

VISCOELASTICITY AND GROWTH THEORY

J. Rosenberg^{*}, L. Hynčík^{*}

Summary: *The paper shows how to explore the mathematical model of growth and remodeling for description of both visco-elastic behavior of continua and simulation of muscle contraction. The mentioned algorithm accommodates a lot of material parameters and functions (deformation energy, remodeling force) that are necessary to choose in order to the results to be in correspondence to the experimental data. However, this model is able to be considered more physically based than other, purely phenomenological models. The goal of the paper is not to find real parameters but to show the possibilities and qualitative match with known results.*

1. Úvod

V posledních desetiletích minulého století a v prvních létech století nynějšího byla v odborné literatuře věnována velká pozornost šíření nehomogenit v kontinuu, matematické teorii plasticity či teorii růstu a remodelace. Jako klíčové lze uvést práce Kroenera [5], Nolla [8], Maugina [6], Epsteina [3], Imataniho [4], Tabera [10], Rodrigueze [9] či DiCarla [1]. Při jejich studiu je zřejmé a uvedení autoři na to rovněž často poukazují, že matematický model je shodný. DiCarlo v [1] pak uvádí konsistentní teorii růstu a remodelace vycházející z uvedených prací. Růst a remodelaci přitom chápe obecně jako změnu objemu i změnu materiálové symetrie. Souvislost s jinými materiálovými teoriemi je pak ukázána v [2] při aplikaci tzv. pasivního růstu na popis creepu.

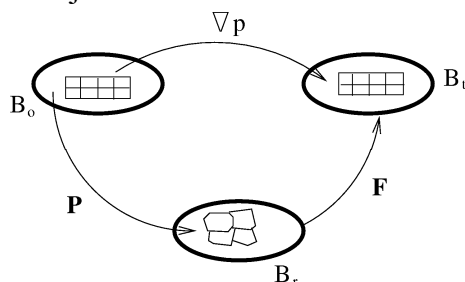
Tento příspěvek je věnován jednak rozšíření aplikace pasivního růstu na popis viskoelastického chování materiálů obecně a dále na popis chování svalového vlákna. Tato aplikace vychází z myšlenky, že svalová akce není nic jiného, než remodelace probíhající na základě jistého aktivačního procesu v relativně krátkém čase oproti remodelaci tkání v průběhu vývoje. V dalším je stručně nastíněna základní teorie růstu která je pak v následujících odstavcích aplikována na viskoelastické 1D kontinuum a posléze na svalové vlákno Hillova typu.

2. Teorie růstu a remodelace

Východiskem je počáteční konfigurace B_0 , jež „roste“, tj. mění svůj objem či materiálové parametry. Tento růst je vyjádřen růstovým tenzorem $\mathbf{P}$, jenž zobrazuje počáteční konfiguraci

^{*} Prof. Ing. Josef Rosenberg, DrSc., Ing. Luděk Hynčík, Ph.D.: Katedra mechaniky, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň; tel.: +420 377 632 325, fax: +420 377 632 302; e-mail: rosen@kme.zcu.cz, hyncik3@ntc.zcu.cz

do konfigurace relaxované B_r s nulovým vnitřním napětím. Do reálné konfigurace B_t , v níž již může existovat vnitřní napětí vyvolané růstem a vnějším zatížením, ji pak zobrazuje deformační tenzor $\mathbf{F}_r$. Situace je znázorněna na obr. 2.1.



Obr. 2.1 Vztah počáteční, relaxované a reálné konfigurace

Pro celkový deformační gradient mezi konfiguracemi B_0 a B_t pak platí

$$\nabla p = \mathbf{F} \mathbf{P} . \quad (2.1)$$

Z principu objektivitě pak plyne, že růstový tenzor je vždy symetrický pozitivně definitní. Di Carlo pak ve svých pracích uvádí metodu odvození základních rovnic pro získání růstového tenzoru.

Vychází přitom ze zobecněného principu virtuálních výkonů viz Maugin [6]. Uvažujeme-li rychlost kontinua $\mathbf{v} = \mathbf{V} \dot{\mathbf{P}}$ a rychlost růstu $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}$ a omezíme-li se na malé deformace, pak pro zobecněný virtuální výkon (working) platí

$$\int_{B_0} (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}) dC + \int_{\partial B_0} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \mathbf{V}), \quad (2.2)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je Cauchyho tenzor napjatosti, $\mathbf{b}$ je objemová síla, $\mathbf{z}$ vektor vnitřních účinků, $\mathbf{B}$ vnitřní remodelační zobecněná síla a $\mathbf{C}$ vnější nemodelační zobecněná síla, $\hat{\mathbf{t}} \mathbf{n}$ je předepsané napětí na hranici oblasti, $\mathbf{n}$ je vektor vnější normály.

Z principu objektivitě plyne $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ a symetrie tenzoru $\boldsymbol{\tau}$ [1]. Aplikací Greenovy věty a dalšími úpravami získáme z (2.2) tyto základní rovnice

$$\text{Div } \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{na } B_0 , \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \text{na } B_0 , \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{t}} \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \quad \text{na } \partial B_0 . \quad (2.5)$$

Z II. zákona termodynamiky plyne

$$\dot{\psi} \leq \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} , \quad (2.6)$$

kde $\psi(\mathbf{F})$ je měrná elastická energie vztažená na relaxovaný objem. Na levé straně uvedená derivace je derivace materiálová. Platí proto

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}} + \psi \mathbf{V} \leq \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{V} . \quad (2.7)$$

Pro $\nabla \mathbf{v}$ lze odvodit vztah [1]

$$\nabla \mathbf{v} = (\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{FV}) \quad (2.8)$$

a tedy

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} (\dot{\mathbf{F}} + \mathbf{FV}) . \quad (2.9)$$

Po dosazení do (2.7) a jednoduchých úpravách obdržíme

$$\left(\boldsymbol{\tau} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) \dot{\mathbf{F}} + (\mathbf{C} + \mathbf{F} \boldsymbol{\tau} - \psi \mathbf{I}) \mathbf{V} \geq 0 . \quad (2.10)$$

Předpokládejme dále, že napětí $\boldsymbol{\tau}$ lze rozložit na složku elastickou $\boldsymbol{\tau}_{el}$ a disipativní $\boldsymbol{\tau}_{dis}$ [7]. Po dosazení obdržíme

$$\left(\boldsymbol{\tau}_{el} + \boldsymbol{\tau}_{dis} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) \dot{\mathbf{F}} + (\mathbf{C} + \mathbf{F} \boldsymbol{\tau} - \psi \mathbf{I}) \mathbf{V} \geq 0 . \quad (2.11)$$

Tato nerovnost je splněna pro

$$\boldsymbol{\tau}_{el} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} , \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{dis} = \mathbf{H} \dot{\mathbf{F}} , \quad (2.13)$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{E} = \mathbf{G} \mathbf{V} ; \quad \mathbf{E} = \psi \mathbf{I} - \mathbf{F} \boldsymbol{\tau} , \quad (2.14)$$

kde $\mathbf{E}$ je tenzor Eshelbyho typu, $\mathbf{H}$ a $\mathbf{G}$ jsou pozitivně definitní matice.

3. Viskoelastické 1D kontinuum

Uvažujme 1D kontinuum o počáteční délce l_0 . Jeho aktuální délka nechť je l . Relaxovaná – tedy po realizovaném růstu – délka je označena l_r . Pro příslušné deformační gradienty, tak jak byly zavedeny v předchozím odstavci, pak platí

$$P = \frac{l_r}{l_0}, \quad F = \frac{l}{l_r}, \quad \nabla p = \frac{l}{l_0}, \quad (3.1)$$

přičemž samozřejmě se jedná o skalární funkce příslušných nezávisle proměnných. Omezíme se stejně tak jako v předchozím na malé deformace. Základní rovnice (2.12), (2.13), (2.14) popisující růst mají pak tvar

$$\tau = \frac{\partial \psi}{\partial F} , \quad (3.2)$$

$$\tau_{dis} = h \dot{F} , \quad (3.3)$$

$$C - E = g \dot{P} P^{-1}, \quad E = \psi F \tau . \quad (3.4)$$

V těchto rovnicích se vyskytují tyto volitelné parametry:

- g, h kladné konstanty,
- ψ deformační energie jako funkce „warpu“ $\mathbf{F}$,
- C vnější remodelační zobecněná síla.

Tyto parametry jsou k dispozici pro modelování konkrétního materiálu. Pro popis viskoelastického chování zvolíme $C = 0$ (odtud plyne pojem „pasivní růst“), resp. $C = konst.$. Deformační energii budeme uvažovat v nejjednodušším tvaru

$$\psi = \frac{1}{2} k (F - 1)^2. \quad (3.5)$$

Nebudeme uvažovat objemovou sílu a pak bude řešení podmínky rovnováhy triviální ($\tau = konst.$). Analyzujeme nyní dva základní případy creep a relaxaci :

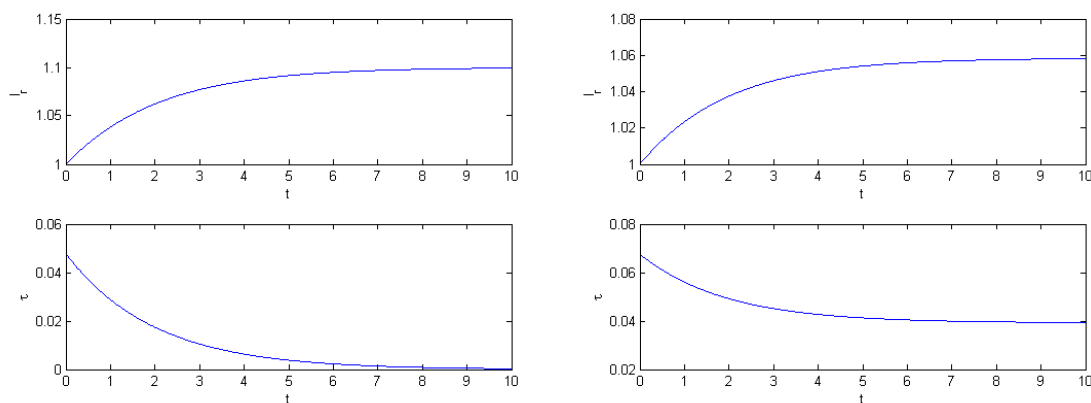
Relaxace:

Zde volíme $l = konst.$. Pro rychlost růstu pak získáme vztah

$$g \dot{P} P^{-1} = (F \tau - \psi - C). \quad (3.6)$$

Po dosazení z (3.1) platí pro relaxovanou délku

$$\dot{l}_r = l_r \frac{\frac{k}{2} l^2 - \left(C + \frac{k}{2}\right) l_r^2}{g l_r^2 + h l^2}. \quad (3.7)$$



Obr. 3.1 Průběh relaxované délky a napětí pro $C=0$ (vlevo) a $C>0$ (vpravo)

Jednoduchou analýzou lze zjistit fyzikální význam konstant. Pro $h = 0$ lze (3.7) jednoduše integrovat a určit vztah pro l_r .

$$l_r = \sqrt{\frac{1}{\frac{k}{2} - C} \left\{ \frac{k}{2} l^2 - \left[\frac{k}{2} l^2 - \left(\frac{k}{2} + C \right) l_0^2 \right] \exp \left[-\frac{2 \left(\frac{k}{2} + C \right)}{g} t \right] \right\}} \quad (3.8)$$

jenž dovoluje konstatovat, že g ovlivňuje rychlost relaxace a C pak zbytkovou hodnotu napětí po vyrelaxování. Platí totiž

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l_r = \sqrt{\frac{k}{k + 2C}} l \quad (3.9)$$

a

$$\tau = k \left(\frac{l}{l_r} - 1 \right) = k \left(\sqrt{\frac{k + 2C}{k}} - 1 \right). \quad (3.10)$$

Na obr. 3.1 je uveden příklad relaxace pro $C=0$ a $C>0$.

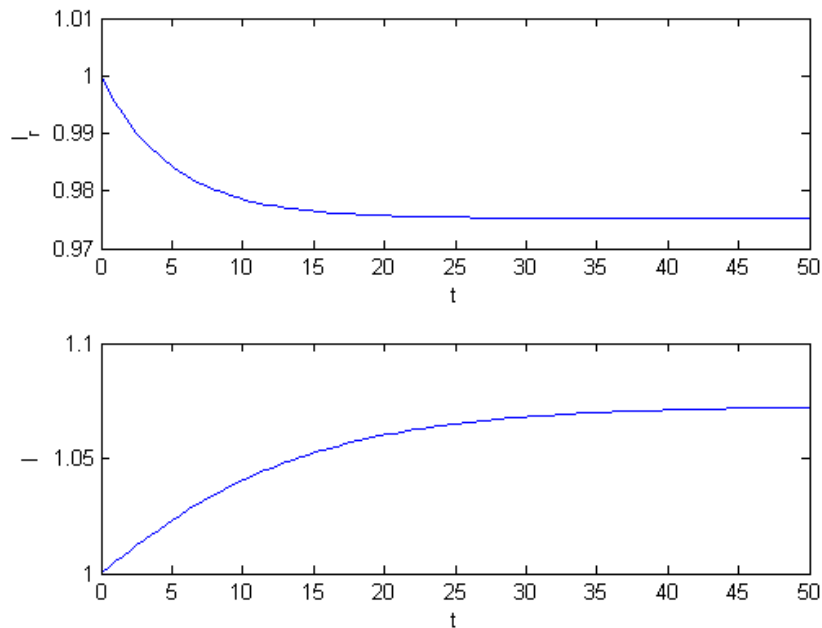
Creep:

Zde zvolíme $\tau = konst.$. Pro rychlost růstu získáme vztah

$$g \dot{l}_r = \left[\frac{l}{l_r} \tau - \frac{1}{2} k \left(\frac{l}{l_r} - 1 \right)^2 - C \right] l_r, \quad (3.11)$$

který řešíme spolu se vztahem

$$\tau = k \left(\frac{l}{l_r} - 1 \right) + h \left(\frac{l}{l_r} \right)^{\bullet}. \quad (3.12)$$



Obr. 3.2 Průběh délky pro $C=C_c$

Rovnici (3.12) lze jednoduše integrovat v mezích $\frac{l}{l_r} \in \left(1, \frac{l}{l_r}\right)$:

$$\frac{l}{l_r} = \frac{1}{k} \left(\tau + k - \tau e^{-\frac{k}{h}t} \right). \quad (3.13)$$

Po dosazení do (3.11) obdržíme rovnici kterou lze jednoduše analyticky integrovat. Získáme vztah pro relaxovanou délku l_r

$$l_r = l_0 \exp \frac{1}{g} \left[\left(\frac{\tau^2}{2k} + \tau - C \right) t + \frac{\tau^2}{4k^2} h \left(e^{-\frac{2k}{h}t} - 1 \right) \right]. \quad (3.14)$$

Z (3.13) pak lze vypočítat délku l v závislosti na čase

$$l = \frac{l_r}{k} \left(\tau + k - \tau e^{-\frac{k}{h}t} \right). \quad (3.15)$$

Je patrné, že zde h ovlivňuje rychlost creepu v jeho začátku, zatímco g jej ovlivňuje v celém průběhu. Pokud totiž neuvažujeme členy s exponenciálami $e^{-\frac{k}{h}t}$ a $e^{-\frac{2k}{h}t}$, platí

$$l = \frac{l_0}{k} (\tau + k) e^{\frac{1}{g} \left[\left(\frac{\tau^2}{2k} + \tau - C \right) t - \frac{\tau^2 h}{4k^2} \right]}. \quad (3.16)$$

V obecném případě creepová deformace roste nade všechny meze. Pouze pro

$C = C_c = \frac{\tau^2}{2k} + \tau$ bude deformace konvergovat k hodnotě $l = \frac{l_0}{k} (\tau + k) e^{-\frac{1}{g} \frac{\tau^2 h}{4k^2}}$. Dosazením C_c do (3.10) je tato rovnice splněna identicky.

4. Model svalového vlákna

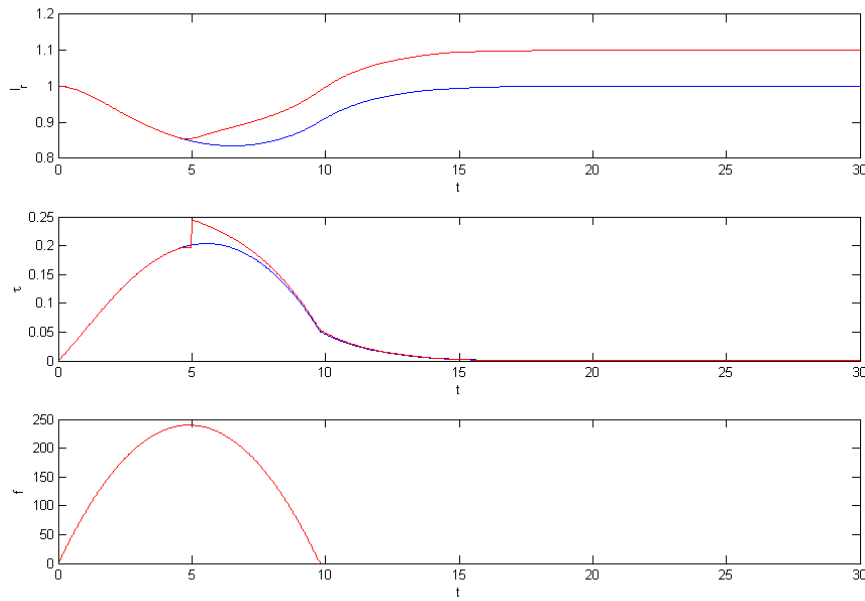
Klasický Hillův model svalového vlákna je založen na myšlence propojení pružných a viskozních elementů aktivním elementem jenž odpovídá jevům, ke kterým dochází mezi aktinem a myosinem ve svalových buňkách. Tyto jevy jsou řízeny vnějšími vlivy ať už to je deformace okolní tkáně, vnější elektrický signál či nervový signál. Tomuto modelu přirozeně odpovídá v předchozím uvedený 1D model pasivního růstu, jenž popisuje viskoelastické chování, doplněný o aktivní kontrolu pomocí veličiny C - tzv. vnějšího nemodelačního účinku. V [7] zavádí Maršík pro sval veličinu $\hat{W}_{chem}$ jež se zdá odpovídat právě veličině C . V následujícím je uveden příklad volby C a příslušná odezva při izometrické stimulaci svalu. Předpokládat přitom budeme opět kvadratický vztah pro defomační energii (3.5) a lineární vztah pro disipační složku napětí (3.3). Vnější nemodelační síla pak bude obecně funkcí času, růstového gradientu P a event. rychlosti $V = \dot{P} P^{-1}$.

Pro **izometrickou kontrakci** ($l = konst.$) platí vztah (3.7)

$$\dot{l}_r = l_r \frac{\frac{k}{2} l^2 + \left(C(t) - \frac{k}{2} \right) l_r^2}{g l_r^2 + h l^2} \quad (4.1)$$

a vztah pro napětí

$$\tau = k \left(\frac{l}{l_r} - 1 \right) - k \frac{l \dot{l}_r}{l_r^2} . \quad (4.2)$$



Obr. 4.1 Průběh relaxované délky, napětí a stimulační funkce při izometrické kontrakci (modře) a skokové změně délky (červeně), $C = C_0 f + C_l$

Pro **izotonickou kontrakci** ($\tau = konst.$) platí soustava rovnic

$$\dot{l}_r = \frac{l_r}{g} \left[\frac{1}{2k} (\tau + k)^2 - \left(C(t) + \frac{k}{2} \right) - \frac{\tau^2}{2k} e^{-\frac{2k}{h} t} \right] , \quad (4.4)$$

$$l = \frac{l_r}{k} \left(\tau + k - \tau e^{-\frac{k}{h} t} \right) . \quad (4.5)$$

5. Závěr

V příspěvku bylo ukázáno, že lze využít matematický model růstu a remodelace jak pro popis viskoelastického chování kontinua tak i pro simulaci svalové kontrakce. Významná je role

vnějšího remodelačního účinku C . Jeho konstantní nenulová hodnota způsobuje zbytkové napětí po relaxaci i konečnou deformaci creepu. Tyto jevy evidentně souvisí s disipací energie na mikroúrovni analogicky jako svalová kontrakce je způsobována uvolňováním chemické energie. Uvedený algoritmus obsahuje samozřejmě řadu materiálových parametrů i volitelných funkcí (deformační energie, remodelační síla), které je třeba volit tak, aby výsledek odpovídal experimentálním datům. Přesto lze jej považovat za model více fyzikálně podložený než jiné, čistě fenomenologické modely. Příspěvek se nekládá za cíl nalézt reálné parametry, nýbrž se snažil ukázat možnosti a kvalitativní shodu se známými výsledky.

6. Poděkování

Práce vznikla za finanční podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci projektu MŠMT 4977751303.

Literatura

- DiCarlo, A. & Quiligotti, S. (2002) Growth and balance. *Mechanics Research Communications* 29, Pergamon Press, pp. 449-456.
- DiCarlo, A. & Nardinocchi, P. & Teresi, L. Creep as a passive growth (to appear).
- Epstein, M. (2002) The Eshelby tensor and the theory of continuous distributions of inhomogenities. *Mechanics Research Communications* 29, pp. 501-506.
- Imatani, S. & Maugin, G. A. (2002) A constitutive model for material growth and its application to three-dimensional finite element analysis. *Mechanics Research Communications* 29, pp. 477-483.
- Kroener, E. (1960) Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rational Mech. Anal.* 4, pp. 273-334.
- Maugin, G. A. & Epstein, M. (1998) Geometrical material structure of elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*. Vol. 14. Nos. 1-3. pp. 109-115.
- Maršík, F. & Dvořák, I. (1998) Biothermodynamika. *Academia*, Praha.
- Noll, W. The materially uniform simple bodies with inhomogenities. *Arch. Rational Mech. Anal.* 27, pp. 1-32
- Rodriguez, E. K. & Hoger, A. & McCulloch, A. D. (1994) Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *J. Biomechanics* 27, pp. 455-457.
- Taber, L.A. (1995) Biomechanics of growth, remodeling and morphogenesis. *ASME Reprint* No \AMR 171 38. *Appl. Mech. Rev.* Vol. 48, No. 8.