

MATHEMATICAL MODELING VIA DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

P. Kundrát ¹

Summary: *In the article we formulate two simple mathematical models in robotics, where delay differential equations are utilized. The first model is the case of bounded (constant) delay and the second one is the case of unbounded (proportional) delay. Both models are supplemented by some results from qualitative analysis of solutions of delay differential equations.*

1. Úvod

V současné praxi se ukazuje, že diferenciální rovnice se zpožděním mají své nezastupitelné místo při modelování řady nejen technických problémů, např. v oblasti optimálního řízení, v robotice, strojírenství, logistice, astrofyzice, kvantové mechanice, biologii, medicíně apod. (viz např. Kolmanovskii & Myshkis (1999)). Řadu procesů totiž nelze popsat klasickou obyčejnou diferenciální rovnicí, neboť je nutné zahrnout člen obsahující hodnotu závisle proměnné v posunutém časovém okamžiku (obvykle v minulosti). Tedy namísto klasické obyčejné diferenciální rovnice

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1)$$

uvažujeme diferenciální rovnici

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0, \quad (2)$$

kde $\tau(t)$ je tzv. *zpoždění* a člen $t - \tau(t)$ nazýváme *zpožděný argument*.

Jak se ukazuje, diferenciální rovnice se zpožděním už ve velice jednoduchých případech vykazují diametrálně odlišné kvalitativní vlastnosti (asymptotika řešení, oscilace, apod.) než odpovídající obyčejné diferenciální rovnice (viz např. Kundrát (2003)). Navíc v drtivé většině případů nelze nalézt obecné analytické řešení, a je tedy nezbytné využití numerických metod k nalezení řešení přibližného. Ovšem v některých případech i numerické řešení může selhat v tom smyslu, že dává zcela zavádějící výsledky, které jsou v rozporu s kvalitativní analýzou řešené zpožděné diferenciální rovnice. Tento jev bývá v numerické analýze nazýván "numerical nightmare" (viz např. Liu (1997)). Tyto aspekty potvrzují nezbytnost zahrnout do analýzy výsledků i kvalitativní analýzu řešené diferenciální rovnice.

¹ Ing. Petr Kundrát, Ph.D., Ústav matematiky, FSI VUT v Brně, Technická 2, 616 69 Brno, tel. +420 541 142 552, e-mail: kundrat@fme.vutbr.cz

Cílem tohoto článku je ilustrovat na vybraných modelech (z oblasti robotiky) některé výsledky kvalitativní analýzy řešení diferenciálních rovnic se zpožděním. V kapitole 2 je uveden příklad aplikace diferenciální rovnice s ohraničeným zpožděním (tj. $\sup \tau(t) < \infty$) a v kapitole 3 příklad neohraničeného zpoždění.

2. Model s ohraničeným zpožděním

Nejčastěji se vyskytují příklady modelů s ohraničeným zpožděním. Patří zde totiž případ konstantního zpoždění ($\tau(t) \equiv \tau, \tau \in \mathbf{R}^+$). Uveďme např. model obráběcího nástroje, kde je zahrnuto chvění vznikající při obráběcím procesu, transportní zpoždění, které je způsobeno konečnou rychlostí paliva proudícího dlouhým potrubím, procesní zpoždění před spuštěním chemické reakce, komunikační zpoždění v souvislosti s konečnou rychlostí šíření rádiového signálu v prostoru při komunikaci (řízení) na velkou vzdálenost. Dále v počítačově řízených systémech často existuje nezanedbatelné výpočetní zpoždění, způsobené množstvím operací a složitostí řídicích algoritmů.

V dalším se budeme podrobněji zabývat modely z oblasti robotiky. V robotice je celá řada problémů týkajících se stability, kde zpoždění v robotickém systému hraje nezanedbatelnou roli. Toto zpoždění může vzniknout v řídicím systému robota, při přenosu informací či v mechanické části robota. Systém MASTER-SLAVE je typickým případem, kde zpoždění vzniká v řízení. Např. v systému člověk–stroj vnáší prodleva reflexu lidského operátora zpoždění do řízení MASTER-SLAVE systému. Jedná se o více než 0.1 sekund. Analogii této situace lze nalézt např. u manipulátoru on-line řízenému počítačem. Vzorový čas digitálního řízení slouží jako základ pro hodnotu zpoždění, který je obvykle kolem 0.01 až 0.001 sekund.

Další významnou skupinou problémů je zpoždění vznikající při přenosu informací. Tento zpožďující efekt bývá rozhodující při operacích ve vesmíru či ve velkých hloubkách pod hladinou moře. Prodleva je rovna času potřebnému k tomu, aby ultrasonická či elektromagnetická vlna urazila vzdálenost mezi MASTER a SLAVE. Toto zpoždění může dosahovat 0.1 - 1.0 sekund.

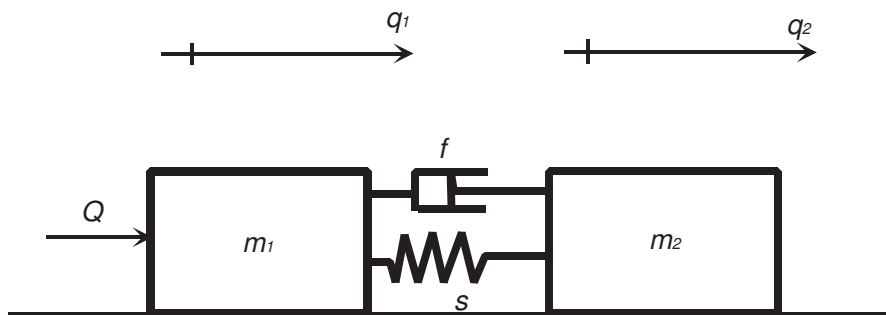
Jestliže robot pracuje při obráběcím procesu jako je frézování, soustružení apod., může rovněž vzniknout zpoždění ve zpětné vazbě čistě mechanické části robota. Bývá nepřímo úměrné relativní rychlosti nástroje a materiálu. Tento fenomén bude diskutován v následujícím odstavci, kde bude vyšetřován jednoduchý matematický model mechanického robota, viz Stépán (1989).

Na obrázku 1 je popsán elastický robot s řízením polohy s jedním stupněm volnosti. Poloha q_2 konečného efektoru je detekována přímo. Řízení robota vychází z principu kinematického sebeovládání. To znamená, že aktuátor působící na první těleso v tomto modelu způsobuje rychlost $\dot{q}_1$, která je určována polohou konečného efektoru:

$$\dot{q}_1(t) = -Kq_2(t - \tau), \quad (3)$$

kde $K > 0$ a $\tau = konst.$ reprezentuje zpoždění v řízení. Zavedením nové proměnné $v = \dot{q}_2$ lze tento systém popsat soustavou lineárních rovnic s konstantním zpožděním

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & -\alpha^2 & -2\kappa\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2K\kappa\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(t - \tau) \\ q_2(t - \tau) \\ v(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad (4)$$



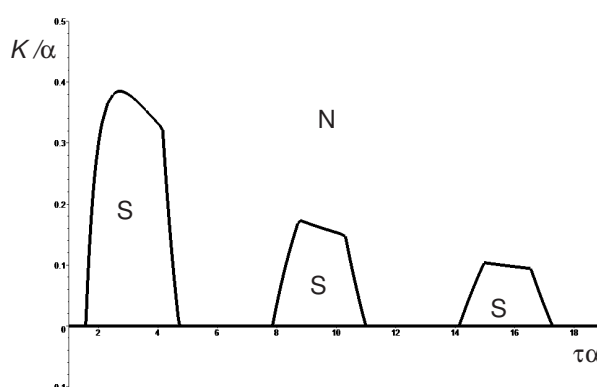
Obrázek 1: Model elastického robota

kde $\alpha = \sqrt{s/m_2}$ je přirozená frekvence netlumeného a nekontrolovaného systému, a $\kappa = \frac{f}{2m_2\alpha}$ je relativní tlumící faktor. Následující věta (viz Stépán (1989)) udává podmínky pro nastavení parametrů modelu tak, aby byla zachována stabilita netlumeného systému.

Věta. Uvažujme zpožděnou diferenciální rovnici (4), kde $\kappa = 0$. Její triviální řešení je asymptoticky stabilní, právě když existuje takové $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ vyhovující relacím

$$\begin{aligned} \frac{K}{\alpha} &< \frac{\pi}{2\alpha\tau} - \left(\frac{\pi}{2\alpha\tau}\right)^3, \\ \frac{K}{\alpha} &< \frac{1}{\alpha\tau} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{(\alpha\tau)^3} \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^3, \\ \frac{K}{\alpha} &< -\frac{1}{\alpha\tau} \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{(\alpha\tau)^3} \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Graf stability pro netlumený systém (4) je ilustrován na obr. 2. v souřadnicích bezrozměrných parametrů $(\tau\alpha)$ a (K/α) . Výsledky pro tlumený systém lze nalézt v Stépán (1989).

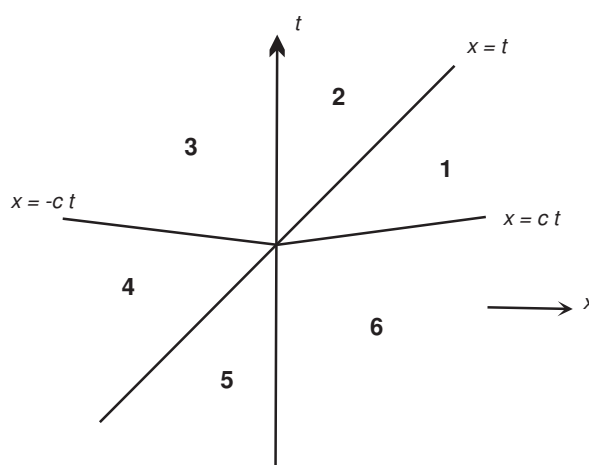


Obrázek 2: Graf stability netlumeného systému (4); N - nestabilní, S - stabilní

V další kapitole bude formulován problém s neohrazeným (proporcionálním) zpožděním, kde se budeme zabývat asymptotickými odhady řešení dané zpožděné diferenciální rovnice.

3. Model s neohraničeným zpožděním

Nejdříve popíšeme jistou fyzikální situaci, která dává vzniknout funkcionální diferenciální rovnici s proporcionálním zpožděním, tuto zobcníme a uvedeme relevantní asymptotický odhad řešení tohoto zobecněného problému. Uvažujme napnutou strunu v gravitačním poli, jejíž vertikální vychýlení $Y(x, t)$ je dostatečně malé. Budeme vyšetřovat jednorozměrný vlnový pohyb o rychlosti $c > 1$ způsobený silou pohybující se podél struny jednotkovou rychlostí. Nechť tato síla vytváří nespojitost v derivaci $[\partial Y / \partial x]_{\pm}^{\pm}$ přímo úměrnou její vertikální rychlosti dy/dt , kde $y(t) = Y(t, t) + Y_s(t)$ a $Y_s(x)$ je statická poloha, a nechť tato síla se blíží k bodu $x = 0$, kde jsou předepsány podmínky $[Y]_{\pm}^{\pm} = 0$ a $\kappa[\partial Y / \partial x]_{\pm}^{\pm} = Y$. Řešení této vlnové rovnice lze vyjádřit ve tvaru $Y = F_i(ct - x) + G_i(ct + x)$, a to v šesti oblastech $i = 1, 2, \dots, 6$ (viz obr 3). Jsou dány tyto okrajové podmínky: poloha Y je nulová pro velké hodnoty x podél $ct \pm x = konst.$, $F_4 \equiv 0 \equiv G_6$. Podmínky spojitosti vyžadují $G_1 \equiv G_6$, $F_3 \equiv F_4$, a $F_1(0) = F_6(0)$, $G_3(0) = G_4(0)$.



Obrázek 3: Oblasti řešení $i = 1, 2, \dots, 6$

Podmínka na $x = t$ dává

$$F_1(ct - t) = F_2(ct - t) + G_2(ct + t),$$

a po jistých úpravách

$$G_2(t) = \alpha y\left(\frac{t}{c+1}\right),$$

kde α je vhodná konstanta úměrnosti. Podmínka na $x = 0$ dává

$$G_3(t) = F_2(t) + G_2(t) = \kappa[G'_2(t) - F'_2(t) - G'_3(t)],$$

a poloha $y(t) = F_1(ct - t) + Y_s(t)$.

Eliminací F_1, F_2, G_2 a G_3 obdržíme

$$\left(1 + \frac{2\kappa}{c-1} \frac{d}{dt}\right) y(t) + \frac{\alpha}{1-\alpha} y(\lambda t) = Y_s + \frac{2\kappa}{c-1} \frac{dY_s}{dt}, \quad (5)$$

kde $\lambda = (c - 1)/(c + 1)$. To je již lineární funkcionální diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Nehomogenní člen vede na partikulární integrál, který pro jednoduché funkce $Y_s(t)$ lze snadno řešit.

Uveďme nyní zobecnění předchozího modelu v případě aplikace sběrače proudu elektrické lokomotivy. Je-li budící síla působící na strunu (resp. drát trolejového vedení) generována pantografem lokomotivy, jehož model sestává ze dvou těles spojených pružinou a tlumičem a spodní těleso je ke střeše lokomotivy připojeno pružinou a působí na něj konstantní přítláčná síla, dostáváme klasický model sběrače elektrického proudu (viz Ockendon & Tayler (1971)). V blízkosti opor pak je celý systém popsán vektorovou diferenciální rovnicí s proporcionálním zpožděním, tzv. rovnicí pantografu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(\lambda t), \quad 0 < \lambda < 1, \quad t \in [0, \infty), \quad (6)$$

kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou nenulové komplexní matice $n \times n$ a $\lambda \in \mathbf{R}$.

Vybrané kvalitativní vlastnosti rovnice pantografu (6) byly studovány v několika člancích, např. Lim (1976), Iserles (1997). Uvedeme asymptotický odhad řešení rovnice pantografu, který je použitelný ve výše zmíněné aplikaci:

Věta (Lim) Nechť $0 < \lambda < 1$ a matice A je diagonalizovatelná. Jestliže všechny reálné části vlastních čísel matice A jsou záporné, pak existuje taková konstanta γ , že pro všechna řešení rovnice (6) platí:

$$x_i(t) = O(t^\gamma) \quad \text{při} \quad t \rightarrow \infty, i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Speciálně pro $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, kde $\text{Re } a_{11} \leq \text{Re } a_{22} \leq \dots \leq \text{Re } a_{nn} < 0$ a nechť $\mathbf{B} = (b_{ij})$. Jestliže parametr γ je dán vztahem

$$\gamma = \frac{\log\left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|}{-\text{Re } a_{nn}}\right)}{\log \lambda^{-1}}, \quad (8)$$

pak každé řešení $\mathbf{x}$ rovnice (6) je $O(t^\gamma)$ při $t \rightarrow \infty$, tj. $\|\mathbf{x}(t)\| \leq Lt^\gamma$ při $t \rightarrow \infty$, kde $L > 0$ je vhodná reálná konstanta a $\|\cdot\|$ je vhodná vektorová norma.

4. Závěr

Kvalitativní odhady řešení zpožděných diferenciálních rovnic mají zásadní význam při vyšetřování stability řešení. Pro posouzení stability řešení rovnice (6) lze využít vztahu (8). Je-li speciálně $\gamma \leq 0$ (tj. platí-li relace $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq -\text{Re } a_{nn}$), pak každé řešení je stabilní. Je-li navíc $\gamma < 0$ (tj. $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < -\text{Re } a_{nn}$), dostáváme pak asymptotickou stabilitu řešení.

Tyto kvalitativní úvahy jsou často nezbytným předpokladem pro úspěšné zvládnutí numerického řešení daných problémů.

5. Poděkování

Publikovaných výsledků bylo dosaženo za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, výzkumný záměr MSM 0021630518 "Simulační modelování mechatrických soustav".

6. Literatura

- Iserles A. 1997: Exact and Discretized Stability of the Pantograph Equation, *Appl. Numer. Math.* 24, 295–308.
- Kundrát, P. 2003: Některé aspekty řešení diferenciálních rovnic se zpožděným argumentem, *Sborník z 12. semináře Moderní matematické metody v inženýrství*, Ostrava, 119–122.
- Lim E. B. 1976: Asymptotic Behavior of Solutions of the Functional Differential Equation $x'(t) = Ax(\lambda t) + Bx(t)$, $\lambda > 0$, *J. Math. Anal. Appl.* 55, 794–808.
- Liu, Y. 1997: Numerical investigation of the pantograph equation, *Appl. Numer. Math.*, Vol. 24, 309–317.
- Kolmanovskii, V. & Myshkis, A. 1999: *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- Ockendon J. R. & Tayler A. B. 1971: The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive, *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* **322** 447–468.
- Stépán, G. 1989: *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*, Longman Scientific & Technical, Burnt Mill.