im 2006
National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no.
235

PARALLELIZATION OF FUZZY PROBLEMS

J. Kruis, P. Štemberk [1]

Summary: *The theory of fuzzy sets becomes still more popular in engineering problems where introduction of uncertainty is necessary or desirable. The theory of probability, which was exclusively used until recently, is sometimes awkward and there are difficulties in cases with lack of sufficient information which is needed for proper definition of probability distribution. In such cases, the theory of fuzzy sets is useful tool which describes uncertainty in input data by fuzzy numbers. A problem with fuzzy input data leads to fuzzy output data and whole computation should be rearranged with respect to fuzzy numbers. A popular and efficient method for solution of fuzzy problems is the method of α-cuts which may be very computationally demanding. Simple parallelization of a computer code leads to ideal speedup and enables solution of relatively large problems.*

1. Úvod

Podrobnější analýzy konstrukcí vyžadují nejen kvalitní materiálové modely a věrný popis geometrie a zatížení, ale i zavedení nejistot. Různé materiálové parametry, rozměry konstrukce či dílu, velikost a působiště zatížení a okrajové podmínky jsou příklady, kde se všude vyskytují nejistoty.

Až donedávna byly nejistoty popisovány pouze pomocí teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Některé vstupní parametry byly modelovány jako náhodné veličiny a hledala se rozdělení požadovaných výstupních veličin. Tento postup vede na několik potíží. Předně je třeba určit rozdělení pravděpodobnosti vstupních veličin včetně parametrů jednotlivých rozdělení. Ne vždy je k dispozici dostatek podkladů a určení rozdělení pravděpodobnosti pouze z několika dostupných informací může být problematické.

Druhá potíž souvisí s rozdělením pravděpodobnosti výstupních parametrů. Rozdělení pravděpodobnosti výsledku algebraické operace mezi dvěma náhodnými veličinami se známými rozděleními pravděpodobnosti je známo jen ve velmi málo speciálních a triviálních případech. Proto je téměř vždy třeba použít vhodnou simulační metodu. Obecně lze tvrdit, že simulační metody jsou výpočetně náročné. Výpočetní náročnost se pochopitelně zvětšuje v případech,

[1] Ing. Jaroslav Kruis, Ph.D., Katedra mechaniky, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, tel. +420 224 354 369, e-mail jk@cml.fsv.cvut.cz, Ing. Petr Štemberk, Ph.D., Katedra betonových a zděných konstrukcí, Stavební fakulta ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, tel. +420 224 354 364, e-mail stemberk@fsv.cvut.cz

kde příslušný deterministický problém je sám o sobě výpočetně náročný. Jedná se například o nelineární úlohy nebo úlohy dynamické s numerickou integrací.

Poslední dobou se začíná při popisu nejistot používat alternativa k teorii pravděpodobnosti a matematické statistice, teorie fuzzy množin [Akpan 2001]. Tato teorie byla poprvé uvedena v [Zadeh 1965]. Rozdíl od klasické teorie množin spočívá v zobecnění vlastnosti "patřit do množiny". Klasická teorie množin rozeznává pro každý prvek a každou množinu pouze dvě možnosti. Prvek buď do množiny patří nebo nepatří. Teorie fuzzy množin zavádí tzv. funkci příslušnosti, která nabývá hodnot od 0 do 1. Pokud je funkce příslušnosti rovna nule, prvek určitě do množiny nepatří. Pokud je funkce příslušnosti rovna jedné, prvek určitě do množiny patří. Pro mezilehlé hodnoty prvek do množiny spíše nepatří, spíše patří, apod. Funkce příslušnosti umožňuje snadno popsat nejistoty.

Teorie fuzzy množin vede podobně jako teorie pravděpodobnosti k opakovanému "deterministickému" výpočtu. Výhodou ale je, že nejistoty vstupních údajů lze snadno popsat a rovněž popis výstupních veličin je jednoduše vyjádřen formou fuzzy čísel. Popis nejistot pomocí fuzzy množin je vhodný zejména během první fáze návrhu konstrukce. Úplné ověření navržené konstrukce může být provedeno pravděpodobnostními metodami, protože bude k dispozici více informací. Pravděpodobnostní přístup a přístup teorie fuzzy množin by měly být vhodně kombinovány.

Příspěvek se zabývá zavedením nejistot ve tvaru fuzzy čísel do výpočtu a zefektivněním výpočtu použitím paralelních počítačů.

2. Fuzzy čísla

Klasické teorie množin dokáže pro libovolný prvek jednoznačně rozhodnout, zda do nějaké množiny patří či nepatří. Tento způsob uvažování má své výhody, ale takto striktní přístup není běžný pro lidské vyjadřování.

Teorie fuzzy množin zobecňuje vlastnost "patřit do množiny" ze dvou možností (prvek patří do množiny a prvek nepatří do množiny) na škálu od nuly do jedné. Definuje se tzv. funkce příslušnosti fuzzy množiny, která každému prvku přiřadí stupeň příslušnosti, což je reálné číslo z uzavřeného intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Je-li stupeň příslušnosti prvku roven nule, prvek jistě do množiny nepatří, je-li stupeň příslušnosti roven jedné, prvek jistě do množiny patří. Více podrobností lze nalézt např. v [Novák 1990].

Fuzzy číslo je zvláštní druh fuzzy množiny, kde prvky množiny jsou reálná čísla. Příklady fuzzy čísel jsou na obrázku 1. Fuzzy číslo je určeno funkcí příslušnosti.

Aritmetické operace s fuzzy čísly lze zavést několikerým způsobem [Kaufman 1985]. V tomto příspěvku bude uveden jen jeden způsob založený na tzv. α-řezech. α-řez fuzzy čísla je klasický interval, který obsahuje reálná čísla mající stupeň příslušnosti větší nebo roven hodnotě α. Příklad α-řezu pro $\alpha = 0,7$ je uveden na obrázku 2. α-řezy převádějí fuzzy čísla na klasické intervaly a aritmetické operace mezi fuzzy čísly (sčítání, odčítání, násobení a dělení) lze počítat pomocí intervalové aritmetiky.

3. Metoda α-řezů

Přítomnost fuzzy čísel ve vstupních parameterech libovolné úlohy vyžaduje použití fuzzy aritmetiky. To prakticky znamená, že se fuzzy čísla šíří výpočtem až k výstupním parametrům.

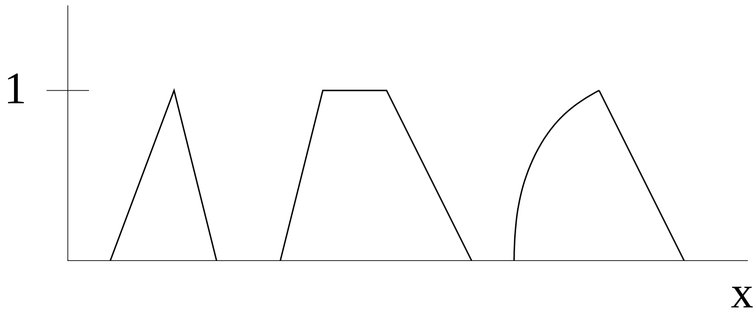

Figure 1: Fuzzy čísla a funkce příslušnosti

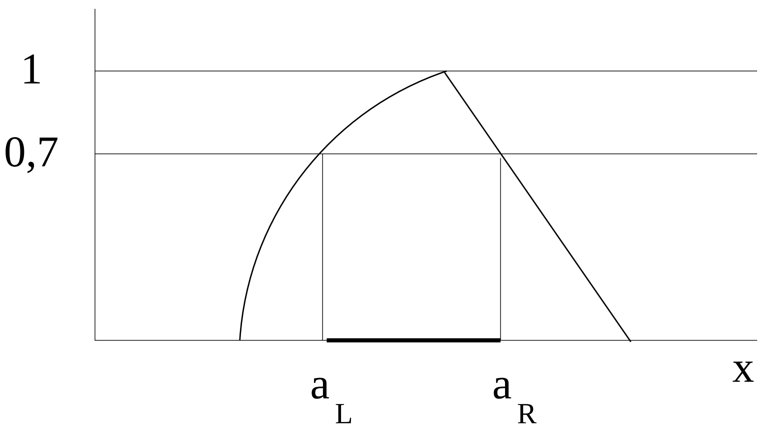

Figure 2: α-řez

Aby nebylo třeba přeprogramovávat celý počítačový program, lze použít metodu α-řezů.

Princip metody α-řezů spočívá v převodu fuzzy čísel na klasické intervaly. Prvním krokem je volba počtu α-řezů. Pro mnoho úloh stačí zvolit dva řezy ($\alpha = 0$ a $\alpha = 1$) nebo tři řezy ($\alpha = 0,\ \alpha = 0,5$ a $\alpha = 1$). Druhým krokem je generování vstupních dat. Pro konkrétní α-řez se získají minima a maxima pro všechny veličiny a ty se pak použijí pro generování všech možných kombinací. Jsou-li kombinace nagenerovány, použijí se v klasických výpočtech. Výsledky se uchovají a pro každou veličinu se po výpočtu všech kombinací určí minimum a maximum, které definují interval platný pro příslušný α-řez. Tento postup se použije pro všechny α-řezy. Po provedení všech výpočtů jsou fuzzy čísla popisující výstupní veličiny definována pomocí α-řezů.

Metoda α-řezů vede podobně jako simulační metody na velké množství výpočtů. Rozdíl je v tom, že počet výpočtů v metodě α-řezů je roven počtu všech kombinací, který je ovlivněn volbou α-řezů. Pokud je třeba minimalizovat výpočetní náročnost, je možné zvolit jen jeden α-řez, a to $\alpha = 0$. Tím se počítají jen minimální a maximální hodnoty.

4. Paralelizace

Velké množství výpočtů je časově náročné a je to bezesporu nevýhoda simulačních metod a metody α-řezů. Na druhou stranu jednotlivé výpočty jsou nezávislé a to je velká výhoda. Čas potřebný k řešení lze zkrátit paralelizací celého výpočtu.

Jeden procesor je označen za řídící, ostatní za podřízené. Řídící procesor zajišťuje pouze generování a rozesílání vstupních dat a shromažďování a vyhodnocování výstupních dat. Podřízené procesory přijímají vstupní data, provádějí výpočty a řídícímu procesoru posílají výstupní data. Je zřejmé, že rostoucí počet procesorů vede na prakticky ideální zrychlení výpočtu. Tento způsob paralelizace je velmi jednoduchý, ale umožňuje automaticky provádět výpočty, které by na jednom procesoru trvaly neúměrně dlouho.

5. Příklad

Vliv nejistot popsaných teorií fuzzy množin je dokumentován tímto jednoduchým příkladem. Jedná se o rovinnou železobetonovou rámovou konstrukci s celkovou výškou 16 m. Vzdálenost sloupů je 5 m. Rozměry příčných řezů příčlí i sloupů jsou 0,5 x 0,5 m. Konstrukce je zatížena zemětřesením, které je popsáno spektrem odezvy. Výstavba se předpokládá po jednotlivých podlažích. Proto je rámová konstrukce rozdělena na jednotlivá podlaží a předpokládá se, že vlastnosti betonu v jednom podlaží jsou všude stejné. Proto jsou na konstrukci uvažovány 4 typy betonu, jejichž vlastnosti se mohou vzájemně lišit. Nejistota vyplývající z vlastností betonu se projevuje v modulu pružnosti a hustotě materiálu. Střední hodnota modulu pružnosti je 30 GPa a hustoty materiálu je 2500 kg/m^3. Nejistota je vyjádřena tím, že se obě hodnoty mohou lišit o $\pm$ 10 %.

Výpočet odezvy konstrukce na zemětřesení pomocí spektra odezvy je založen na vlastních tvarech a frekvencích. Ty jsou vzhledem k nejistotám vstupních parametrů rovněž zatíženy nejistotami. Fuzzy výpočet byl proveden metodou α-řezů. Vliv nejistot na vlastní tvary je vidět z obrázků 3, 4, 5 a 6. Průběhy vnitřních sil a momentů jsou na obrázcích 7, 8 a 9.

Jednoprocesorový výpočet trval 333 s. Paralelní výpočet na 6 procesorech trval 58 s a na 21 procesorech trval 18 s. Ideální zrychlení pro 6 procesorů je 55,5 s a pro 21 procesorů je 15,8 s.

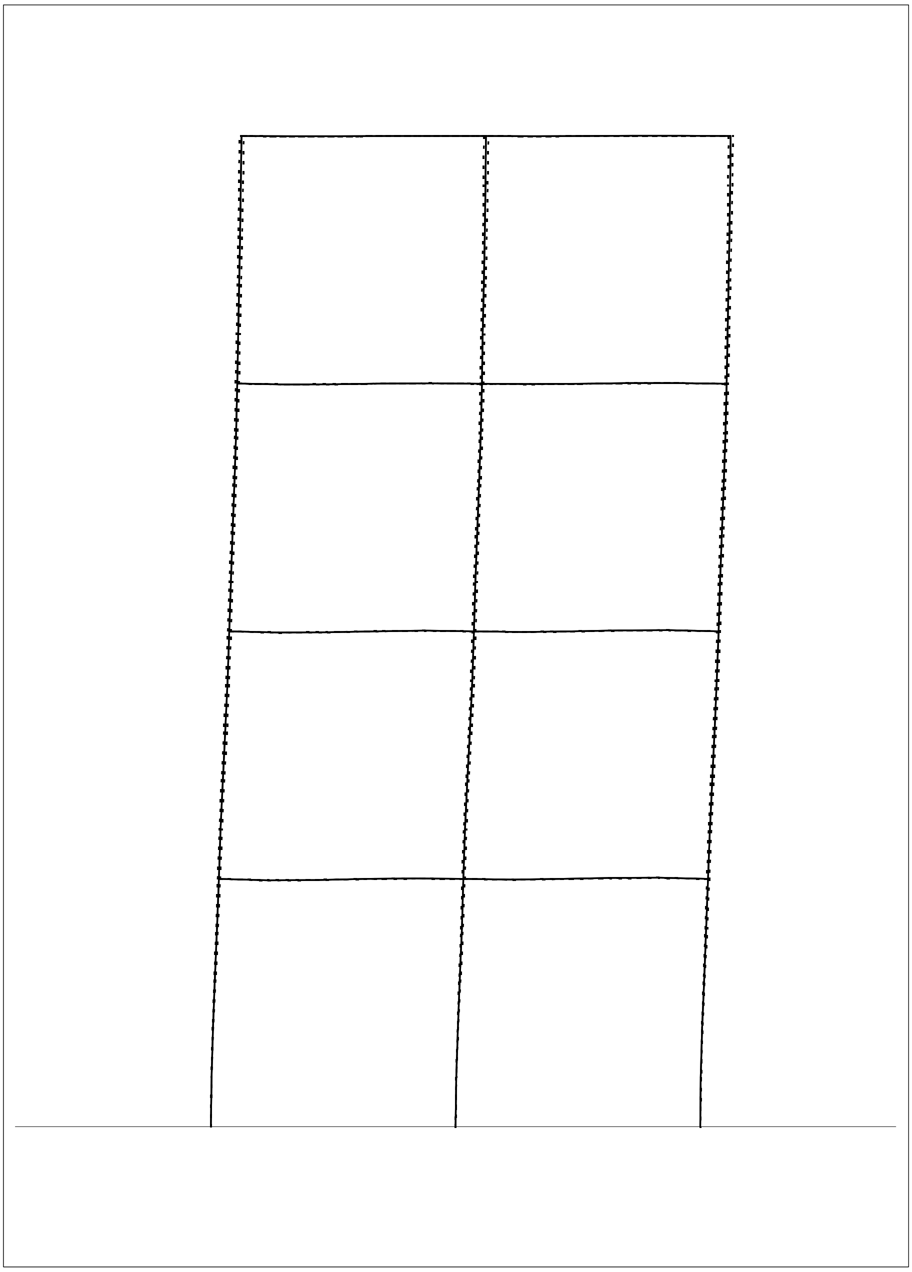

Figure 3: První vlastní tvar

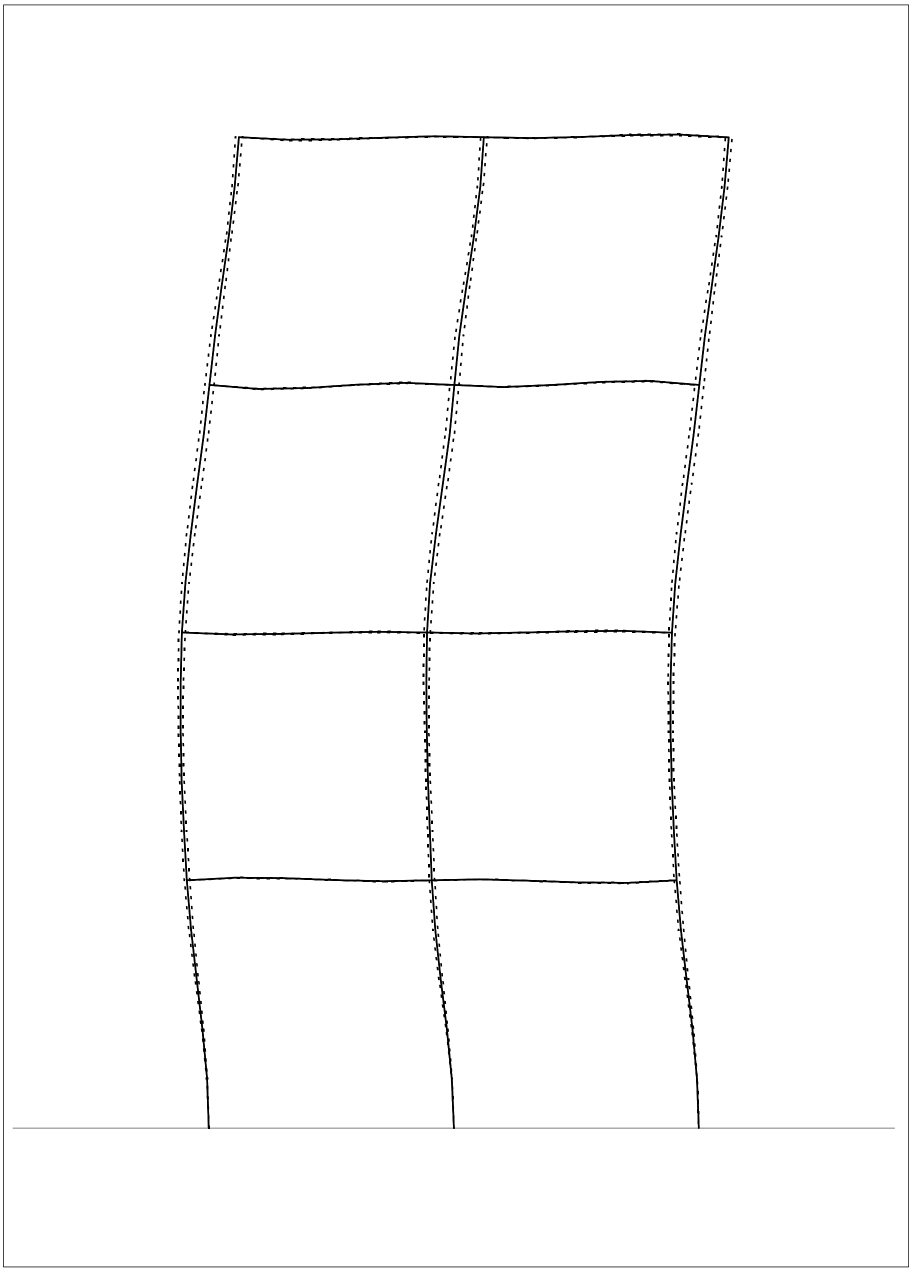

Figure 4: Druhý vlastní tvar

Je vidět, že dosažené časy jsou uspokojivé.

6. Závěr

Popsaná strategie je součástí projektu zabývajícího se využitím teorie fuzzy množin při popisu nejistot v inženýrských úlohách. V příspěvku je popsána fuzzyfikace materiálových parametrů a paralelizace programu vedoucí k podstatnému zkrácení výpočetního času. Dalším krokem bude fuzzifikace zatížení, protože nejistoty v popisu zemětřesení jsou mnohem důležitější a významnější než nejistoty týkající se materiálových vlastností.

7. Poděkování

Tato práce je podporována projektem Grantové agentury ČR číslo 103/04/1320.

8. References

[Akpan 2001] Akpan, U.O., Koko, T.S., Orisamolu, I.R., & Gallant, B.K. 2001: Practical fuzzy finite element analysis of structures. *Finite Elements in analysis and Design* vol. 38, 93-111

[Kaufman 1985] Kaufman, A. & Gupta, M.M. 1985: *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Application.* Van Nostrand Reinhold Company, Inc., New York.

[Novák 1990] Novák, V. 1990: *Fuzzy množiny a jejich aplikace* Matematický seminář SNTL, Praha.

[Zadeh 1965] Zadeh, L.A. 1965: Fuzzy sets. *Information Control* vol. 8 (**3**), 338-352

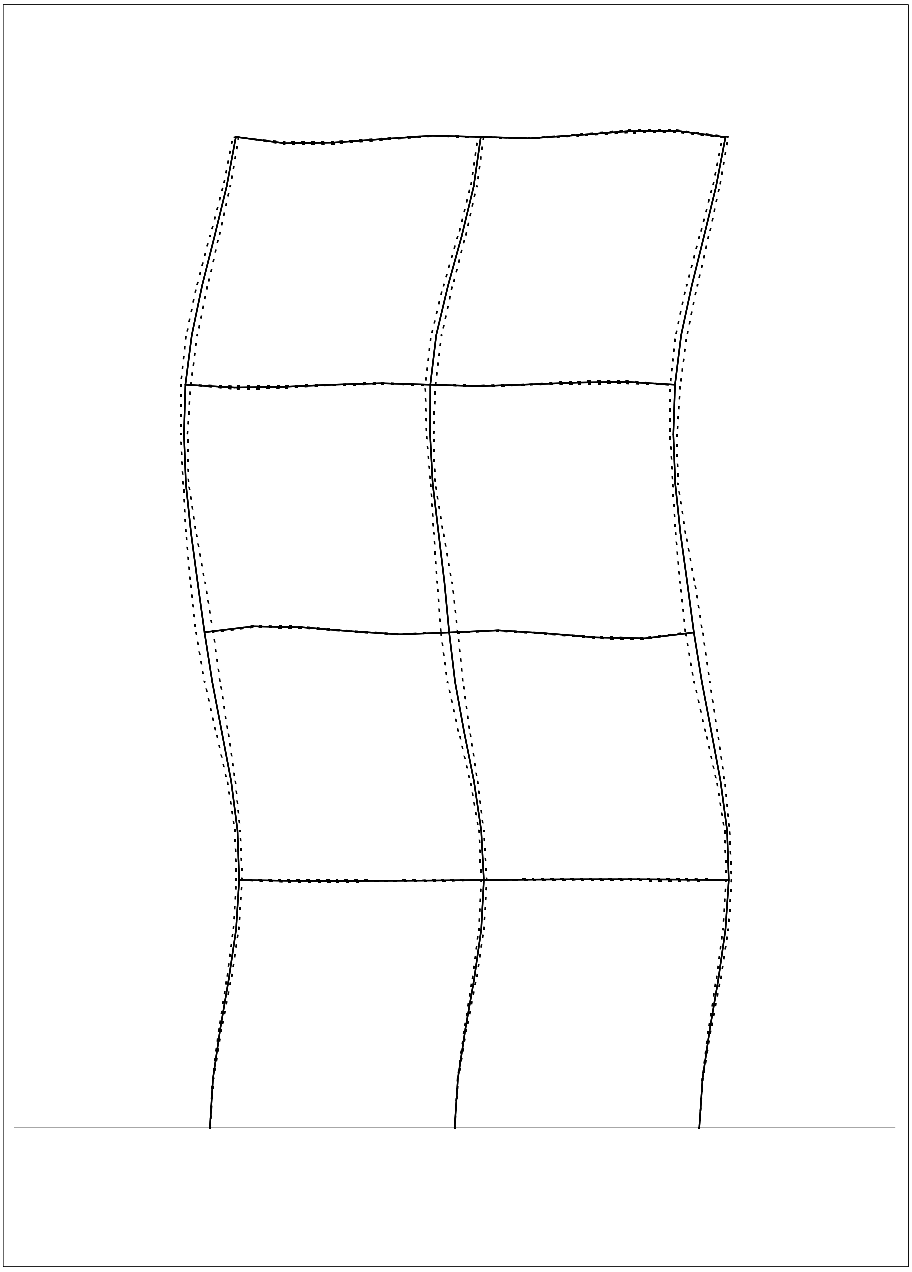

Figure 5: Třetí vlastní tvar

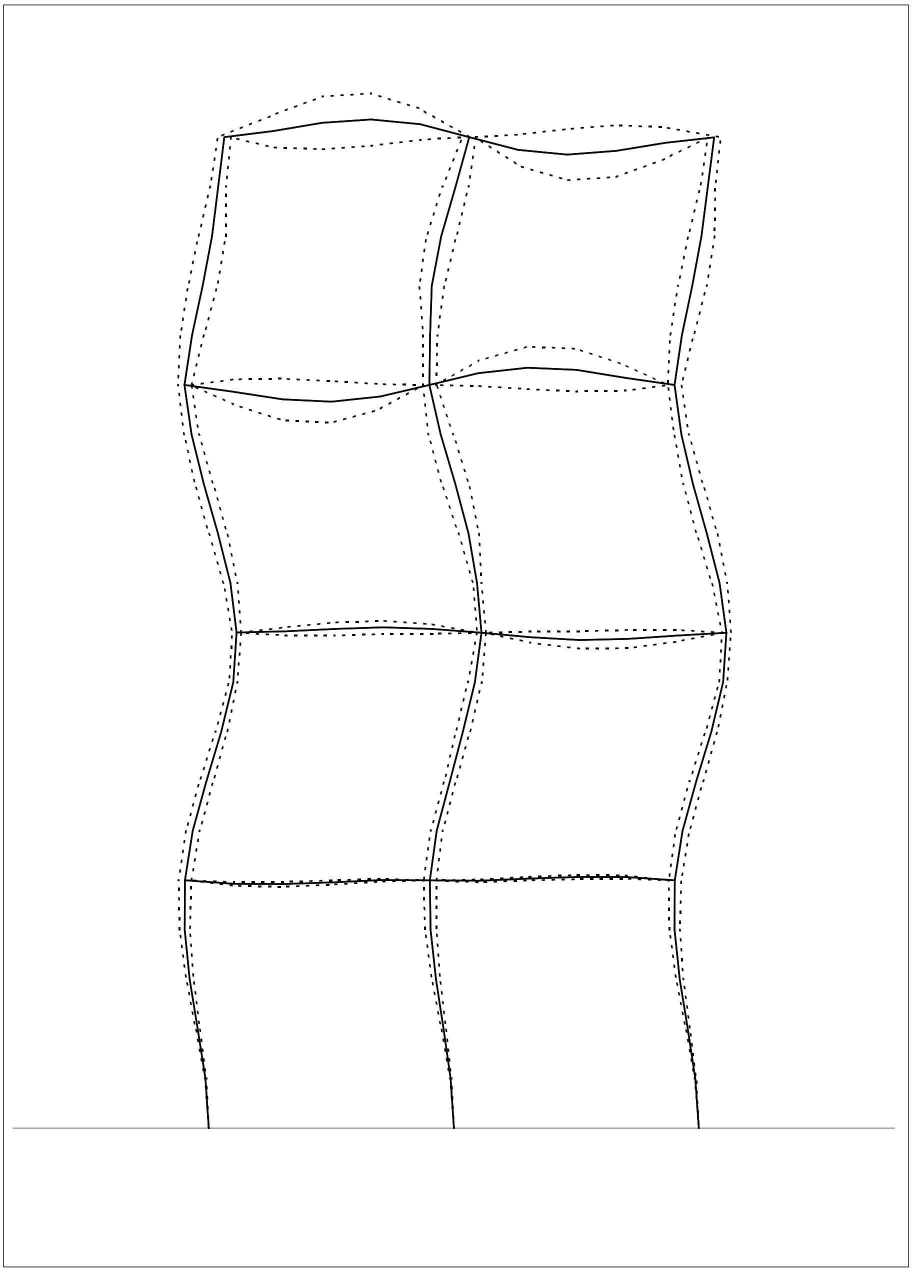

Figure 6: Čtvrtý vlastní tvar

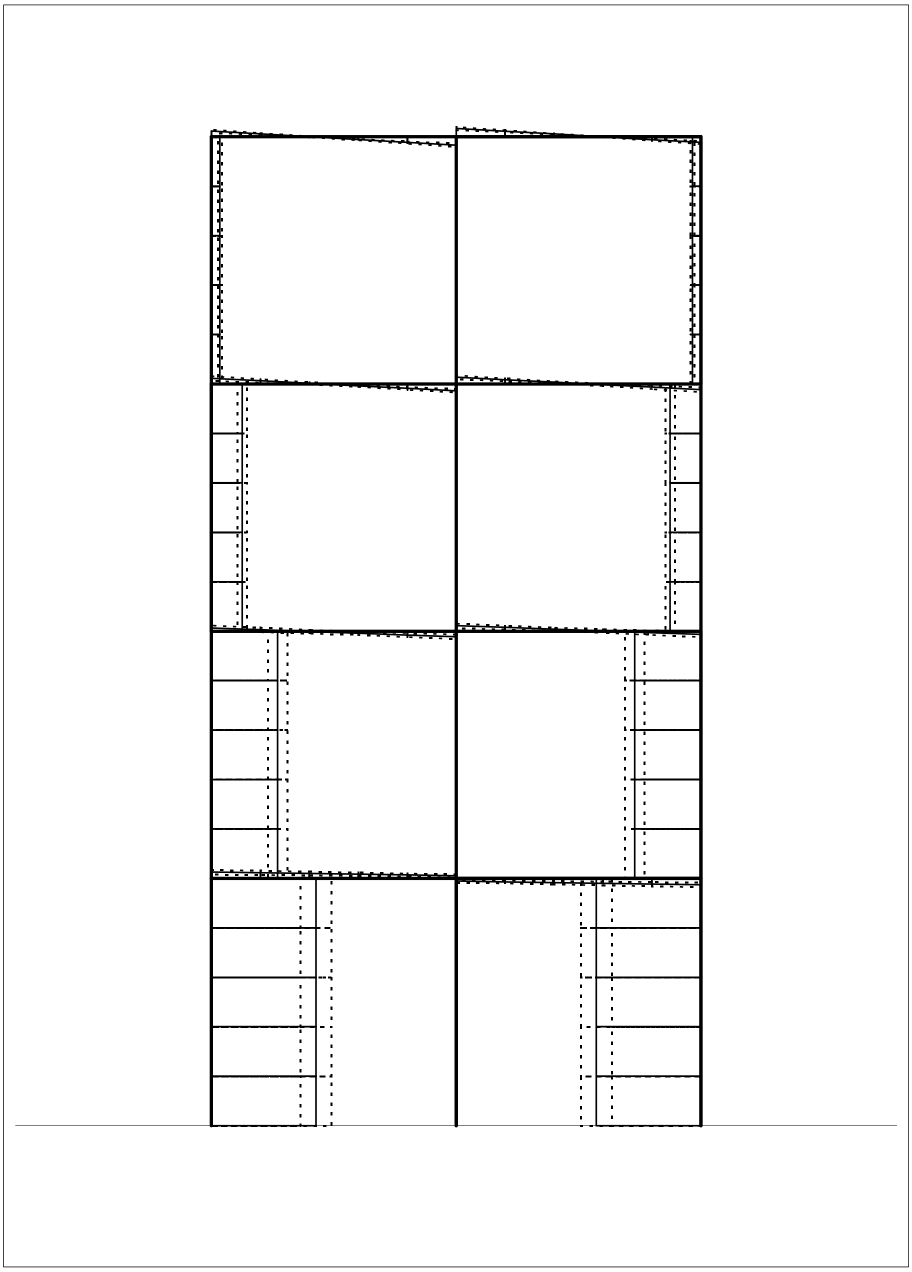

Figure 7: Průběh normálových sil

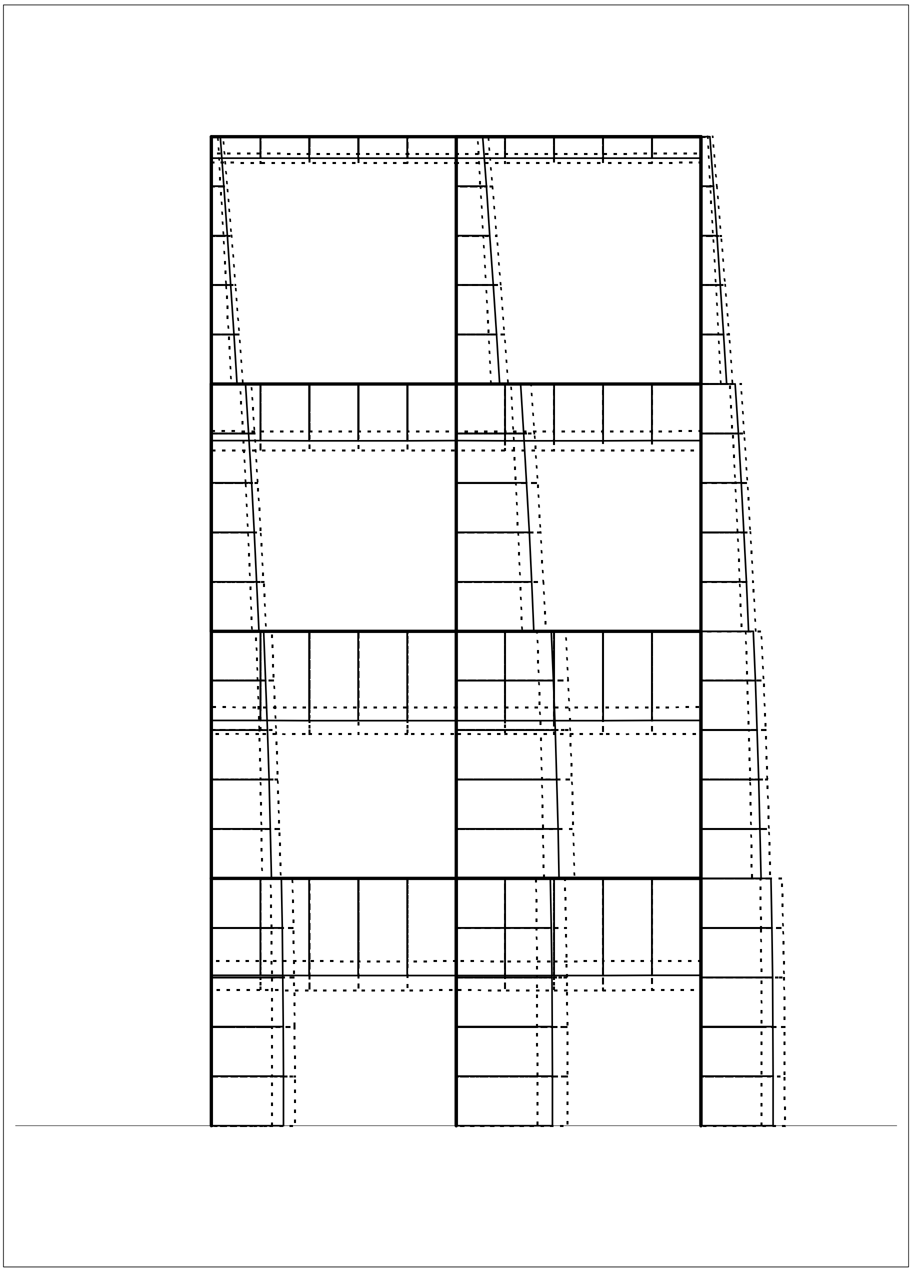

Figure 8: Průběh posouvajících sil

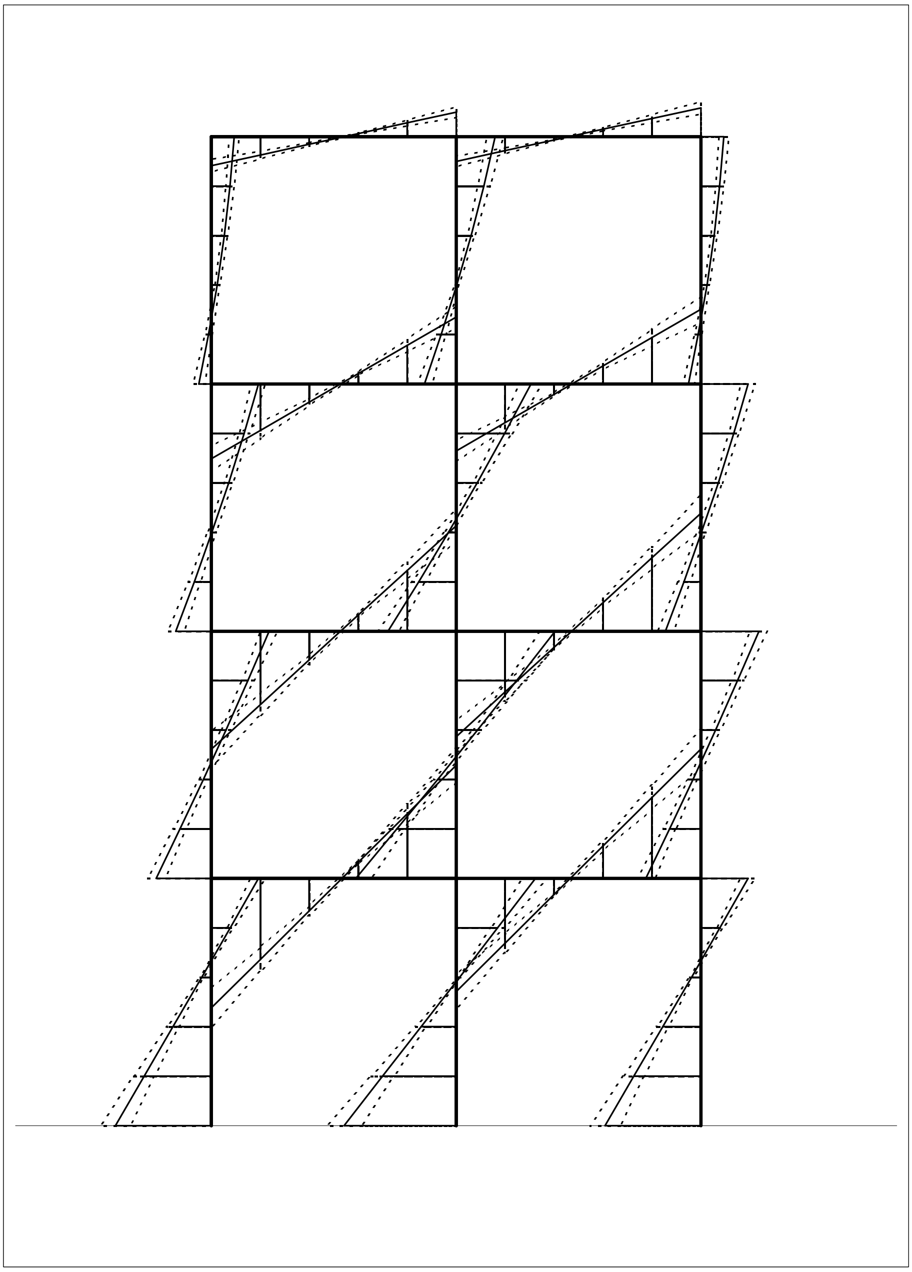

Figure 9: Průběh ohybových momentů