

ORIENTATION OF STRESS TENSORS IN TRANSFORMED MATTERS

J. Malásek*

Summary: *Suitable processing of image informations of transformed matters can be the basis to determine a stress tensors field inclusive of boundary conditions of a deformed area. The image of deformation is the information of inhomogeneity of transformed matters which has no continuum characteristics..*

1. Úvod

Pro technologické i přírodní procesy se změnami tvarových uspořádání různých druhů hmot existuje mnoho fyzikálních, matematických i empirických vztahů mezi napjatostí a deformací. Jednotný společný popis těchto tvarových změn uspořádání hmot – přetváření – deformace může být jejich obrazový záznam v čase.

Nutno vzít v úvahu současné technické možnosti fotografování, filmu, rentgenové tomografie, magnetické rezonance, především též 3D-ultrazvukové sondy. Nutno vzít v úvahu též současné možnosti matematických zpracování a vyhodnocení obrazů, například metodu fázové korelace.

Změny tvarových uspořádání hmot představují velmi široký pojem, mohou zahrnovat tváření kovů, mísení a tok sypkých hmot, past, míchání a proudění kapalin, proudění, stlačování a rozpínání plynů. Tyto zpracovávané hmoty zpravidla nemohou být považovány za kontinua z hlediska složení i vnitřního uspořádání. Vhodnou informací o nekontinuitě zpracovávané hmoty může být obrazové zpracování proudnic a kluzných čar v průběhu procesu přetváření – deformace.

2. Pozitivní a negativní Mohrova kružnice

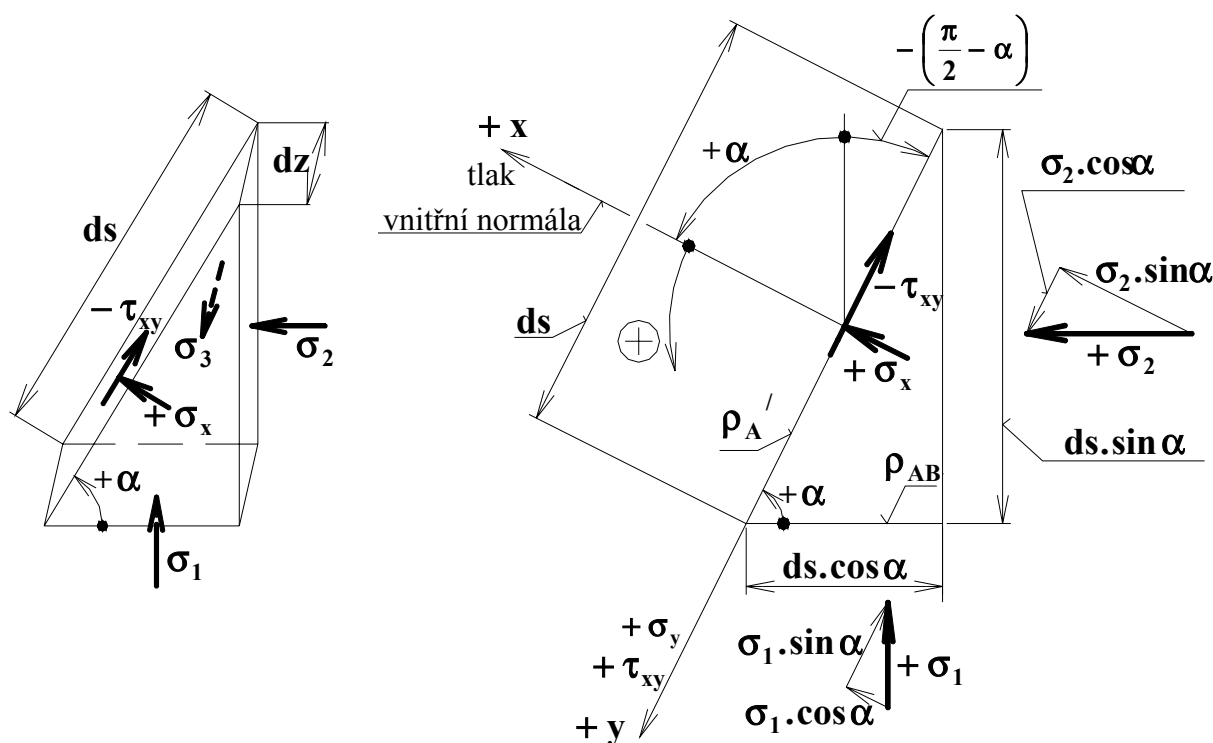
Nejprve bude vhodné odkázat se na citaci literatury [1] str. 395: „Both forms of Mohr's circle are mathematically correct, and either one can be used.“ Napětí, lépe napjatost, je ve fyzice a v mechanice kontinua popisováno jako tenzor. Při určitém zjednodušení, například působí-li napětí na určitou vybranou elementární plošku, má toto napětí silový účinek a možno je do jisté míry posuzovat jako vektor. Takový silový účinek napětí na elementární plošce má směr, neboť síla je vektor, tento směr při správném výběru napětí a elementární plošky je totožný se směrem přetváření – deformace hmoty – tedy se směrem přemísťování jednotlivých elementů **dm** hmoty po drahách – trajektoriích o elementy **ds** těchto drah.

* Ing. Jiří Malásek, Ph.D.: Ústav dopravní techniky, VUT v Brně, FSI,
 Technická 2896/2, 616 69 Brno; tel.: +420.541 142 428, fax: +420.541 142 425;
 e-mail: malasek@fme.vutbr.cz

Konvence pro popis napjatosti mohou být různě zvolené, musí však respektovat směr silových účinků napětí vzhledem ke směru deformace. Zvolené předpoklady – konvence:

- souřadné soustavy, například $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, jsou pravotočivé,
- hlavní napětí $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ jsou tlaková, kladných hodnot, směřují dovnitř přetvářené hmoty, jejich směry v pořadí indexů (1,2,3) respektují pravotočivou souř. soustavu,
- označíme-li smykové napětí τ_{xy} , pak osa $\mathbf{x}$ je normálou plochy, ve které napětí τ_{xy} působí směrem osy $\mathbf{y}$, (viz pořadí indexů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$).

Z přetvářené hmoty vytkneme vhodně orientovaný hranol, hlavní napětí $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ působí kolmo na jeho stěny – viz obr.1. Při pohledu na tento hranol proti směru σ_3 dostaneme nárys tohoto elementárního hranolu jako vhodný základ pro odvození rovnic Mohrovy kružnice.



Obr. 1: Transformace sil - napětí na elementárním hranolu přetvářené hmoty.

Tuto transformaci napětí ze dvou rovin do jedné roviny popisují následující rovnice:

$$dz \cdot ds \cdot \sigma_x = (dz \cdot ds \cdot \sin \alpha) \cdot \sigma_2 \cdot \sin \alpha + (dz \cdot ds \cdot \cos \alpha) \cdot \sigma_1 \cdot \cos \alpha \quad \dots \text{dále úpravou} \dots$$

$$\sigma_x = \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha \quad \dots \text{dosazením } 2 \cdot \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha), 2 \cdot \cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\text{a úpravou dostaneme} \quad \sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (1)$$

$$dz \cdot ds \cdot \tau_{xy} = (dz \cdot ds \cdot \sin \alpha) \cdot \sigma_2 \cdot \cos \alpha - (dz \cdot ds \cdot \cos \alpha) \cdot \sigma_1 \cdot \sin \alpha \quad \dots \text{dále úpravou} \dots$$

$$\tau_{xy} = \sigma_2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \dots \text{dosazením} \dots 2 \cdot (\sin \alpha) \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\text{a úpravou dostaneme} \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) jsou **parametrickými rovnicemi negativní Mohrovy kružnice** – viz obr.2.

Důsledkem použití goniometrických vztahů s dvojnásobným úhlem při odvození parametrických rovnic Mohrovy kružnice s ohledem na průběh funkcí $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ platí pravidlo pro negativní / pozitivní Mohrovu kružnici:

Pootočíme-li rovinu ρ_{AB} v přetvářené hmotě o úhel $+\alpha$ v kladném smyslu, pootočí se bod udávající napětí σ_x a τ_{xy} na příslušné Mohrově kružnici

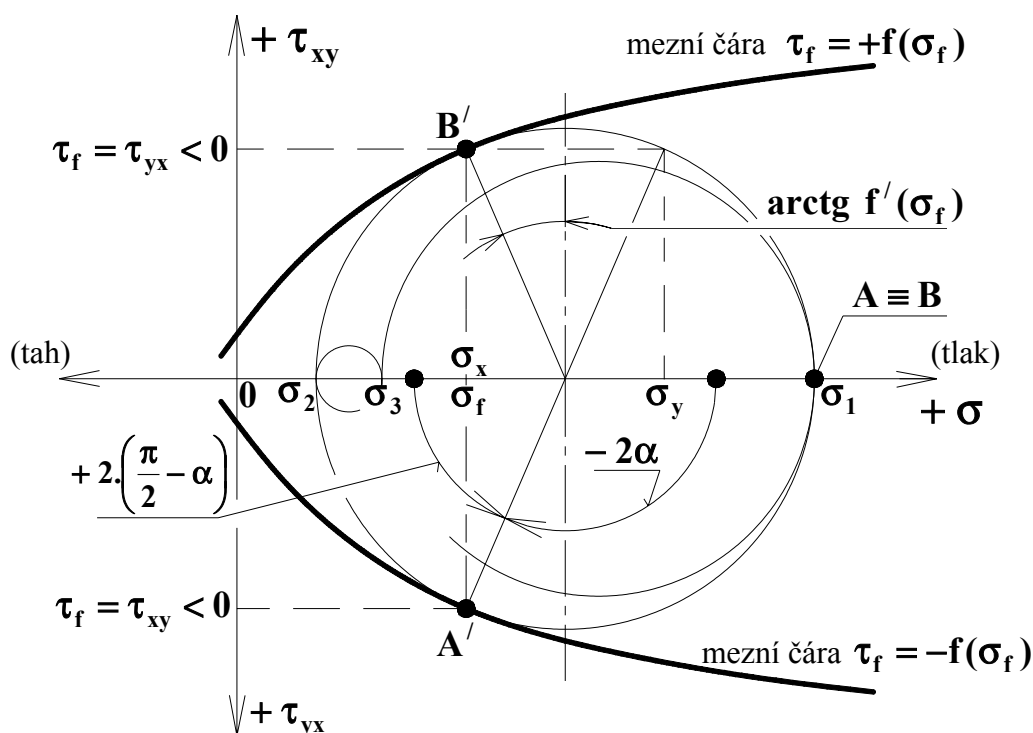
o úhel -2α v záporném smyslu při negativní Mohrově kružnici ($A \rightarrow A'$)... viz obr. 2,

o úhel $+2\alpha$ v kladném smyslu při pozitivní Mohrově kružnici ($B \rightarrow B'$).

Pozitivnost či negativnost Mohrovy kružnice závisí na zvolených konvencích, pozitivnost i negativnost respektuje „směr“ účinků smykových napětí v přetvářené hmotě – vhodně vybrané smykové napětí je totožné se směrem deformace. Každé smykové napětí τ má ke zvolené souřadné soustavě x, y, z tři směrové kosiny, změníme-li u všech jejich hodnot znaménka (+ na – a naopak), dostaneme z původních akčních účinků napětí τ reakční účinky napětí τ na těže nositelce. Tuto rozdílnost pozitivní i negativní Mohrova kružnice rozlišuje a respektuje tak určení orientace tenzoru napjatosti vzhledem ke kluzným čarám.

3. Určení smykového napětí ve směru deformace

Materiálové charakteristiky mnoha přetvářených hmot mohou být popsány mezními čarami. Mezní čára je obalovou čarou všech mezních Mohrových kružnic, může označovat počátek plastické deformace, může být funkcí rychlosti smýkání, teploty, dalších fyzikálních veličin. Dle obr.2 existují vždy dva směry mezního smykového napětí, odpovídající bodům A' a B' . Mezní napětí smykové τ_f a normálové σ_f musí vyhovovat rovnici mezní čáry $\tau_f = \pm f(\sigma_f)$.



Obr. 2: Negativní Mohrova kružnice je vymezena hodnotami σ_1 a σ_2 .

Body $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{B}'$ jsou společné pro negativní mezní Mohrovu kružnici a mezní čáry. Smykové napětí ve směru deformace $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_f$, příslušné normálové napětí $\sigma_x \equiv \sigma_f$. Derivaci mezní čáry určíme směrnicí tečny mezní čáry a z toho v obr.2 úhel označený $\arctg f'(\sigma_f)$.

Dle uvedeného pravidla o dvojnásobném pootočení $\alpha \dots 2\alpha$ možno napsat, že dle obr. 2 i 1

$$\begin{aligned} \text{úhel mezi směry účinků napětí } \sigma_1 \text{ a napětí } \sigma_x \equiv \sigma_f \text{ má hodnotu } & \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\arctg f'(\sigma_f)}{2} \right), \\ \text{úhel mezi směry účinků napětí } \sigma_1 \text{ a napětí } \tau_{xy} \equiv \tau_f \text{ má hodnotu } & \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arctg f'(\sigma_f)}{2} \right) \quad (3) \end{aligned}$$

Přetváření – deformace hmoty je přemísťování jednotlivých elementů hmoty $\mathbf{dm}$ po drahách - trajektoriích o elementy $\mathbf{ds}$ těchto drah – trajektorií. Tyto dráhy – trajektorie je možno v řadě případů zaznamenat jako proudnice, (např. 3D ultrazvukovou sondou). Probíhá-li přemísťování elementů $\mathbf{dm}$ po sousedních proudnicích různou rychlostí, je možno tyto proudnice nazývat klznými čarami.

Klzné čáry v přetvářené hmotě mohou být obecně prostorovými křivkami, každá prostorová křivka má první křivost – flexi a druhou křivost – torzi. Rovina flexe se nazývá oskulační rovinou klzné čáry ve zvoleném bodě, patří do ní tečna a hlavní normála klzné čáry, binormála klzné čáry je k oskulační rovině kolmá. Tečna, hlavní normála a binormála určuje tzv. Frenetův průvodní trojhran prostorové křivky.

Směr silových i deformačních účinků smykového napětí τ_f je svojí nositelkou totožný s tečnou klzné čáry pro zvolený bod klzné čáry.

4. Určení orientace tenzoru napjatosti ve zvoleném bodě klzné čáry

Vhodným matematickým zpracováním obrazu přetváření – deformace, např. metodou fázové korelace určíme vektory elementárních posunutí jednotlivých elementů přetvářené hmoty. Koncové body vybraných vektorů možno považovat za body klzných čar, vhodným výběrem bodů možno proložit klznou čáru například využitím kubického parametrického interpolačního splajnu. Jako parametr je třeba zvolit délku křivky s , klzná čára pak bude popsána následujícími parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= x(s) = a_x \cdot s^3 + b_x \cdot s^2 + c_x \cdot s + d_x \\ y &= y(s) = a_y \cdot s^3 + b_y \cdot s^2 + c_y \cdot s + d_y \\ z &= z(s) = a_z \cdot s^3 + b_z \cdot s^2 + c_z \cdot s + d_z \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Jednotkový vektor tečny této křivky: } \vec{t}_0 \equiv \left\{ \left(\frac{dx(s)}{ds} \right)_{s=s_0}, \left(\frac{dy(s)}{ds} \right)_{s=s_0}, \left(\frac{dz(s)}{ds} \right)_{s=s_0} \right\} \quad (5)$$

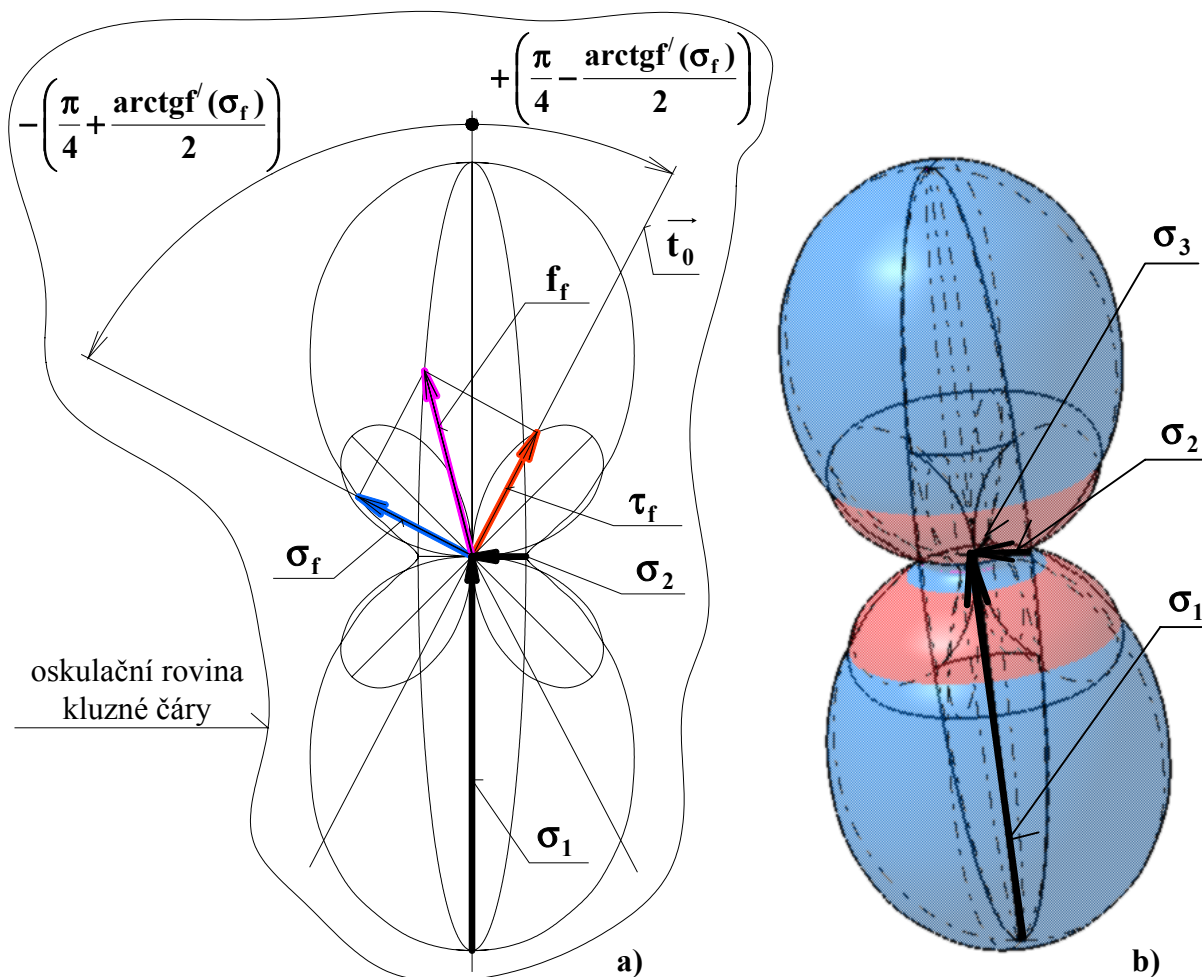
$$\begin{aligned} \text{Jednotkový vektor} \\ \text{hlavní normály} \\ \text{této křivky: } \vec{n}_0 \equiv \left\{ R_1 \cdot \left(\frac{d^2x(s)}{ds^2} \right)_{s=s_0}, R_1 \cdot \left(\frac{d^2y(s)}{ds^2} \right)_{s=s_0}, R_1 \cdot \left(\frac{d^2z(s)}{ds^2} \right)_{s=s_0} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Poloměr oskulační kružnice:
$$\mathbf{R}_1 = \left[\left(\frac{d^2 \mathbf{x}(s)}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \mathbf{y}(s)}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 \mathbf{z}(s)}{ds^2} \right)^2 \right]_{s=s_0}^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Jednotkový vektor binormály této křivky:
$$\vec{\mathbf{b}}_0 = \vec{\mathbf{t}}_0 \times \vec{\mathbf{n}}_0 \quad (8)$$

Pro každý bod kluzné čáry platí:

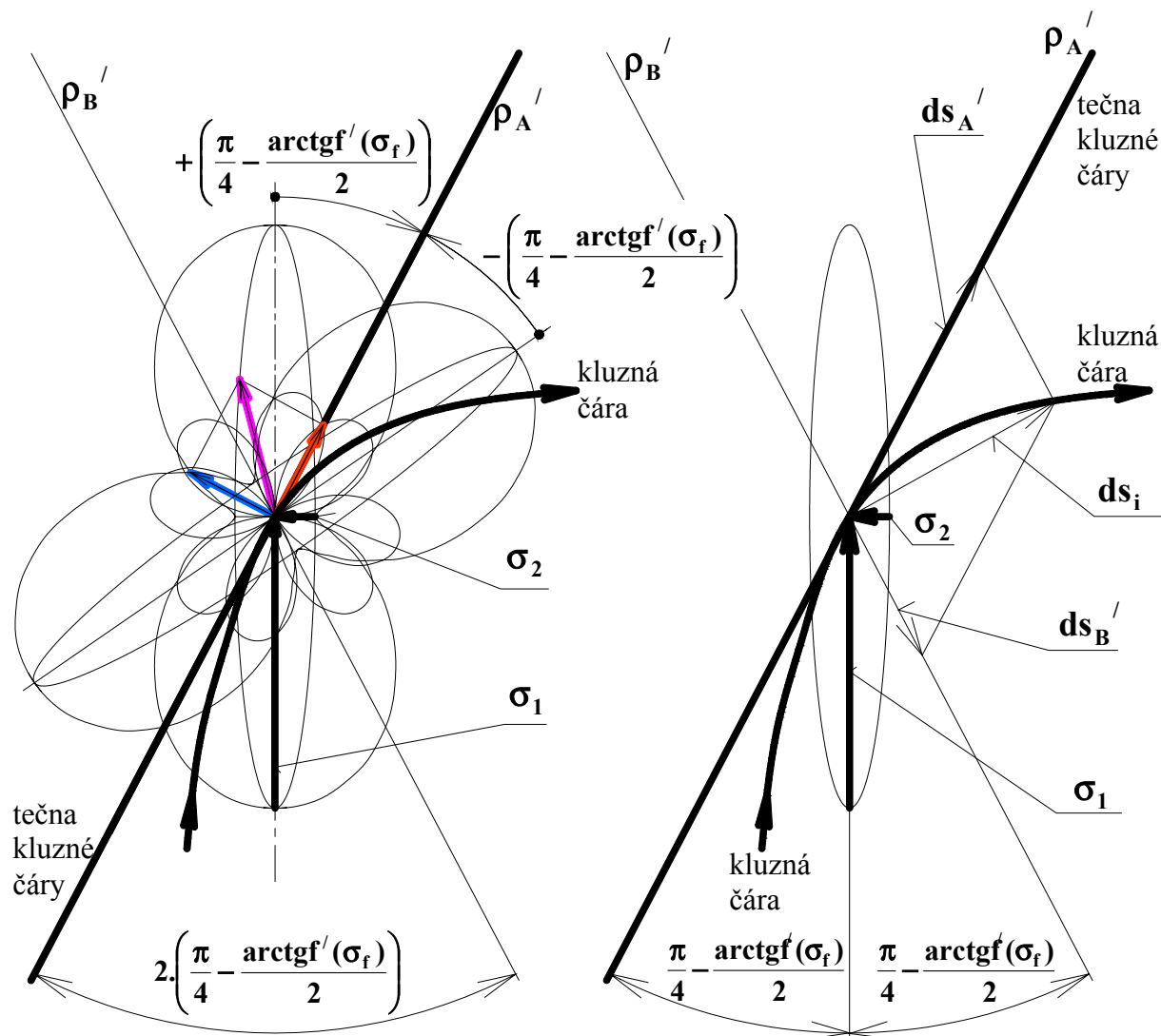
Směr účinků mezního smykového napětí $\boldsymbol{\tau}_f$ je totožný s tečnou kluzné čáry a s elementárním posunutím $d\mathbf{s}$. Z obr.2 a pro $\boldsymbol{\tau}_{xy} \equiv \boldsymbol{\tau}_f$ též z obr.1 je zřejmé, že směry napětí $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ a $\boldsymbol{\tau}_f$ leží v jedné rovině, tato rovina je oskulační rovinou kluzné čáry. Proto směr účinků třetího hlavního napětí $\boldsymbol{\sigma}_3$ je totožný se směrem binormály - ta je normálou oskulační roviny. Úhel mezi směry účinků hlavního napětí $\boldsymbol{\sigma}_1$ a mezního smykového napětí $\boldsymbol{\tau}_f$ je dán vztahem (3), směr účinků mezního smykového napětí je totožný s tečnou kluzné čáry.



Obr. 3: **a)** Jedna ze dvou možností orientace tenzoru napjatosti vůči oskulační rovině a tečně kluzné čáry totožné se směrem mezního smykového napětí $\boldsymbol{\tau}_f$.

b) Prostorová představa tenzoru napjatosti.

Pokud je kluzná čára přímkou, není možno určit oskulační rovinu kluzné čáry, oskulační rovinu možno určit pouze u zakřivených kluzných čar. Pro určení záporného nebo kladného smyslu odklonu směru tečny kluzné čáry od směru hlavního napětí σ_1 slouží směr posuvu hmotných elementů $\mathbf{dm}$ ve směru deformace $\mathbf{ds}$ dle následujícího obr. 4:



Obr. 4: Příklad určení orientace tenzoru napjatosti vůči tečně kluzné čáry

Tato oskulační rovina kluzné čáry obsahuje směry hlavních napětí σ_1 a σ_2 , hlavní napětí σ_3 je na ni kolmé, leží v binormále kluzné čáry. Elementární posuv $\mathbf{ds}$ hmotných elementů $\mathbf{dm}$ po kluzné čáře (proudnici) je označen šipkami.

Uvnitř vrcholového úhlu $2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arctgf'(\sigma_f)}{2} \right)$ musí být směr směřování šipek kluzné čáry

shodný se směřováním hlavního napětí σ_1 , v případě obr. 4 směrem do zkoumaného tečného bodu kluzné čáry (tahové napětí σ_1 by mělo směr opačný – směrem od tečného bodu kluzné čáry – znamenalo by obrácené šipky elementárních posuvů $\mathbf{ds}$ na kluzné čáře).

5. Závěr

Z uvedeného je zřejmé, že tenzor odpovídající tečnému bodu kluzné čáry má směr hlavního napětí σ_1 svisle vzhůru, je zobrazen v obou polovinách obr. 4. Šikmo orientovaný tenzor napjatosti v levé části obrázku nemůže být pro uvedený směr elementárních posuvů po kluzné čáře platný.

Pro případ určení velikosti tenzoru napjatosti v tečném bodě kluzné čáry je vhodné uvážit nelineární afinitu mezních Mohrových kružnic vůči mezní čáře a získat tak funkční závislost hlavních napětí σ_1 a σ_2 , která je zřejmá z obr. 2 a popsána následujícími rovnicemi:

$$\sigma_1 = \sigma_f + f(\sigma_f) \cdot f'(\sigma_f) + f(\sigma_f) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\sigma_f)} \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \sigma_f + f(\sigma_f) \cdot f'(\sigma_f) - f(\sigma_f) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\sigma_f)} \quad (10)$$

Potom možno např. při známém směru a velikosti libovolného například normálového napětí (což může být u mísených sypkých hmot hydrostatický tlak) určit známými postupy z mechaniky kontinua velikosti i směrové kosiny jednotlivých hlavních napětí.

6. Poděkování

Publikovaných výsledků bylo dosaženo za podpory ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, výzkumný záměr MSM 0021630518 "Simulační modelování mechatronických soustav".

7. Literatura

- Gere, J.M. & Timoshenko. (1989) Mechanics of materials. Chapman and Hall. Third SI Edition, pp.378-404. ISBN 55-503-79.
- Malášek, J. (2004) Mísení a kompaktování partikulárních látek. ISBN 80-214-2603-9.
- Rektorys, K. (1981) Přehled užití matematiky, pp. 67-70, 185. ISBN 04-003-081.