

ALONG WIND RANDOM VIBRATIONS OF A SLENDER STRUCTURE - MODELLING BY CONCENTRATED MASSES

J. Náprstek, S. Pospíšil*

Summary: *The paper presents an analytical-numerical solution to the along wind random response of slender structures to fluctuating stationary wind velocity component. The structure has been modelled using a linear system discretized by concentrated masses or by FEM, respectively. The system has been considered as self-adjoint and with strongly non-proportional viscose damping. As the random excitation of this linear system is gaussian and of additive type, also the response is gaussian and consequently mathematical mean value and correlation matrix are satisfactory for the full description of the generalized solution in the stochastic meaning. The solution itself has been obtained using the method of integral spectral decomposition. It has been shown that the general results can be obtained in the form of analytical formulae for many important cases of input spectral densities and consequently they can be incorporated into some existing FEM software systems.*

1. Úvod

Rychlost větru je veličina proměnná v prostoru i v času. Podle zkušeností a výsledků měření ji lze v daném bodě v dostatečně dlouhém časovém úseku považovat za stacionární. Dá se formulovat jako součet konstantní statické složky a náhodně proměnné složky dynamické. Popisu obou těchto složek bylo věnováno v minulých desetiletích veliké množství prací. Přehled těchto poznatků je publikován v řadě monografií (Koloušek et al. 1983, Simiu & Scanlan 1996), norem a dalších pramenů. Také dílčím problémům dynamiky konstrukcí buzených flukтуаční složkou větru byla v téže době věnována značná pozornost, a to jak na experimentální, tak na teoretické úrovni, viz např. Davenport (1967, 1967a), Dyrbye & Hansen (1996), Fischer & Pirner (1986). Zdá se však, že stále chybí určitý systematický pohled na tento problém jako celek, který by se pokusil oprostit od fenomenologického přístupu vycházejícího z okamžité potřeby vyřešit problém konkrétní konstrukce a zasadil tuto důležitou úlohu do celkového kontextu stochastické dynamiky.

Mnohé nedostatky v minulosti vycházely z některých mlčky přijatých předpokladů, které často nebyvají splněny. To se týká např. všeobecně přijímané hypotézy o proporcionálním útlumu, která je zcela mimo realitu, jakmile se konstrukce vybaví tlumičem kmitání jakéhokoli typu. Dalším předpokladem, který je obtížné akceptovat, je nezávislost jednotlivých vlastních tvarů kmitání. Při stochastickém typu buzení je tento předpoklad splněn jen zřídka pro velmi speciální konfigurace buzení. Na druhé straně je přijat předpoklad o lineárním přenosu mezi flukтуаční složkou rychlosti větru a dynamickou složkou tlaku, který působí ve směru větru. V podmínkách vysoké zástavby není ani tento předpoklad splněn a je třeba respektovat nelineární strukturu tohoto vztahu. Tomuto efektu jsou věnovány speciální studie, viz např. Náprstek (1975), Grigoriu (1988), dále Benfratello et al. (1996) a další. Nicméně i zde dosud chybí práce, která tento jev formuluje z hlediska analytické mechaniky.

*Ing. Jiří Náprstek, DrSc., Ing. Stanislav Pospíšil, PhD.

Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR; Prosecká 76, 190 00 Praha 9
 naprstek@itam.cas.cz

Dodejme ještě, že řešení je možné založit na různých typech matematického modelu konstrukce. Dá se říci, že v úvahu přicházejí dvě skupiny modelů, i když existuje řada jejich dalších variant. První z nich je model založený na diskretizaci konstrukce na soustavu diskrétních hmot spojených pružnými a disipativními členy, případně založený na diskretizaci metodou konečných prvků. Matematicky je tedy popsán soustavou obyčejných diferenciálních rovnic v čase. Druhým typem jsou modely, které vycházejí ze spojitě povahy hlavních prvků konstrukce a jsou tudíž popsány parciálními diferenciálními rovnicemi, viz Náprstek & Pospíšil (2006). Každý z těchto dvou modelů má jisté přednosti z hlediska možností fyzikální interpretace výsledků. Jejich přímé porovnávání tedy nemá smysl. Finální numerické výsledky však poskytují oba stejné. V této studii budeme pracovat s modelem diskrétních hmot.

2. Formulace problému

Pokud není stupeň turbulence příliš vysoký, jak odpovídá poměrům, ve kterých jsou většinou umístěny kotvené stožáry, telekomunikační věže a další štíhlé konstrukce s kruhovým průřezem, vystačí se pro analýzu kmitání konstrukce ve směru větru obvykle s lineárním modelem.

Na úrovni lineárního modelu se pohyb soustavy tuhých těles s pružnými vnitřními a vnějšími vazbami, neproporcionálním viskozním útlumem a vnějším aditivním buzením dá popsat soustavou rovnic:

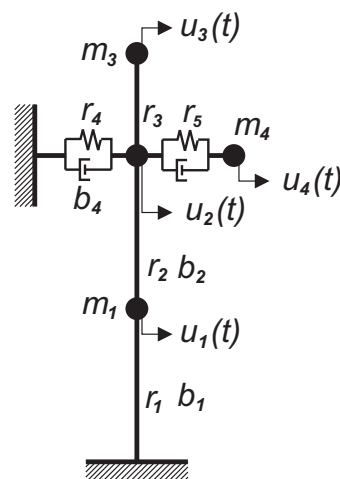
$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{R} \mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(t)|_{t=0} = \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(t)|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0$$

$\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{R}$ - konstantní čtvercové souměrné matice reálných čísel ($n \times n$; n - počet stupňů volnosti vnitřních uzlů); setrvačné vlastnosti; útlumové vlastnosti; tuhosti.

$\mathbf{p}(t)$ - sloupcový vektor (n prvků); vnější zatížení, funkce času.

$\mathbf{u}(t)$ - sloupcový vektor (n prvků); odezva soustavy - v každém uzlu se předpokládá pouze jeden stupeň volnosti umožňující pohyb pouze ve směru odpovídající složky zatížení, všechny složky vektorů $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{p}(t)$ jsou rovnoběžné.



Obrázek 1: Matematický model soustavy soustavy

Vnější zatížení je dáno působením větru. Předpokládáme, že vyvolává odezvu pouze ve směru větru a na úrovni lineárního modelu nikterak nespolutpůsobí s bočními účinky. Zatížení má statickou a dynamickou složku. Jako síla působící v jednom bodu se dá psát ve tvaru:

$$p(t) = \kappa (v_s + v_d(t))^2 \approx \kappa (v_s^2 + 2v_s \cdot v_d(t)) \Rightarrow p_d(t) \approx 2\kappa v_s \cdot v_d(t) \quad (2)$$

$v_s, v_d(t)$ - statická a dynamická složka rychlosti větru; při malých fluktuacích rychlosti je možné kvadratický člen v (2) přibližně zanedbat a dynamickou složku tlaku $p_d(t)$ pokládat za úměrnou dynamické složce rychlosti $v_d(t)$.

κ - konstanta úměrnosti; vyjadřuje vliv tvaru a velikosti průřezu, kvality povrchu, hustoty vzduchu, atd.; je funkcí polohy x_j na konstrukci.

Dynamická složka rychlosti větru $v_d(t)$ je náhodný proces, a proto bývá většinou nazývána flukтуаční složkou. Na základě mnoha měření a následných analýz je všeobecně přijato, že tento

proces je za běžných podmínek centrovaný a gaussovský. Většinou se pokládá za stacionární, i když tento předpoklad mnohdy není zcela oprávněný. Pokud se nezabýváme speciálními případy katastrofických nárazů, nezdá se, že by případné nestacionarity byly samy o sobě zdrojem potíží, a zřejmě proto ani prozatím neexistují pro jejich popis žádné obecnější hodnověrné podklady. Samotný proces $v_d(t)$ se dá zavést jakožto nezávislý na poloze x_j . Vliv polohy se pak plně vloží do konstantní diagonální matice $\mathbf{h}$ ($n \times n$) nezávislé na čase. Proces $v_d(t)$ působí ve všech bodech x_j , ($j = 1, n$). Jeho okamžité hodnoty jsou však v každém z těchto bodů jiné, a proto z hlediska formulace zatížení je třeba těchto n procesů pokládat za různé procesy, i když mohou mít tytéž stochastické parametry a jistou obecně nenulovou vzájemnou korelaci. S odvoláním na (2) můžeme tedy pro dynamickou část vektoru zatížení $\mathbf{p}(t)$ přibližně psát:

$$\mathbf{p}_d(t) = 2 \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_d(t); \quad \mathbf{h} = \text{diag}[(\kappa v_s)_{x1}, \dots, (\kappa v_s)_{xn}] \quad (3)$$

Soustavu (1) přepíšeme v normálním tvaru:

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}(t) + 2 \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_d(t) \quad (4)$$

kde jsme označili:

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & ; & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{R} & ; & \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (5)$$

přičemž vektory $\mathbf{u}_1(t)$, $\mathbf{u}_2(t)$ mají tento význam:

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}(t); \quad \mathbf{u}_2(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (6)$$

Vzhledem k tomu, že soustava (1) je lineární, náhodné buzení je gaussovské a působí pouze aditivně, můžeme jeho účinky řešit nezávisle na účincích statického zatížení a případného deterministického dynamického zatížení, pokud má také aditivní charakter. Odezva lineární soustavy na náhodné centrované gaussovské buzení je opět centrovaná a gaussovská. Vzhledem k nulovému matematickému středu je tedy plný popis náhodné odezvy soustavy (1) určen maticí druhých stochastických momentů, resp. korelační maticí. Z hlediska inženýrských potřeb je nutné doplnit disperze výchylek, popř. průřezových veličin v jednotlivých uzlech konstrukce. Na základě těchto údajů lze potom jednoznačně určit všechny veličiny charakterizující spolehlivost a použitelnost konstrukce.

3. Řešení metodou spektrálních rozkladů

Vstupní i výstupní procesy jsou v našem případě spojité. Dá se dokázat, že je možné je psát ve tvaru, který je založen na spektrálním diferenciálu vstupního procesu (resp. procesů):

$$\mathbf{v}_d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\Phi(\omega); \quad \mathbf{U}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^*(\omega, t) d\Phi(\omega) \quad (7)$$

$d\Phi(\omega)$ - vektor spektrálních diferenciálů procesů $\mathbf{v}_d(t)$; $d\Phi_j(\omega)$ jsou procesy v proměnné ω typu bílého šumu; jejich korelace se řídí Wiener-Chinčinovým vztahem, viz např. Bolotin (1979) a mnozí další:

$$\mathbf{E}\{d\Phi(\omega) \cdot \overline{d\Phi^T(\omega^*)}\} = \delta(\omega^* - \omega) \mathbf{S}_v(\omega) d\omega d\omega^* \quad (8)$$

$\mathbf{E}\{\cdot\}$ - operátor matematického středu podle gaussovského hustoty pravděpodobnosti;

δ - Diracova funkce;

$\mathbf{S}_v(\omega)$ - matice ($n \times n$) spektrálních hustot procesů $\mathbf{v}_d(t)$; hlavní diagonála obsahuje výkonové spektrální hustoty v jednotlivých bodech x_j ; prvky matice mají tvar: $S_{ij}(\omega) \cdot K_{ij}(\omega)$, kde $K_{ij}(\omega)$ ($i \neq j$) vyjadřuje klesající vzájemnou korelaci s rostoucí frekvencí a vzdáleností od hlavní diagonály; pokud počítáme, že všechny procesy $\mathbf{v}_d(t)$ jsou téhož typu, potom všechna $S_{ij}(\omega) = S_v(\omega)$ jsou stejná; tato struktura matice spektrálních hustot je inspirována experimentálními výsledky a není výsledkem exaktní analýzy.

$\mathbf{U}^*(\omega, t)$ - matice ($2n \times n$ prvků) neznámých deterministických funkcí, které popisují transformaci náhodného buzení do složek náhodné odezvy v čase.

Výrazy (7) dosadíme do soustavy (4), vzniklou relaci vynásobíme vektorem $\overline{d\Phi^T(\omega)}$ zprava a potom uplatníme operátor matematického středu. Vstupní procesy $\mathbf{v}_d(t)$ jsou spojité a spektrální diferenciály $d\Phi(\omega)$ libovolné, nezávislé a nenulové skoro všude. Můžeme tedy zaměnit pořadí aplikace operátoru integrace a matematického středu. Odtud plyne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\mathbf{U}}^*(\omega, t) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^*(\omega, t)) \cdot \mathbf{S}_v(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_v(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (9)$$

Relace (8) musí být splněna pro každé t . To je možné s ohledem na to, že matice $\mathbf{S}_v(\omega)$ je pozitivně definitní pouze tehdy, když platí:

$$\dot{\mathbf{U}}^*(\omega t) = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}^*(\omega t) + 2\mathbf{H} \cdot \exp(i\omega t) \quad (10)$$

s počátečními podmínkami:

$$\mathbf{U}^*(\omega, t)|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

Formulace odezvy ve tvaru (7) má jednoduchou fyzikální interpretaci. Náhodné buzení v (4) lze chápat jako superpozici odezvy částečných harmonických buzení daných vždy funkcí $\exp(i\omega t)$ násobenou koeficientem $d\Phi_j(\omega)$, který je náhodný. Náhodná část řešení je tedy součtem, resp. integrálem všech řešení platných pro jednotlivá ω v (7). Vyřešíme-li tedy soustavu (10) pro jednotkovou $d\Phi_j(\omega)$, získáme matici $\mathbf{U}^*(t)$, kde j -tý sloupec znamená j -tý jednotkový stav. Řešení účinku náhodné části buzení je tedy založeno na znalosti jisté zobecněné frekvenční charakteristiky. V praktickém případě se dá předpokládat, že soustava (1), resp. (4) jakožto mechanický systém bude vždy stabilní, a proto po odeznění počáteční přechodové fáze dostane $\mathbf{U}^*(\omega, t)$ význam běžné přenosové matice.

Řešení rovnice (10) naznačíme ve tvaru Laplaceova obrazu. Podle předpokladu je matice $(\mathbf{Q} + \mathbf{I} \cdot \xi)$ regulární a existuje tedy její inverzní matice. Pokud matice $\mathbf{Q}$ má pouze jednoduchá vlastní čísla, výraz lze dále upravit ve tvaru sumace:

$$\mathbf{U}_L^*(\omega, \xi) = (\mathbf{Q} + \mathbf{I} \cdot \xi)^{-1} \frac{2\mathbf{H}}{\xi - i\omega} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\mathbf{Z}_k \mathbf{H}}{i\omega - \xi_k} \left(\frac{1}{\xi - i\omega} - \frac{1}{\xi - \xi_k} \right) \quad (12)$$

$\mathbf{Z}_k$ - k -tá komponentní matice ($2n \times 2n$), viz např. Lancaster (1969); pokud matice $\mathbf{Q}$ má $2n$ jednoduchých vlastních čísel, matice $\mathbf{Z}_k$ se dá vyjádřit ve tvaru diadického součinu:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{u}_k \cdot \overline{\mathbf{u}_k^T} \quad (13)$$

$\mathbf{u}_k$ - k -tý normalizovaný vlastní vektor matice $\mathbf{Q}$;

ξ_k - k -té vlastní číslo matice $\mathbf{Q}$; podle předpokladu jsou všechna vlastní čísla jednoduchá; ze symetrie matic $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{R}$ vyplývá, že vlastní čísla tvoří n komplexně sdružených dvojic $\xi_{2k} = \overline{\xi_{2k+1}}$; dá se dokázat, že z pozitivní definitnosti těchto matic zároveň plyne negativní hodnota reálné části všech vlastních čísel, a tudíž dynamická stabilita soustavy (1).

Zpětnou transformací výrazu (12) dostaneme řešení rovnice (10):

$$\mathbf{U}^*(\omega, t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\mathbf{Z}_k \mathbf{H}}{i\omega - \xi_k} (\exp(i\omega t) - \exp(\xi_k t)) \quad (14)$$

Korelační matice odezvy, tj. čtvercová matice $\mathbf{K}_u(t_1, t_2)$ o rozměrech $(2n \times 2n)$ se dá získat přímo z definice použitím $\mathbf{U}(\omega, t)$, viz např. Bolotin (1979). Ze stejných důvodů jako prve můžeme zaměnit pořadí aplikace operátoru integrace a operátoru matematického středu. Přihlédneme-li k tomu, že $\mathbf{u}(t)$ jsou centrované procesy, můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_U(t_1, t_2) &= \mathbf{E}\{\mathbf{U}(t_1) \overline{\mathbf{U}^T(t_2)}\} = \mathbf{E}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^*(\omega_1, t_1) d\Phi(\omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{d\Phi^T(\omega_2)} \mathbf{U}^{*T}(\omega_2, t_2) \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}^*(\omega, t_1) \mathbf{S}_v(\omega) \overline{\mathbf{U}^{*T}(\omega, t_2)} d\omega \end{aligned} \quad (15)$$

Spolu s nulovým matematickým středem se výraz (15) dá považovat za zobecněné řešení rovnice (1), resp. (4) ve stochastickém smyslu. Ze struktury výrazu (14) je zřejmé, že první sčítanec popisuje stacionární část odezvy, zatímco druhý sčítanec vliv přechodového děje, který nastane po zahájení buzení vlivem homogenních počátečních podmínek. Vzhledem k negativní reálné části vlastních čísel druhý sčítanec s rostoucím časem postupně zanikne. To znamená, že pokud se zabýváme pouze stacionárním stavem, můžeme druhý sčítanec ve vzorci (14) pominout. To nám umožní detailní zápis výrazu (15), který je v tomto případě funkcí pouze rozdílu $t_1 - t_2$ a nikoli obou časových souřadnic samostatně:

$$\mathbf{K}_U(t) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2n} \exp(i\omega t) \frac{\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_v(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T}}{(i\omega - \xi_k)(-i\omega - \xi_l)} d\omega \quad (16)$$

z čehož okamžitě vyplývá matice disperzí:

$$\mathbf{K}_U(0) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{2n} \frac{\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_v(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T}}{(i\omega - \xi_k)(-i\omega - \xi_l)} d\omega \quad (17)$$

která se obvykle pokládá (zejména její diagonála, resp. odmocniny jejích prvků) za směrodatný údaj o rozsahu odezvy na náhodné buzení lineární soustavy gaussovskými procesy.

Vzorce (15)-(17) mají poměrně širokou použitelnost. Matici $\mathbf{U}^*(\omega, t)$ lze získat nejen analyticky, viz (14), ale i numericky nebo experimentálně. To do jisté míry předurčuje metodu provedení naznačené integrace podle ω . Je možné ji dovést do konce ve formě vzorců v uzavřeném tvaru pro řadu jednodušších případů spektrálních hustot buzení. To je např. tehdy, když spektrální hustoty $\mathbf{S}_v(\omega)$ je možné vyjádřit ve tvaru ryze lomené racionální funkce a integraci provést pomocí reziduové věty. Při vyčíslení integrálu lze tedy různým způsobem kombinovat analytické a numerické postupy v závislosti na struktuře zadání. Doplňme ještě, že integrál v (15)-(17) je možné chápat v Stieltjesově smyslu, čímž lze obsloužit i různé kombinace spojitých spekter a výrazných diskretních harmonických složek s pevně určenou frekvencí a amplitudou.

Povšimněme si jednoho detailu. Pokud by procesy $\mathbf{v}_d(t)$ měly charakter nezávislých bílých šumů bez vzájemné korelace, bude matice $\mathbf{S}_v(\omega)$ konstantní a diagonální. V takovém případě s přihlédnutím k (13) můžeme psát ($\mathbf{H}_s = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_v^{1/2}$):

$$\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_v(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T} = \mathbf{u}_k \cdot \overline{\mathbf{u}_k^T} \mathbf{H} \mathbf{S}_v \mathbf{H}^T \mathbf{u}_l \cdot \overline{\mathbf{u}_l^T} = \mathbf{H}_s^T \overline{\mathbf{u}_k} \mathbf{u}_k^T \cdot \overline{\mathbf{u}_l} \mathbf{u}_l^T \mathbf{H}_s \quad (18)$$

Vzhledem k tomu, že vlastní vektory jsou ortonormální, dostaneme po úpravě:

$$\mathbf{Z}_k \mathbf{H} \mathbf{S}_v(\omega) \overline{\mathbf{H}^T \mathbf{Z}_l^T} = \begin{cases} 0 ; & k \neq l \\ \mathbf{H}_s^T \overline{\mathbf{Z}_k} \mathbf{H}_s ; & k = l \end{cases} \quad (19)$$

V takovém případě by dvojitá sumace v (17) degenerovala na jednoduchou. Tento stav odpovídá nekorelovaným pravým stranám v původní soustavě (1), resp. (4). V obecném případě však matice $\mathbf{S}_v(\omega)$ není diagonální a vzájemná korelace vlastních vektorů není zanedbatelná. Je však zjevné, že rychle klesá s rozdílem $(k - l)$.

4. Analýza odezvy pro Davenportovu spektrální hustotu

Rozsáhlá a dlouhodobá měření in situ, experimenty v laboratořích a různé teoretické úvahy vedly k všeobecně přijaté struktuře popisu flukтуаční složky rychlosti větru. Proces $v_d(t)$ se zavádí jako nezávislý na prostorových souřadnicích. Do všech bodů x_j se vkládá proces se stejnými charakteristikami popsany jedním vzorcem pro skalární spektrální hustotu. Pro spektrální hustotu flukтуаční složky větru je publikováno mnoho empirických vzorců. Nejlépe se osvědčila a do praxe pronikla Davenportova spektrální hustota, viz Davenport (1967a) a mnoho dalších prací, monografií, standardů a dalších publikací:

$$S_v(\omega) = \frac{\alpha_0 |\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \quad (20)$$

Prostorová povaha tohoto procesu se obvykle charakterizuje prostřednictvím korelační funkce (Davenport, 1967 a další autoři):

$$K(x_k, x_l, \omega) = \beta_{kl} \exp(-\lambda |\omega| |x_k - x_l|) \quad (21)$$

Ve vzorcích (20), (21) jsou zavedeny rozměrové konstanty α_0 , a , λ . Jsou stanoveny experimentálně a upravují se zvláště pro každou lokalitu. Představu o jejich povaze si lze učinit na základě literatury, např. Koloušek et al. (1983), Dyrbye & Hansen (1996) a další. Zabývají se jimi i některé normy. Zhruba se dají charakterizovat takto:

α_0 - shrnuje koeficienty, které upravují vzorec s ohledem na náhodnou dynamickou povahu procesu a jeho ne zcela stacionární charakter;

β_{kl} - koeficient vyjadřující vzájemnost faktoru $(2\kappa v_s)$ podle (2); je možné používat:

$$\beta_{kl} = \beta_0 \cdot 4\kappa(x_k)\kappa(x_l)v_s(x_k)v_s(x_l) \quad (22)$$

kde β_0 je rozměrový koeficient, který vyrovná β_{kl} do bezrozměrného tvaru;

a^2 - rozměrově frekvence; upravuje tvar spektrální hustoty a vyvažuje podíl nižšího a vyššího frekvenčního pásma;

λ - upravuje míru prostorové korelace.

Proces $v_d(t)$ je tedy charakterizován jako prostorově homogenní. Vzájemná korelace klesá pro danou vzdálenost bodů exponenciálně s rostoucí frekvencí. To znamená, že matice $\mathbf{S}_v(\omega)$ má v daném případě tvar:

$$\mathbf{S}_v(\omega) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & ; & \beta_{12}e^{-\lambda|\omega||x_1-x_2|} & ; & \dots & ; & \beta_{1n}e^{-\lambda|\omega||x_1-x_n|} \\ \beta_{21}e^{-\lambda|\omega||x_2-x_1|} & ; & \beta_{22} & ; & \dots & ; & \beta_{2n}e^{-\lambda|\omega||x_2-x_n|} \\ \vdots & ; & \vdots & ; & \ddots & ; & \vdots \\ \beta_{n1}e^{-\lambda|\omega||x_n-x_1|} & ; & \beta_{n2}e^{-\lambda|\omega||x_n-x_2|} & ; & \dots & ; & \beta_{nn} \end{bmatrix} \frac{\alpha_0 |\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \quad (23)$$

Vyhodnotit pro konkrétní případ výraz (17), to jest jednotlivé prvky (kl) matice $\mathbf{K}_U(0)$, znamená vyčíslit integrály:

$$I_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_{kl}}{(\omega + i\xi_k)(\omega - i\xi_l)} \frac{\alpha_0|\omega| \exp(-\lambda|\omega||\Delta x_{kl}|)}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} d\omega; \quad \Delta x_{kl} = x_k - x_l \quad (24)$$

Jeden z činitelů ve jmenovateli integrandu (20) má racionální exponent, což je jistá komplikace pro další výpočet. Celočíselný exponent u zbývajících dvojčlenů ve jmenovateli by umožnil integraci v uzavřeném tvaru pomocí reziduové věty. Přibližně však můžeme takto postupovat i v tomto případě. Čitatel je v Gaussově rovině rotačně symetrický podle počátku, je bez nulových a nevlastních bodů a exponenciálně se blíží k nule pro $|\omega| \rightarrow \infty$. Vzhledem k tvaru jmenovatele se integrand pro rostoucí $|\omega|$ blíží dostatečně rychle k nule. Z toho vyplývá, že integrál (24) je roven $2\pi i$ násobku součtu reziduí nad reálnou osou, anebo pod osou, jak vyplývá z vlastností integrandu.

Integrand (24) má nad reálnou osou ω dva singulární body:

$$\omega_1 = i\bar{\xi}_l; \quad \omega_3 = ia \quad (25)$$

Chování výrazu (20) v okolí singulárního bodu $\omega = ia$ je možné vystihnout přibližným vztahem:

$$S_v(\omega) = \frac{\alpha_0|\omega|}{(a^2 + \omega^2)^{4/3}} \approx \frac{\alpha_1|\omega|}{(a^2 + \omega^2)} \quad (26)$$

kde α_1 je konstanta volená tak, aby racionální funkce co nejlépe vystihovala průběh původní funkce (20) v okolí singulárního bodu. Stanoví se např. z rovnosti integrálů na intervalu $\omega \in (-\infty, \infty)$ pro původní a náhradní integrand. Jinou možností je použití Laurentovy řady, výsledky jsou však méně stabilní.

Z předchozích úvah vyplývá následující výsledek:

$$I_{kl} = \frac{2\pi\beta_{kl}}{\bar{\xi}_l + \xi_k} \cdot \frac{\alpha_0|\bar{\xi}_l| \exp(-\lambda|\bar{\xi}_l||\Delta x_{kl}|)}{(a^2 - \bar{\xi}_l^2)^{4/3}} - \frac{\pi\beta_{kl}\alpha_1 \exp(-\lambda a|\Delta x_{kl}|)}{(a + \xi_k)(a - \bar{\xi}_l)} \quad (27)$$

Vzorec (27) potvrzuje vzájemné spolupůsobení vlastních vektorů při náhodném buzení. Ze struktury (27) je na druhou stranu patrné, že hodnoty I_{kl} klesají velmi rychle s rozdílem $|x_k - x_l|$. V souvislosti se (17) je zřetelné, že význam spolupůsobení je závislý na míře neproporcionálnosti útlumu a tedy na struktuře komponentních matic $\mathbf{Z}_k$ a dále na velikosti prostorové korelace buzení dané především koeficientem λ .

5. Závěr

Matematický model štíhlé vertikální konstrukce založený na myšlence soustavy soustředěných hmot, popřípadě hmotných těles, jak vyplývá z FEM, poskytuje nástroj dostatečně výstižný pro analýzu náhodného kmitání těchto soustav v reálném měřítku. Tento model umožnil opustit řadu problematických předpokladů o chování konstrukce a jejího zatížení přijatých v minulosti. To se týká vlivu neproporcionálního tlumení konstrukce vybavené tlumičem, stochastické interakce vlastních tvarů (vektorů) kmitání zanikající exponenciálně s rostoucím rozdílem indexů, prostorové korelace buzení i odezvy, atd. Na druhé straně se potvrdila v zobecněném měřítku řada heuristicky zavedených hypotéz v minulosti, jako např. gaussovská povaha odezvy, přijatelnost proporcionálního modelu na konstrukci bez tlumiče i v případě, že je sestavena z materiálů s různou mírou vnitřního útlumu. Vliv počátečních podmínek je krátkodobý a zaniká exponenciálně s rostoucím časem od zahájení buzení (stacionárního). Možnost prezentovat výsledky ve formě vzorců v uzavřeném tvaru pouze s nutností výpočtu vlastních čísel a vektorů

matice soustavy nabízí velice rychlý způsob vyhodnocení těchto efektů v praxi. Efektivnost předložené metody je oproti např. simulacím několikanásobná. Důležitá je také skutečnost, že získané výsledky umožňují lepší přehled o vnitřní struktuře výsledků a dávají tak dobrý návod pro případné konstrukční úpravy v případě, že odezva nevyhovuje požadovaným kritériím. Z kvantitativního rozboru vyplývá, že s předpokladem o lineárním vztahu mezi dynamickou složkou rychlosti větru a odvozeným tlakem proměnným v čase je třeba zacházet opatrně. Je přijatelný v podmínkách volného terénu a nízké zástavby. V oblasti velkoměstského centra je velice sporný vzhledem k vysokému stupni turbulence, kdy amplitudy dynamické složky mohou být srovnatelné se složkou statickou.

6. Poděkování

Autor děkuje Grantové agentuře AVČR - A2071401, Grantové agentuře ČR - 103/06/0099 a výzkumnému záměru ÚTAM AV0 Z20710524, za jejichž podpory vznikla tato práce. Text byl pořízen procesorem L^AT_EX.

7. Literatura

- Benfratello, S., Falsone, G., Muscolino, G. (1996) Influence of the quadratic term in the along wind stochastic response of SDOF structures. *Engineering Structures*, 18, pp.685-695.
- Bolotin, V.V. (1979) *Random vibrations of elastic systems* (in Russian). Nauka, Moscow.
- Davenport, A.G. (1967) The dependence of wind Loads on Meteorological parameters, In: *Proc. International Research Seminar, Wind Effects on Buildings and Structures*, Toronto Press, Toronto, Canada, pp. 19-83.
- Davenport, A.G. (1967a) Gust loading factor. In: *Jour. Struct. Div. ASCE*, 93, pp.11-34.
- Dyrbye, C., Hansen, S.O. (1996) *Wind loads on structures*. Wiley and Sons, Chichester.
- Fischer, O., Pirner, M. (1987) *Dynamika kotvenych stozaru*. Academia, Praha.
- Grigoriu, M., Ariaratnam, S.T. (1988) Response of linear systems to polynomials of Gaussian processes. *Jour. Applied Mechanics ASME*, 55, pp.905-910.
- Koloušek, V., Pirner, M., Fischer, O., Náprstek, J. (1983) *Wind Effects on Civil Engineering Structures*. Academia - Elsevier, Praha.
- Lancaster, P. (1969) *Theory of Matrices*. Academic Press, New York - London.
- Náprstek, J. (1975) On non-linear transfer between random variable velocity of fluid motion and frontal pressure on the bypassed cylindrical body. *Acta Technica ČSAV*, 4, pp.479-494.
- Náprstek, J., Pospíšil, S. (2006) Along wind random vibrations of a slender structure - modelling by continuous elements. In: *Proc. Engineering Mechanics 2006* (J. Náprstek, C.Fischer eds). ITAM ASCR, Prague, 10 pgs, CD ROM.
- Simiu, E., Scanlan, R.H. (1996) *Wind Effects on Structures. Fundamentals and Applications to Design*. J. Wiley, New York.