kolísání rychlosti hnané hmoty je po zániku pulzu momentu dáno výrazem (17). Ve zvláštních případech poměru vlastní frekvence mechanické soustavy Ω a frekvence budicího pulzu Ω_0 lze kmitání hnané hmoty zcela eliminovat:

$$\frac{d(\Delta\phi_2)}{dt} = 0 \Leftrightarrow M_k(j\Omega) = 0 \Leftrightarrow \Omega_0 = \frac{\Omega}{2k+1} \quad k=1,2,3,\dots \quad (20)$$

Tento předpoklad byl zkoumán experimentálně dvěma průběhy momentových pulzů, které oba shodně urychlily otáčky soustavy z klidu na 4,87 ot/s (292/min).

První případ pulzu (nazvaný „**kmity eliminující**“) byl zvolen tak, aby hodnota jeho amplitudového spektra na frekvenci Ω byla nulová. Ve druhém případě pulzu **kmity stimulujícího** dosahuje spektrum svého lokálního maxima - viz **obr. 9** vpravo

typ pulzu	Ω_0	$ M_k(j\Omega) $
kmity eliminující	$\Omega/9$	0
kmity stimulující	$\Omega/8$	4,7 ot/min



Obr.9: Časové průběhy budících pulzů a jejich amplitudová spektra

Časové průběhy kolísání rychlosti otáčení a úhlového natočení po zániku momentového pulzu jsou na **obr. 10** a **obr.11**.

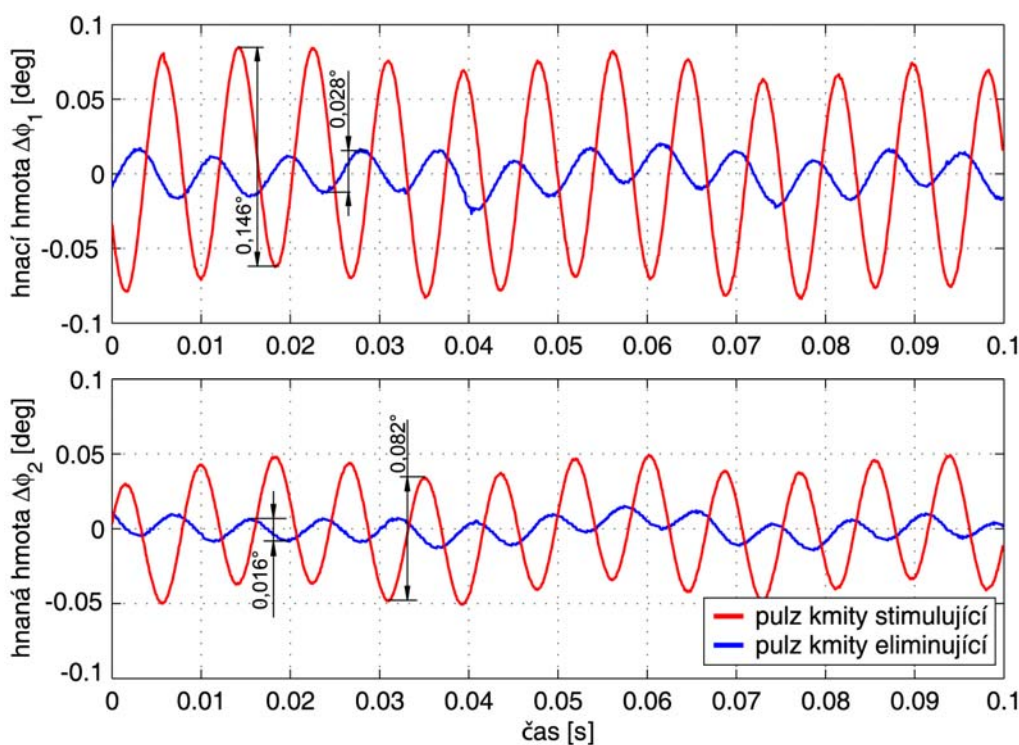
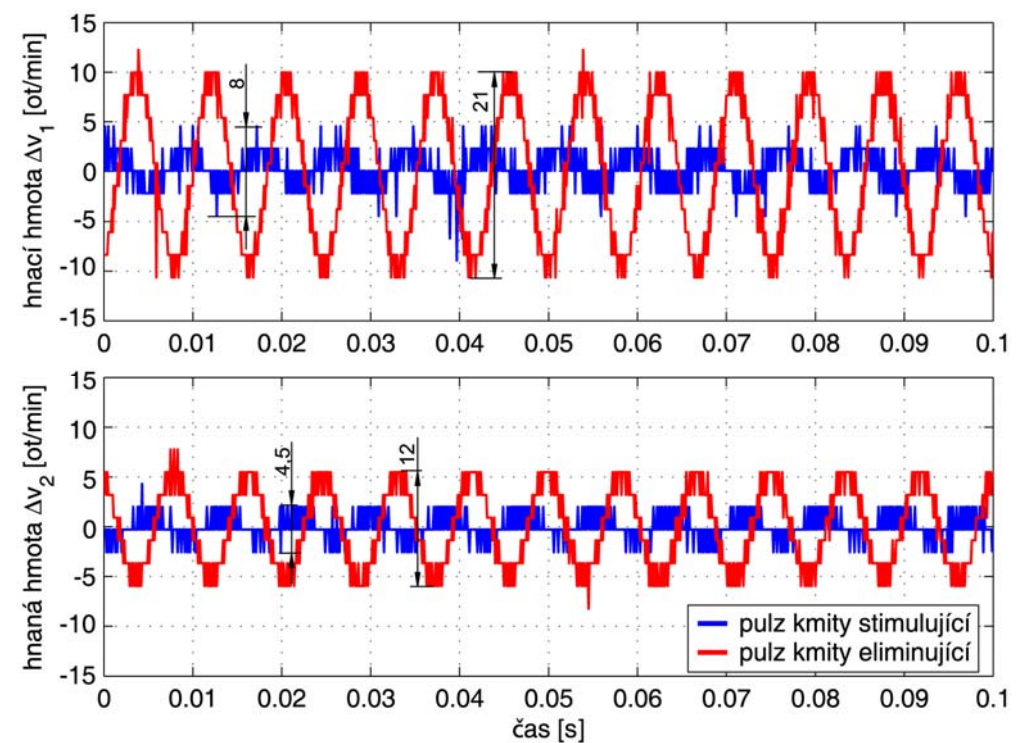
Získané výsledky, zejména amplitudy kolísání úhlové rychlosti) jsou částečně ovlivněny kvantováním snímače úhlového natočení (jeho rozlišení bylo $1/32768^\circ$), přesto se dobře shodují s teoretickými výpočty. Amplituda kolísání úhlové rychlosti hnané hmoty u stimulujícího pulzu je 6 ot/min, což se přibližně shoduje s hodnotou spektra $|M_k(j\Omega)| = 4,7$ ot/min. Pro amplitudu natočení hnané hmoty vychází výpočtově $0,038^\circ$, naměřená hodnota činí $0,041^\circ$ (velmi dobrá shoda!!). Naměřené amplitudy kmitů rychlosti a natočení si též vzájemně odpovídají podle vztahu $\Delta\Phi_i = \Delta V_i / \Omega$. Poměr amplitudy u hnací a hnané hmoty je v souladu s poměrem momentů setrvačnosti $J_2/J_1 = 1,8$.

V případě pulzu eliminujícího kmitání sice došlo k patrnému vybuzení kmitů, jejich amplituda je však zhruba dvacetiprocentní pro natočení. Zde nelze očekávat naprostou shodu s teorií, neboť zadávaný sinusový impuls proudu může být nepatrně zkreslen v tranzistorovém výkonovém zesilovači a rovněž převod proudu na kroučicí moment není u reálného elektromotoru zcela lineární. Z **obr.9** vpravo je rovněž patrné, že se pohybujeme v oblasti malých hodnot frekvenčního spektra budícího impulsu a i malá odchylka od přesného „posazení“ jeho nuly na vlastní kmitočet systému Ω může hrát významnější roli.

6. Závěr

V příspěvku byla dokázána oprávněnost zjednodušeného použití reziduové věty (bez aplikace posunuté Heavisideovy funkce) při určení odezvy lineárního dynamického systému na konečný budící impuls po jeho zániku. S využitím principu superpozice stačilo důkaz provést pro systém s přenosovou funkcí 1.řádu, vybuzený konečným exponenciálním impulzem s obecně komplexním exponentem.

V případě netlumeného dynamického systému je možno u dokázaných vztahů aplikovat některé výhodné vlastnosti frekvenčních spekter. Takto byla potvrzena velmi jednoduchá souvislost mezi průběhem odezvy po zániku budícího impulsu a hodnotami jeho frekvenčního spektra na vlastních kmitočtech systému, uvedená již v lit.[4]. Popsaná metoda může být dobře využita k potlačení parazitních vibrací při rozbíhání strojů.



Obr. 10: Kolísání úhlové rychlosti otáčení hnací a hnane hmoty po ukončení působení budícího momentového pulzu

Obr. 11: Kolísání úhlového natočení hnací a hnane hmoty po ukončení působení budícího momentového pulzu

7. Literatura

- [1] Lavrentěv, M.A., Šabat, B.V.: Metody teorie funkcí komplexní proměnné Vyd. Nauka, Moskva 1973
- [2] Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics, J.Wiley&Sons, New York 1994
- [3] Pírko, Veit, J.: Laplaceova transformace, SNTL, Praha 1979
- [4] Souček, P., Bubák, A.: Reduction of vibration in NC feed drives konference Inženýrská mechanika 2005, Svratka 9.-12.5.2005