National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. **282**

MODEL OF TOTAL KNEE REPLACEMENT

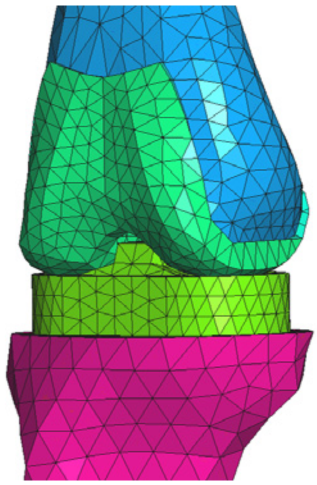
J. Křen[1], L. Hynčík[2], K. Koudela[3]

Summary: *The problem of the non-Newtonian fluid flow is solved. The basic equations are derived based on the Newtonian-fluid flow but using special constitutive equation for the viscosity. The spatial discretization is done using the finite element method (FEM). The algorithm is tested on a simple axial-symmetric flow in a horizontál tube and comparison to Newtonian fluid is stated. Application for the synovial fluid flow modeling in the total knee replacement is presented. The model is simplified as a planar model and the pressure distribution due to the interaction between femur and tibia in the synovial fluid is computed.*

1. Úvod

Totální náhrada kolenního kloubu (tzv. aloplastika) je metoda léčby těžce destruovaných kolenních kloubů, která má za sebou více než 120 let vývoje chirurgických technik, biomechanických konceptů a materiálových studií. Cílem tohoto snažení je co nejúplnější rekonstrukce funkce kolenního kloubu. Hlavními atributy jsou pohyb, stabilita a pochopitelně bezbolestnost. Nejčastějšími indikacemi pro implantaci totální náhrady je pokročilá artróza, destrukce kolenního kloubu při revmatoidní artritidě, tumoru a posttraumatických stavech.

Obrázek1 Aloplastika kolenního kloubu



Obrázek2 MKP model náhradního kloubu

[1] Prof. Ing. Jiří Křen, CSc.: Katedra mechaniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni; Univerzitní 22; 306 14 Plzeň; tel.: +420.377 632 317, fax: +420.377 632 302; e-mail: kren@kme.zcu.cz

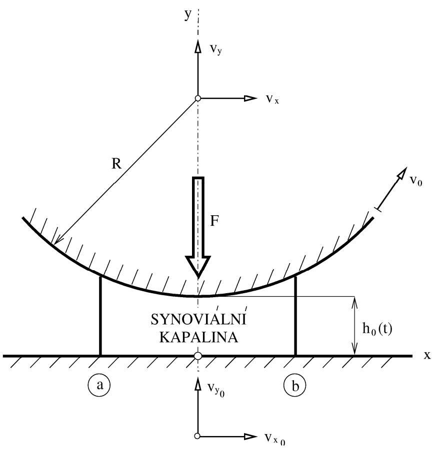
[2] Ing. Luděk Hynčík, Ph.D.: Katedra mechaniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni; Univerzitní 22, 306 14 Plzeň; tel.: +420.377 634 709, fax: +420.377 632 302; e-mail: hyncik3@ntc.zcu.cz

[3] Prof. MUDr. Karel Koudela, CSc.: Fakultní nemocnice Plzeň, Lékařská fakulta UK v Plzni; alej Svobody 80, 304 60 Plzeň; tel.: +420.377 103 953, fax: +420.377 103 942; e-mail: ortkanc@fnplzen.cz

Koleno je nejnamáhanějším a biomechanicky nejsložitějším kloubem lidského těla. Nesoustředné zakřivení kondylů femuru, relativně mělké štěrbiny kondylů tibie spolu s funkčním vlivem vazivového aparátu umožňují kolenu pohyby ve všech třech osách souřadnicového systému včetně rotací. Jedná se vždy o relativní pohyb ve vazbě femuru s tibií. Je zřejmé, že při modelování umělé náhrady kolenního kloubu musíme vyjít především z přirozené funkce fyziologického intaktního kloubu. Z pohledu matematického modelování aloplastiky kolenního kloubu se tedy musíme zajímat o kinematicko-geometrické poměry vazby femur-tibie (relativní pohyb), statické a dynamické namáhání tohoto komplexu (především femurotibiální kontaktní síla) a tribologické poměry umělé náhrady kolenního kloubu (kompletní kolenní náhrada je znázorněna na obr. 1, odpovídající MKP model náhrady je uveden na obr. 2).

2. Fyzikální model kolenní náhrady

Prostorový fyzikální model aloplastiky kolenního kloubu je znázorněn na obr. 2. S ohledem na složitost a komplikovanost řešení celého problému se v tomto příspěvku omezíme pouze na rovinný model aloplastiky. Pro posouzení tribologických poměrů náhrady můžeme přijmout rovinný model znázorněný na obr. 3. Tento model představuje rovinný problém dotyku dvou pružných válců, který je převeden, při zachování relativní křivosti, na model pružný válec a dokonale tuhá rovinná podložka (u intaktního kolena tento model dobře vyhovuje dotyku laterálních kondylů femuru a tibie). Pokud vyjdeme z teorie pružného poloprostoru zatíženého osamělou silou, tak tloušťku filmu synoviální kapaliny $h(x,t)$ v místě x můžeme vyjádřit ve tvaru (Křen, 1979)



Obrázek3 Rovinný model náhrady kolena

$$h(x,t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R} + w_2(x,t) + w_3(x,t), \quad (1)$$

kde $w_{2,3}(x,t)$ je deformace interagujících válců a R je poloměr křivosti náhradního válce. Vyjádříme-li tyto deformace na základě teorie pružného poloprostoru (šířka deformační plošky je podstatně menší než poloměry válců), tak získáme rozložení tloušťky synoviální kapaliny podél osy x ve tvaru (Křen, 1979)

$$h(x,t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R} + \frac{4}{\pi E}\int_a^b p(\xi,t) ln \frac{2\overline{b}}{|x-\xi|} d\xi, (2)$$

kde pro R a E platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}; \qquad \frac{1}{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2} + \frac{1-\nu_3^2}{E_3}\right).$$

Ve vztahu (2) je E náhradní (ekvivalentní) Yongův modul pružnosti, $p(\xi,t)$ je rozložení tlaku mezi válci ve stykové oblasti a funkce $h_0(t)$ je minimální vzdálenost tuhého válce od rovinné podložky, $2\overline{b}$ je šířka kondylů. Ještě podotkněme, že síla F (obr. 3) odpovídá femorotibiální síle, resp. je to síla, kterou je náhradní válec přitlačován k rovinné podložce a která je v rovnováze s výslednou tlakovou silou v synoviální kapalině. Velikost této síly se pohybuje v rozmezí cca 2,8 až 4,3 násobku vlastní tíhy lidského těla (v závislosti na pohybu – chůze, běh, chůze do schodů atd.; Rybka et al., 1993).

Kinematicko-geometrické poměry fyzikálního modelu kolenní náhrady samozřejmě vyplývají z pohybu fyziologického intaktního kolena. Přesné řešení této problematiky je však velmi složitým problémem, který by sám o sobě vyžadoval samostatné korektní řešení. Při definování pohybu kloubu se proto obvykle spokojujeme s odhadem potřebných kinematických závislostí. Geometrické poměry modelu v dotykové oblasti válců se však dají poměrně dobře definovat s tím, že buď vhodně přímo zvolíme aproximační křivky spoluzabírajících kondylů femuru a tibie (např. elipsa a kružnice) nebo např. využijeme sagitálního rentgenového snímku kolene a nebo provedeme 3D naskenování komponent aloplastiky. Potom odměříme vybrané body obrysů kondylů a příslušnou množinu bodů proložíme regresními křivkami (můžeme např. použít Bézierovy-Bernsteinovy polynomy). Podmínku záběru křivek komponent kolena je potom možné vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{T}_{12}\,{}^{C}\boldsymbol{r}_2(u) = \boldsymbol{T}_{13}\,{}^{D}\boldsymbol{r}_3(v)\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{r}_{1f}(u)}{du} = \lambda\,\frac{d\boldsymbol{r}_{1g}(v)}{dv}\,, \tag{3}$$

kde $C = D$ je dotykový bod zabírajících křivek, $\boldsymbol{T}_{ij}$ jsou příslušné transformační matice (transformace z prostoru j do i) a $\boldsymbol{r}_j$ jsou polohové vektory bodů C a D v příslušném prostoru. Druhý člen potom vyjadřuje společnou tečnu křivek v dotykovém bodě. Vztahy (3) představují soustavu čtyř nelineárních transcendentních rovnic pro neznámé parametry $u(\varphi)$, $v(\varphi)$, $\psi(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$, kterou řešíme např. Newtonovou-Raphsonovou metodou. Na základě znalosti křivek $\boldsymbol{r}_{1f}(u)$ a $\boldsymbol{r}_{1g}(v)$ můžeme potom definovat jejich křivosti.

3. Proudění nenewtonských kapalin

Další úlohou řešení uvedeného problému tribologie kolenní náhrady je určení rozložení tlaku v synoviální kapalině. Rozložení tlaku v této kapalině je vstupem do rovnice (2) a přímo se podílí na deformaci náhradního válce. Úloha se však poněkud komplikuje, neboť synovie je nenewtonskou kapalinou, tj. její dynamická viskozita je obecně funkcí smykové rychlosti, resp. tenzoru rychlosti deformace (např. Fung, 1990).

Řídící rovnice pro řešení hydrodynamických úloh nenewtonských kapalin jsou odvozeny ze stejných principů mechaniky jako proudění Newtonovy kapaliny. Při izotermickém proudění těchto kapalin se zřejmě bude nakonec jednat o rovnici kontinuity (bilance hmotnosti) a o Navierovu-Stokesovu rovnici, která vyjadřuje bilanci hybnosti na úrovni jednotkového objemu kapaliny. Respektování konkrétního typu vlastností kapaliny je potom vyjádřeno příslušným konstitutivním vztahem. Samozřejmě tento systém rovnic musí být obecně doplněn příslušnými počátečními a okrajovými podmínkami.

Uvažujme pro jednoduchost izotermické, laminární a nestacionární proudění nestlačitelné nenewtonské kapaliny. Při odvození pohybové rovnice této kapaliny vyjdeme např. z 1. impulsové věty pro soustavu hmotných bodů, která musí platit i v rámci mechaniky kapalin. Platí tedy (D/Dt materiálová derivace, $\Delta\Omega \subset \Omega$ - oblast proudění kapaliny)

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Delta\Omega}\rho v_i dV = F_i\,, \tag{4}$$

kde ρ je měrná hmotnost kapaliny, F_i jsou složky vektoru výsledné vnější síly působící na příslušný objem kapaliny (objemové a povrchové síly), v_i jsou složky vektoru rychlosti. Za předpokladu, že element hmotnosti $dm = \rho dV$ nezávisí na čase, můžeme rovnici (4) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Delta\Omega}\rho v_i dV = \int_{\Delta\Omega}\rho\frac{Dv_i}{Dt}dV = \int_{\Delta\Omega}\rho a_i dV\,. \tag{5}$$

Zde a_i je zřejmě složka vektoru výsledného zrychlení uvažovaného elementu dm kapaliny, pro kterou platí (x_j - Eulerovy souřadnice)

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,. \tag{6}$$

Vyjádříme-li dále složky vnější síly kontinua ve tvaru (objemové a povrchové síly)

$$F_i = \int_{\Delta\Omega}\rho f_i dV + \int_{\partial\Delta\Omega}\tau_{ij}n_j dS \tag{7}$$

a budeme-li na druhý člen tohoto vztahu aplikovat Gaussovu-Ostrogradského větu, tak můžeme pohybovou rovnici (4) vyjádřit ve tvaru

$$\int_{\Delta\Omega}\rho a_i dV = \int_{\Delta\Omega}\rho f_i dV + \int_{\Delta\Omega}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}dV\,, \tag{8}$$

resp. po dosazení za a_i ze vztahu (6) a se zohledněním, že tato pohybová rovnice platí pro libovolnou oblast $\Delta\Omega$, dostáváme základní tvar Navierovy-Stokesovy rovnice. Platí

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\, v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\,. \tag{9}$$

U uvažovaného kontinua musíme dále vyjádřit bilanci hmotnosti. Příslušnou rovnici kontinuity píšeme v obecném tvaru, tj. platí (např. Křen & Rosenberg, 2002)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0\,. \tag{10}$$

Pro další řešení je nutno předpokládat, že známe konstitutivní vztah uvažované nenewtonské kapaliny. Při psaní základního tvaru konstitutivního vztahu je přirozené vyjít z modelu Newtonovy kapaliny. Tuto relaci zapíšeme obecně ve tvaru

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}\,, \tag{11}$$

kde $T_{ij} = T_{ij}(v_i)$ je disipační část tenzoru napjatosti (také se používají termíny přídavné napětí, zvláštní napětí) a tento tenzor je jistou funkcí rychlostního pole kapaliny, resp. smykové rychlosti.

Omezme se dále na řešení nestacionárního, izotermického a laminárního proudění nestlačitelné vazké nenewtonské kapaliny s konstantní měrnou hmotností ($\rho = konst.$). Po dosazení konstitutivního vztahu (11) do pohybové rovnice (9) je takto definovaná úloha hydromechaniky popsána následujícím systémem rovnic a podmínek:

Navierova-Stokesova rovnice

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\, v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i\,, \qquad t \in (0,T),\ x \in \Omega\,; \tag{12}$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0\,, \qquad t \in (0,T),\ x \in \Omega\,; \tag{13}$$

okrajové a počáteční podmínky

$$\begin{aligned} v_i(x,t) &= \hat{v}_i(x,t)\,, & t &\in (0,T),\ x \in \partial\Omega_1\,;\\ \tau_{ij} n_j &= (-p\delta_{ij} + T_{ij}) n_j = \hat{\sigma}_i\,, & t &\in (0,T),\ x \in \partial\Omega_2\,;\\ v_i(x,0) &= {}^0\hat{v}_i(x)\,, & t &= 0\,,\ x \in \Omega\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Zde stříška označuje danou veličinu a $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ jsou disjunktní části hranice ($\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$) oblasti Ω. Neznámé v takto definované úloze jsou $\{ v_i(x,t), p(x,t)\}$ a řešíme tzv. smíšenou úlohu (rychlost i tlak v kapalině řešíme současně).

Pro odvození slabého řešení uvedené úlohy hydromechaniky budeme aplikovat Galerkinovu metodu. Za předpokladu, že testovací funkce $\delta v_i, \delta p \subset W_0^{1,2}$ jsou definovány na uzávěru oblasti $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, tak výchozí integrální identity Galerkinovy metody mají tvar

$$\int_\Omega \left[\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i \right] \delta v_i dx = 0\,, \qquad \int_\Omega \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0\,, \tag{15}$$

resp. po úpravě pomocí Greenovy věty (třetí a čtvrtý člen v hranaté závorce) přejdou tyto integrální identity do tvaru

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta v_i dx + \int_\Omega \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_\Omega p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_\Omega T_{ij} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \rho f_i \delta v_i dx + \int_{\partial\Omega_2} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx\,, \tag{16}$$

$$\int_\Omega \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0\,. \tag{17}$$

Další řešení je již jednoznačně závislé na volbě vlastního nelineárního konstitutivního vztahu, tj. jakou funkci přídavného napětí $T_{ij} = T_{ij}(v_i)$ použijeme u příslušné nenewtonské kapaliny. Přímo se přirozeně nabízí použít formálně stejný konstitutivní vztah, který se aplikuje u Newtonovy kapaliny. V této spojitosti se potom hovoří o tzv. ***zobecněné newtonské kapalině***, jejíž nelineární konstitutivní vztah se uvažuje ve tvaru (např. Böhme, 2000)

$$T_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma}) D_{ij}\,, \tag{18}$$

kde $D_{ij} = 1/2(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ je tenzor rychlosti deformace a $\dot{\gamma}^2 = 2tr[D_{ij}]^2$ je smyková rychlost kapaliny. Nedílnou součástí tohoto konstitutivního vztahu je znalost funkce viskozity $\eta = \eta(\dot{\gamma})$, která se odvozuje z výsledků experimentálního měření na viskozimetrech. Velmi rozšířeným modelem je tzv. mocninový model kapaliny, kdy se funkce viskozity obvykle volí ve tvaru (např. Lai et al., 1993, Pnuli & Gutfinger, 1992)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 I_2^{n-1} , \tag{19}$$

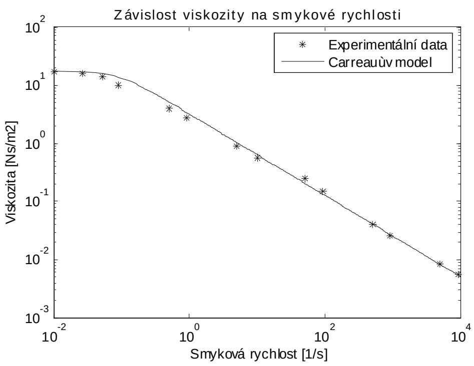
kde η_0 je konstantní složka viskozita (konzistentní faktor), n je index mocniny (vyjadřuje odchylku od Newtonovy kapaliny, pro kterou zřejmě platí $n = 1$) a $I_2 = 1/2 D_{ij} D_{ij}$ je druhý invariant tenzoru rychlosti deformace (1. invariant je nulový, závislost na 3. invariantu nebyla zjištěna, resp. u rovinného proudění se závislost na 3. invariantu neprojeví).

Zabývejme se dále pouze modelem zobecněné newtonské kapaliny. Dosadíme-li konstitutivní vztah (18) do integrální identity (16), dostaneme slabé řešení uvažované úlohy hydomechaniky nenewtonské kapaliny ve tvaru

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta v_i dx + \int_\Omega \rho v_j^* \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta v_i dx - \int_\Omega p \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \eta(\dot{\gamma}^*) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} dx = \\ &= \int_\Omega \rho f_i \delta v_i dx + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i \delta v_i dx ; \qquad \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p \, dx = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

4. Proudění synoviální kapaliny

Další úlohou řešení uvedeného problému tribologie kolenní náhrady je určení rozložení tlaku v synoviální kapalině. Z matematického hlediska se jedná o řešení silně vázané úlohy interakce nenewtonské kapaliny s poddajným válcem a s volnou hranicí interagujících kontinuí (obr. 3, neznáme polohu hranice a,b kapaliny, neznáme dopředu deformaci náhradního válce – hranice interakce). Hned zde poznamenejme, že vlastní úlohu interakce řešíme nesdruženou metodou.



Obrázek4 Funkce viskozity synoviální kapaliny

Při řešení úlohy proudění synoviální kapaliny v modelu kolena (obr. 3) vyjdeme ze slabého řešení problému (20) a ze známého konstitutivního vztahu synoviální kapaliny. Pro další řešení je tedy nutno znát funkci viskozity $\eta(\dot{\gamma})$ synoviální kapaliny. Zde se často využívají dvě čtyřparametrické funkce, které jsou známé pod názvy Carreauův (η_0 = 35 N s m^{-2}, η_∞ = 0, $\dot{\gamma}_c$ = 0.09 s^{-1}, m = 0.35) a Crossův (η_0 = 24 N s m^{-2}, η_∞ = 0, $\dot{\gamma}_c$ = 0.05 s^{-1}, m = 0.7) model synoviální kapaliny (obr. 4). Funkce viskozity mají tvar (Fung, 1993)

Carreauův model: Crossův model:

$$\eta = \eta_\infty + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty)}{\left(1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_C)^2\right)^{m/2}} \; ; \qquad \eta = \eta_\infty + \frac{(\eta_0 - \eta_\infty)}{1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_C)^m} . \tag{21}$$

Dále je nutno ještě doplnit okrajové podmínky (14). Upřesněné okrajové podmínky mají pro uvažovaný model kolenní náhrady (obr. 3) tvar (nadále předpokládáme $\rho = konst.$)

$$\begin{gathered} v_i(x,t) = \hat{v}_i(x,t), \qquad t \in (0,T),\; x \in \partial\Omega_1 ; \\ \tau_{ij} n_j = (-p\delta_{ij} + T_{ij}) n_j = \hat{\sigma}_i , \quad \text{resp.} \quad p\big|_{x=a} = p\big|_{x=b} = \left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=b} = 0 , \qquad t \in (0,T),\; x \in \partial\Omega_2 . \end{gathered} \tag{22}$$

5. Prostorová a časová diskretizace problému

Nyní provedeme prostorovou diskretizaci oblasti vyplněné synoviální kapalinou pomocí MKP. Omezíme se přímo na rovinné proudění synoviální kapaliny. Při použití izoparametrických interpolačních funkcí jsou složky rychlosti ($v_1 = u, v_2 = v$) a tlak p aproximovány vztahy (např. Křen et al., 2001)

$$\begin{gathered} u(\xi,\eta,t) = \boldsymbol{N}^T(\xi,\eta)\boldsymbol{u}(t); \qquad \mathrm{v}(\xi,\eta,t) = \boldsymbol{N}^T(\xi,\eta)\boldsymbol{v}(t); \\ \mathrm{p}(\xi,\eta,t) = \boldsymbol{H}^T(\xi,\eta)\,\boldsymbol{p}(t), \end{gathered} \tag{23}$$

kde $\boldsymbol{N}$ (kvadratické funkce) a $\boldsymbol{H}$ (lineární funkce) jsou sloupcové matice interpolačních funkcí definované lokálně pro každý element a $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}$ jsou sloupcové matice uzlových hodnot složek rychlosti a tlaku. Dosazením diskretizace (23) do vztahů (20) získáme tři systémy rovnic, které zapíšeme v maticovém tvaru ($\rho = konst.$, konstrukce příslušných matic je evidentní z výše uvedených vztahů). Platí

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_1\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{p} = \boldsymbol{E}_1 , \\ &\boldsymbol{A}_1\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{p} = \boldsymbol{E}_2 , \\ &\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{24}$$

Vyjádříme-li dále časovou změnu rychlosti pomocí dopředného diferenčního schématu

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t}; \qquad \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} , \tag{25}$$

můžeme předchozí soustavu rovnic (24) zapsat v kompaktním maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{K}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}^{(n+1)} = \Delta t \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{(n+1)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{(n)}, \tag{26}$$

kde n je časová hladina a tento maticový zápis představuje soustavu nelineárních algebraických rovnic, kterou řešíme Newtonovou-Raphsonovou metodou na každé časové hladině. Dosud nedefinované matice ve vztahu (26) mají tvar

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \Delta t(1-\beta)\left[\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^{(n+1)} + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)^{(n+1)}\right], \quad \boldsymbol{B} = \Delta t(1-\beta)\boldsymbol{C}_1, \quad \boldsymbol{C} = \Delta t(1-\beta)\boldsymbol{C}_2,$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \left\{\boldsymbol{A}_1 - \Delta t\beta\left[\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^{(n)} + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)^{(n)}\right]\right\}\boldsymbol{u}^{(n)} - \Delta t\beta\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{p}^{(n)}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \left\{\boldsymbol{A}_1 - \Delta t\beta\left[\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^{(n)} + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)^{(n)}\right]\right\}\boldsymbol{v}^{(n)} - \Delta t\beta\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{p}^{(n)}$$

a součinitel β nabývá hodnot

$$\beta = \begin{cases} 0 & pro \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(n+1)}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(n+1)}, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{(n+1)}; \\ \dfrac{1}{2} & pro \quad \boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{u}^{(n+1)} + \boldsymbol{u}^{(n)}}{2}, \boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{v}^{(n+1)} + \boldsymbol{v}^{(n)}}{2}, \boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{p}^{(n+1)} + \boldsymbol{p}^{(n)}}{2}; \\ 1 & pro \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(n)}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(n)}, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{(n)}. \end{cases} \tag{28}$$

Při zkráceném zápisu soustavy rovnic (26) ve tvaru ($\boldsymbol{x}$ reprezentuje vektor neznámých úlohy proudění)

$$\boldsymbol{K}^{(n+1)}\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{f}^{(n)}, \tag{29}$$

je iterační postup výpočtu řízen vztahy (n – časová hladina, r – iterační krok uvnitř aktuální časové hladiny)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(n+1),(r+1)} &= \boldsymbol{x}^{(n+1),(r)} - \boldsymbol{J}^{-1}_{(n+1),(r)}\boldsymbol{R}^{(n+1),(r);(n),(0)}, \\ \boldsymbol{R}^{(n+1),(r);(n),(0)} &= \boldsymbol{K}^{(n+1),(r)}\boldsymbol{x}^{(n+1),(r)} - \boldsymbol{f}^{(n),(0)}, \end{aligned} \tag{30}$$

tj. rychlosti a tlaky ve vektoru $\boldsymbol{f}^{(n)(0)}$ jsou „konstanty“ napočtené z koncových hodnot v předchozí časové hladině a v průběhu iterace na aktuální časové hladině se nemění. Jacobiova matice má potom tvar

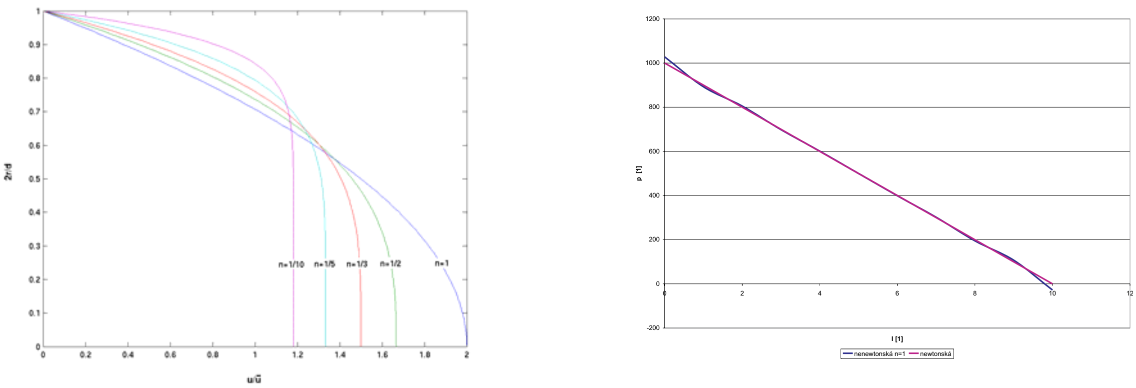
$$\boldsymbol{J}^{(n+1),(r)} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{A}}_u & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{0} & \overline{\boldsymbol{A}}_v & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{K}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

kde $$\overline{\boldsymbol{A}}_u = \boldsymbol{A}_1 + \Delta t(1-\beta)\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)^{(n+1)(r)} + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial \boldsymbol{u}^{*T}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial \boldsymbol{v}^{*T}}\right)\boldsymbol{u}^{(n+1)(r)} + \\ + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)^{(n+1)(r)} + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial \boldsymbol{u}^{*T}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial \boldsymbol{v}^{*T}}\right)\boldsymbol{u}^{(n+1)(r)} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_v = \boldsymbol{A}_1 + \Delta t(1-\beta)\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*)^{(n+1)(r)} + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial \boldsymbol{u}^{*T}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial \boldsymbol{v}^{*T}}\right)\boldsymbol{v}^{(n+1)(r)} + \\ + \boldsymbol{D}_1(\dot{\gamma}^*)^{(n+1)(r)} + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial \boldsymbol{u}^{*T}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial \boldsymbol{v}^{*T}}\right)\boldsymbol{v}^{(n+1)(r)} \end{array}\right]. \qquad (32)$$

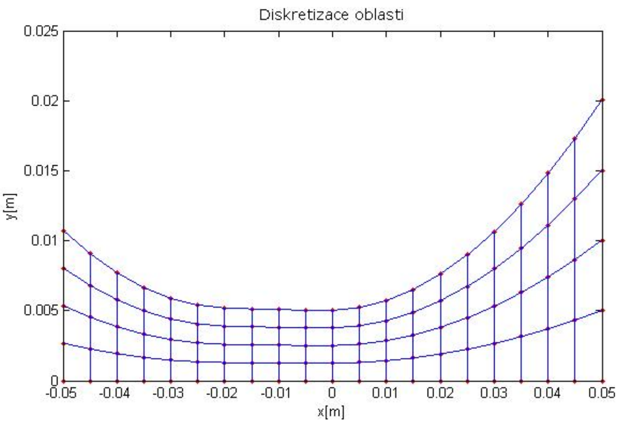
6. Numerické řešení modelových úloh

Podle výše uvedeného postupu řešme nejdříve proudění nenewtonské kapaliny v tuhé trubce. Numerické výsledky získané pro laminární, stacionární a izotermické proudění vazké kapaliny jsou graficky znázorněné na obr. 5 (validace a verifikace metody řešení).

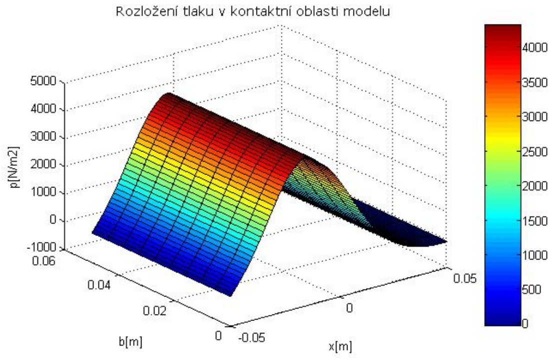


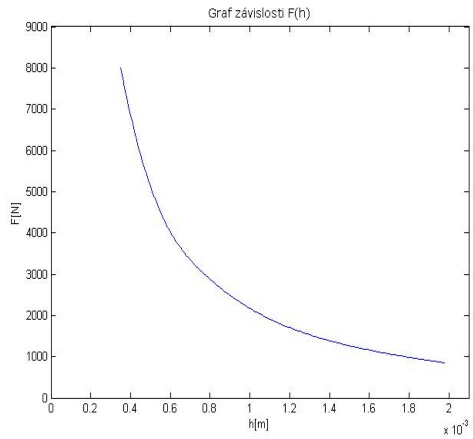
Obrázek5 Rozložení rychlosti (vlevo) a tlaku (vpravo), proudění v trubce

Dle výše uvedeného postupu řešíme dále problém interakce synoviální kapaliny (synovie) s deformovatelným válcem náhradního modelu (obr. 3, femorotibiální spojení v kolenním kloubu). Tento problém interakce řešíme nesdruženou metodou, jejíž algoritmus se rozpadá na relativně samostatné řešení proudění synoviální kapaliny a na řešení deformace válce. Dosažené ilustrativní výsledky na vybrané časové hladině jsou graficky zpracovány na obr. 6 až obr. 8.



Obrázek6 Tloušťka mazací vrstvy synovie





Obrázek7 Rozložení tlaku v kontaktní oblasti

Obrázek8 Závislost síly $F(h_0)$

Při řešení je respektována změna dynamické viskozity synovie a je hledána poloha náhradního válce tak, aby byla splněna podmínka nulové derivace tlaku na výstupu z kanálu modelu totální náhrady kolenního kloubu (aloplastiky). Ilustrativní výsledky jsou graficky zpracovány pro člověka o hmotnosti 70 kg, který kráčí pomalou chůzí ($\omega = 3$ rad/s, $v_x = v_y = 0$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$).

7. Poděkování

Příspěvek byl vypracován za podpory výzkumného záměru MŠMT ČR, který je registrován pod číslem **MSM 4977751303**.

8. Literatura

Böhme, G. (2000) *Strömungsmechanik nichtnewtonscher Fluide*. Teubner Studienbücher, Stuttgart.

Fung, Y. C. (1990) *Biomechanics: motion, flow, stress and growth*, Springer-Verlag, New York

Křen, J. (1979) *Příspěvek k řešení reálné vyšší kinematické dvojice*, Vydavatelství VŠSE, Plzeň.

Křen, J., Rosenberg, J. (2002) *Mechanika kontinua*. Vydavatelství ZČU, Plzeň.

Křen, J., Rosenberg, J., Janíček, P. (2001) *Biomechanika*, Vydavatelství ZČU, Plzeň.

Lai, W. M., Rubin, D., Krempl, E. (1993) *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press Ltd., Oxford.

Pnuli, D., Gutfinger, Ch. (1992) *Fluid Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Rybka, V., Vavřík, P., a kol. (1993) *Aloplastika kolenního kloubu*, ARCADIA, Praha.