im 2006
National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. 286

ANALYSIS OF FOUNDATION SLAB OF ADMINISTRATION BUILDING PRAHA TĚŠNOV: HEAT AND MOISTURE TRANSFER

T. Krejčí, T. Koudelka*

Summary: *In this paper, we present computer simulation results of a concrete slab behavior in an early stage. The foundation slab is situated in the basement of the administration building Těšnov. The Künzel and Kiessl`s model was used to analyze heat and moisture fields and was extended by a set of climatic conditions and by a model of hydration heat evolution in concrete.*

1. Úvod

Uplatnění numerických metod popisujících přenos tepla a vlhkosti v porézních materiálech je široké. Zahrnuje problémy, jako jsou obnova a využití energetických zdrojů, likvidace a ukládání jaderného odpadu, bezpečnost a životnost významných, zpravidla železobetonových staveb, oblast zakládání staveb a podzemních konstrukcí a mnoho dalších.

Zmiňované numerické modely jsou využívány zejména pro určení rozložení teplotního a vlhkostního pole ve stavebních konstrukcích a pro stanovení fyzikálních vlastností materiálů. Jedná se například o určení tepelně technických vlastností obvodových plášťů budov, modelování hydratace a stárnutí betonu (dotvarování a smršťování) nebo o odezvu konstrukcí vystavených vysokým teplotám během požáru.

2. Numerické řešení přenosu tepla a vlhkosti

Transportní problémy se obecně řeší jako sdružené nelineární úlohy, které vyžadují simultánní numerickou integraci tří skupin rovnic. První skupinu transportních rovnic tvoří Fickův, Darcyho a Fourierův zákon, druhou bilanční rovnice, třetí rovnice materiálové (retenční vztahy). Diskretizací transportního problému pomocí metody konečných prvků dostáváme systém nelineárních a nesymetrických rovnic. Lze ukázat, že je vhodné rozšířit numerické řešení soustavy rovnic o Newtonovu – Raphsonovu metodu pro nelineární soustavu rovnic. Zejména pokud mají materiálové vlastnosti silně nelineární závislost. Tento fakt výrazně zvyšuje nároky nejen na počítačové zpracování, ale i na hardware počítače (rychlost procesoru, velikost paměti). Mění se způsob ukládání matic v systému algebraických rovnic, mění se způsob jejich řešení a narůstá doba výpočtu. Jako velmi výhodné řešení se ukazuje použití paralelního programování [Kruis, 2005].
Pro numerickou simulaci byl použit fenomenologický model podle Künzela a Kiessla [Künzel, Kiessl, 1997], který zavádí v materiálovém bodě dvě neznámé veličiny φ – relativní vlhkost (-) a T – absolutní teplotu (K). Výhodou modelu je jeho použití při analýze stavebních

* Ing. Tomáš Krejčí, Ph.D., Ing. Tomáš Koudelka: Fakulta stavební Českého vysokého učení technického v Praze; Thákurova 7; 166 29 Praha 6; tel.: +420.224 354 309, fax: +420.224 310 775; e-mail: krejci@cml.fsv.cvut.cz

konstrukcí za běžných klimatických podmínek a snadné a rychlé uplatnění fyzikálních vlastností materiálů zjištěných v laboratoři. Tento model byl uplatněn v programu pro řešení metodou konečných prvků a rozšířen o model vývinu hydratačního tepla v betonu a o statisticky zpracovaný soubor klimatických podmínek pro Prahu (zdroj ČHMÚ). Dále byl využit ve spojení s Bažantovým B3 modelem popisujícím dotvarování a smršťování betonu ve sdružené tepelně-vlhkostně-mechanické analýze. Jedná se o částečně sdruženou úlohu (angl. staggered algorithm), kde jsou v každém časovém kroku přenášena data z tepelně-vlhkostní části do části mechanické.

2.1 Řešení sdružené úlohy vedení tepla a vlhkosti metodou konečných prvků

Na bilanční rovnice a příslušné okrajové podmínky aplikujeme Galerkinovu metodu. Pro potřeby metody konečných prvků (MKP) upravíme výsledné integrály pomocí Gaussovy věty. V MKP aproximujeme teplotu T a rel. vlhkost h po prvcích ve tvaru:

$$T = \boldsymbol{N}_T \boldsymbol{r}_T, \qquad h = \boldsymbol{N}_h \boldsymbol{r}_h \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{N}$ je matice bázových funkcí a $\boldsymbol{r}$ je vektor uzlových hodnot teploty a vlhkosti. Po dosazení aproximace (1) do předmětných rovnic a po malých úpravách dostáváme soustavu nelineárních diferenciálních rovnic pro sdružený problém vedení tepla a vlhkosti v maticovém tvaru:

$$\boldsymbol{K} + \boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{q} \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{K}$ je zobecnělá nesymetrická matice vodivosti a $\boldsymbol{C}$ je zobecnělá nesymetrická matice kapacity.

Pro časovou diskretizaci použijeme lineární aproximaci vektoru $\boldsymbol{r}$ a vektoru pravé strany $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{r}(t) = \tau\boldsymbol{r}_i + (1-\tau)\boldsymbol{r}_{i-1}, \qquad \boldsymbol{q}(t) = \tau\boldsymbol{q}_i + (1-\tau)\boldsymbol{q}_{i-1}\ . \tag{3}$$

Dále vypočteme derivaci

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}), \tag{4}$$

kterou uplatníme společně s aproximací (3) v rovnici (2):

$$\left[\boldsymbol{K}\tau + \frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t}\right]\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{q}_{i-1}(1-\tau) + \boldsymbol{q}_i\tau + \left[\frac{\boldsymbol{C}}{\Delta t} - \boldsymbol{K}(1-\tau)\right]\boldsymbol{r}_{i-1}. \tag{5}$$

Veličiny na pravé straně jsou známé. S ohledem na stabilitu řešení používáme schéma Cranck-Nicholsonové (τ= 0,5).

2.2 Dotvarování a smršťování betonu ovlivněné změnou teploty a vlhkosti

Dotvarování betonu se řídí Boltzmannovým principem superpozice, kde je vyjádřena deformace v závislosti na napětí integrální rovnicí

$$\varepsilon(t) = J(t,t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^{t} J(t,\tau)\mathrm{d}\sigma(\tau) + \varepsilon^0(t). \tag{6}$$

Funkce poddajnosti lineárního viskoelastického materiálu J vyjadřuje deformaci v čase t od jednotkového napětí $\sigma = 1$ působícího od času τ. Člen ε^0 zastupuje jiné deformace než od napětí (např. smršťování, teplotní deformace apod.).

Podle B3 modelu [Bažant, Baweja,1995] relativní vlhkost a teplota ovlivňují dotvarování a smršťování dvěma způsoby. Přímo, změnou koeficientu viskozity v konstitutivním modelu, a nepřímo, ovlivněním rychlosti hydratace (stárnutí) betonu. Funkce dotvarování a relaxace J a R uvažujeme ve vhodném tvaru degenerovaných jader příslušných integrálních rovnic (Dirichletových - Pronyho řad)

$$J(t,\tau) = \sum_{\mu=1}^{M} \frac{1}{D_\mu(\tau)} \left\{1 - \exp\left[y_\mu(\tau) - y_\mu(t)\right]\right\} \tag{7}$$

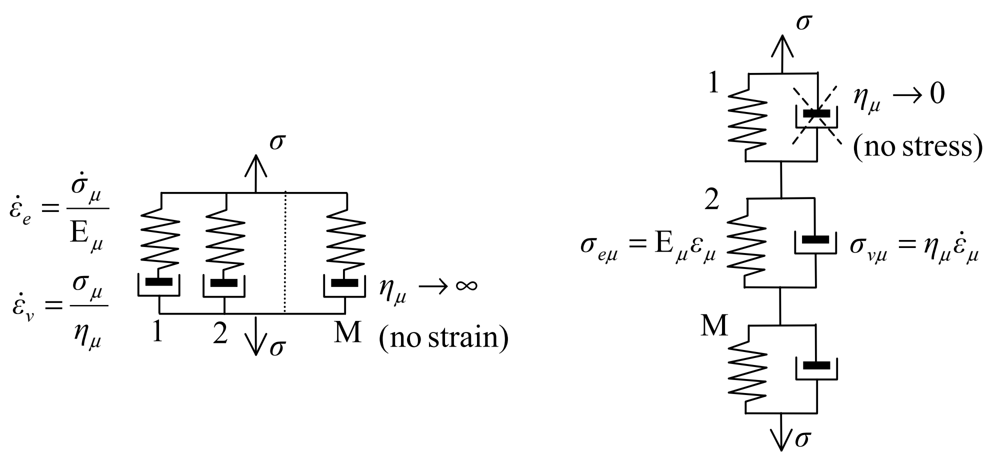
$$R(t,\tau) = \sum_{\mu=1}^{M} E_\mu(\tau) \exp\left[y_\mu(\tau) - y_\mu(t)\right] \tag{8}$$

Jednoosá analýza dotvarování vychází z relaxační funkce popisující Maxwellův reologický řetězec.

$$\sigma = \sum_{\mu=1}^{M} \sigma_\mu \tag{9}$$

$$\dot{\sigma}_\mu + \dot{y}_\mu \sigma_\mu = E_\mu(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0) \tag{10}$$

$$\dot{y}_\mu(t) = E_\mu(t)/\eta_\mu(t) \tag{11}$$



Obr. 1 Maxwellův a Kelvinův reologický řetězec

Zmiňované přímé ovlivnění míry dotvarování teplotou T a vlhkostí h může být v řetězci popsáno následujícím vztahem

$$\frac{1}{\eta_\mu(t_e)} = \frac{\phi_T \phi_h}{\tau_\mu E_\mu(t_e)}, \qquad \mu = 1,2,\dots,M. \tag{12}$$

Efekt teploty vychází z konceptu aktivační energie

$$\phi_T = \exp\left[\frac{u_c}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right], \qquad u_c / R = 5000\text{K}, \tag{13}$$

kde u_c je aktivační energie dotvarování. Efekt vlhkosti vyjadřuje empirický vztah

$$\phi_h = \alpha_h + (1-\alpha_h)h^2, \qquad \alpha_h \approx 0.1 \div 0.5. \tag{14}$$

Celkové smrštění uvažujeme jako součet tří složek: “drying shrinkage” (smrštění od vysychání a nasákání), ε_s, autogenní smrštění, ε_s^a (objemové změny během chemických procesů v průběhu hydratace), a karbonatační smrštění, ε_s^c (způsobené reakcí hydroxidu vápenatého cementové pasty se vzdušným oxidem uhličitým). Jak autogenní, tak karbonatační smrštění jsou malá ($\varepsilon_s^a \leq 0.05 \max.\varepsilon_s$) a mohou být zanedbána. Navíc oxid uhličitý proniká do hloubky pouze 1mm od povrchu. Přetvoření ε_0 ovlivněné změnou teploty a vlhkosti se tedy skládá ze dvou částí:

- vliv vysychání a nasákání

$$\dot{\varepsilon}_s = \boldsymbol{k}\dot{h} \tag{15}$$

- vliv teploty

$$\dot{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\alpha}\dot{T} \tag{16}$$

kde

$$\boldsymbol{k} = \dot{\varepsilon}_s^0 \psi\left(\boldsymbol{m} + r\boldsymbol{\sigma} sign(\dot{H})\right), \qquad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_0\left(\boldsymbol{m} + \rho\boldsymbol{\sigma} sign(\dot{H})\right), \tag{17}$$

$-(\varepsilon_s^0) = 0.0002 \div 0.001$ a α_0 jsou empirické konstanty, $-(\psi) = E(t_0)/E(t_e)3h^2$ pro $0.4 \leq h \leq 0.99$, kde $\dot{H} = \dot{h} + c\dot{T}$ (c je nezáporná konstanta). Empirického koeficienty r a ρ nabývají obvykle hodnot $r = (0.1 \div 0.6)/ f_t'(\text{MPa}^{-1}), \rho = (1 \div 2)/ f_t'(\text{MPa}^{-1})$, kde f_t' je pevnost v tahu.

Zbytková tahová napětí produkují velmi jemné trhlinky (smeared cracking strain). O rozestřeném modelu podrobněji pojednává navazující příspěvek „Analýza základové desky administrativní budovy Praha Těšnov: mechanické chování“.

Řešení probíhá v časových přírůstcích. Pro přírůstkový konstitutivní vztah [Krejčí, 2003] máme vyjádření

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \hat{E}_i \hat{\boldsymbol{D}} \left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{k}\Delta h - \boldsymbol{\alpha}\Delta T - \Delta\boldsymbol{\xi} \right). \tag{18}$$

Ve vztahu (18) vyjadřují $\hat{E}_i \hat{\boldsymbol{D}}$ matici okamžité materiálové tuhosti,

h, T - vlhkost, resp. teplotu,

$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\alpha}$ - vektory koeficientu smršťování, resp. teplotní roztažnosti,

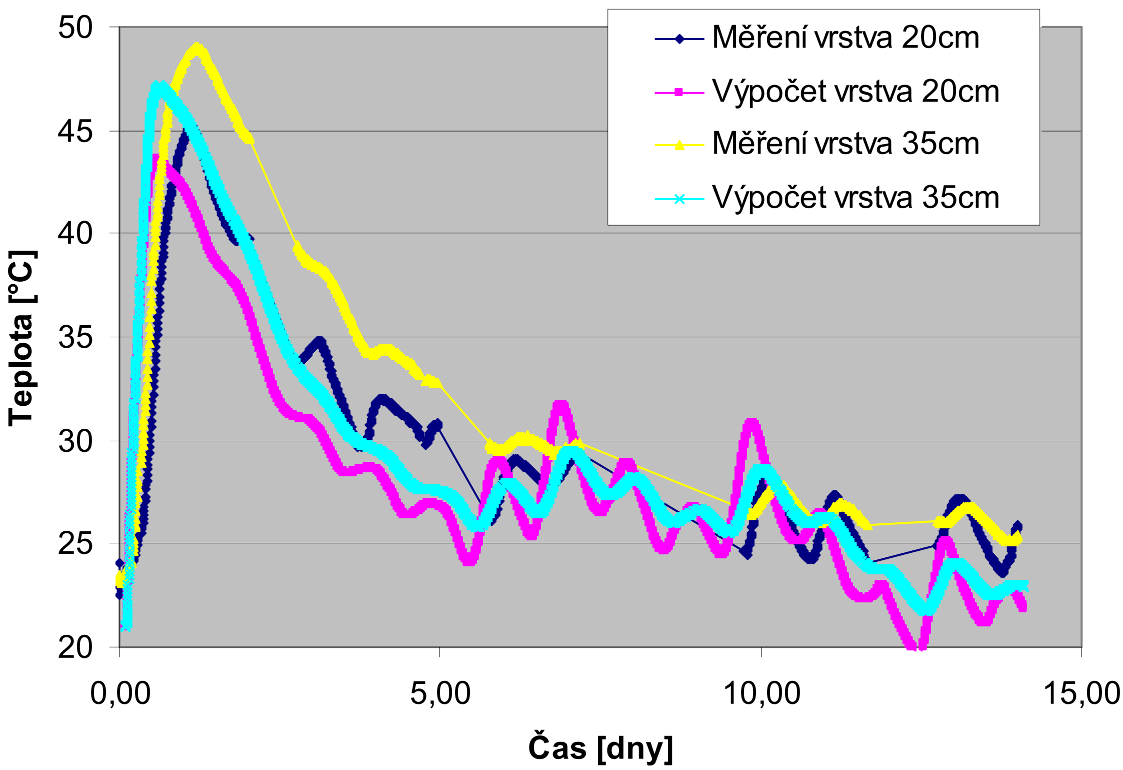
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - vektor vyjadřující vliv dotvarování,

$\boldsymbol{\xi}$ - vektor vyjadřující vliv rozetřených trhlin.

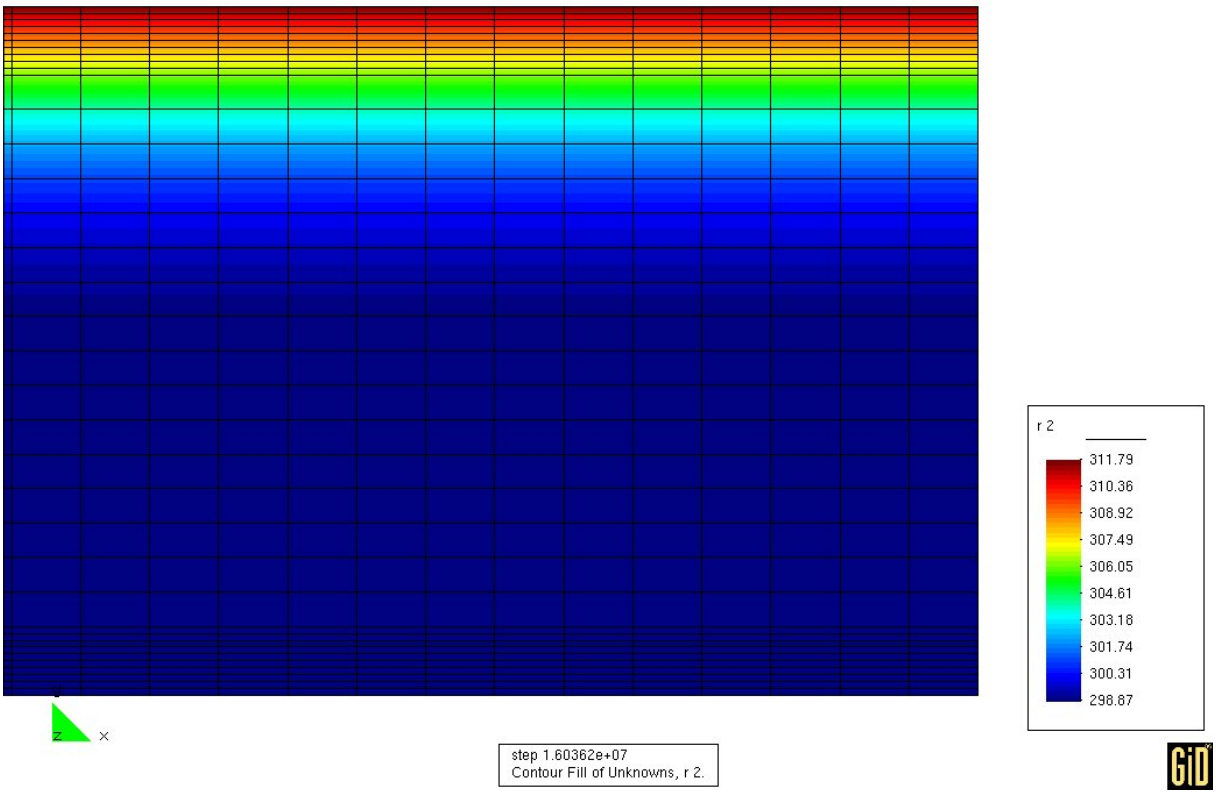
3. 2D analýza základové desky

Jedním z výsledků řešení je počítačová simulace chování základové desky v počátečním stadiu (prvních třicet dnů). Základová deska administrativní budovy Těšnov má tloušťku 1 m a je v příčném i podélném směru vyztužena. Byla vybetonována ve třech vrstvách. Po vybetonování byla deska tři dny kropena a po dobu pěti dnů přikryta PE folií. Počítačová simulace začíná v době jeden den od ukončení betonáže, kdy se předpokládá ukončený proces tuhnutí betonu a působení desky jako železobetonové konstrukce. K analýze teplotního a vlhkostního pole v aplikaci na základovou desku byl použit model autorů Künzela a Kiessla rozšířený o soubor klimatických podmínek a model vývinu hydratačního tepla v betonu.

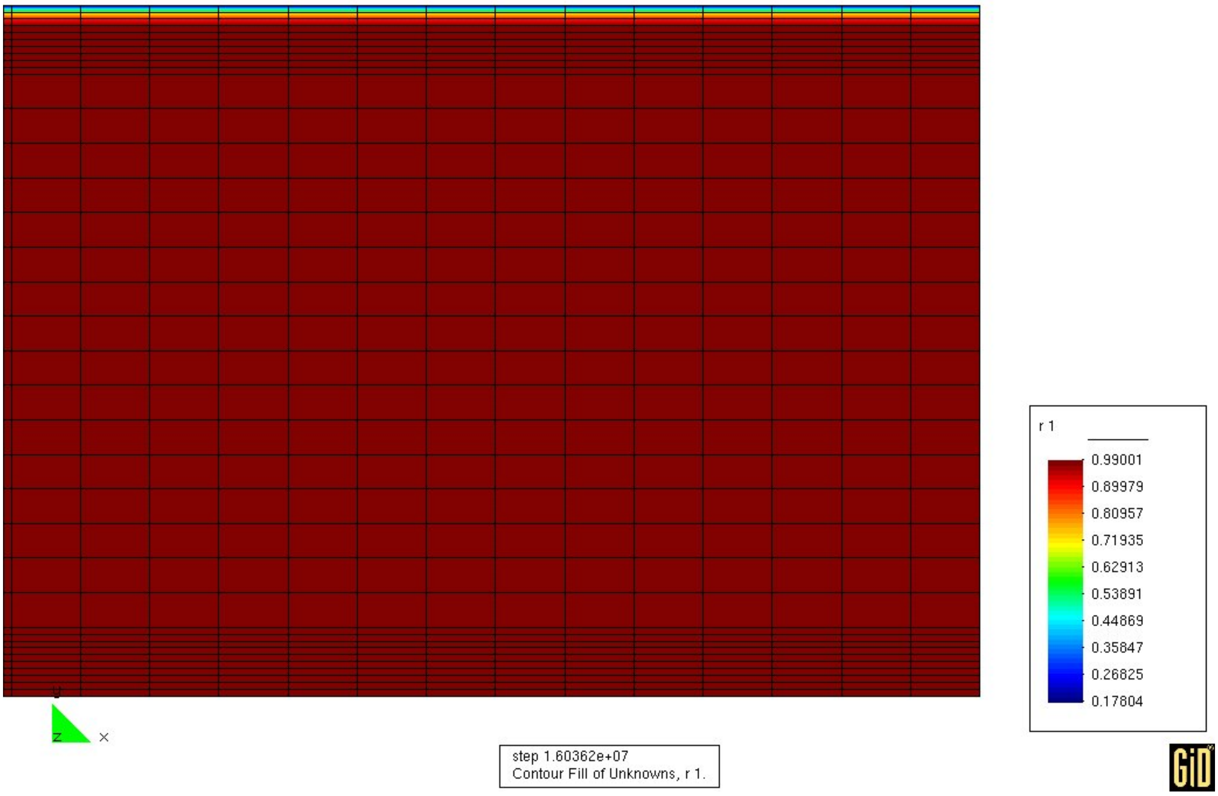
Při studiu chování tlustých desek je třeba vzít v úvahu již počátečním stadium, které je charakterizované tuhnutím betonu desky. V důsledku vývoje hydratačního tepla a sdruženého transportu tepla a vlhkosti (vysychání desky) se na horním volném povrchu nutně objevují první spojitě rozložené trhlinky. Z rozložení vlhkosti po tloušťce na obr. 4 je vidět, že v prvních dnech a měsících nepronikají do značné hloubky, ale mohou se lokalizovat do úzkých pásů a v nich přerůst v zárodky magistrálních trhlin. Ty se v čase mohou prohlubovat a dále zvýrazňovat zejména v kombinaci s ohybovou deformací desky, ať již je vyvolána přitížením vrchní stavbou nebo vztlakem podzemní vody, který zejména při záplavách může nabývat velmi vysokých hodnot. Z obrázku 2 je patrná poměrně dobrá shoda výpočetního modelu a měření pomocí teplotních čidel umístěných v horních vrstvách základové desky. Z rozložení vlhkosti je vidět, že evaporační proces začíná v horní vrstvě po odstranění plastické folie.



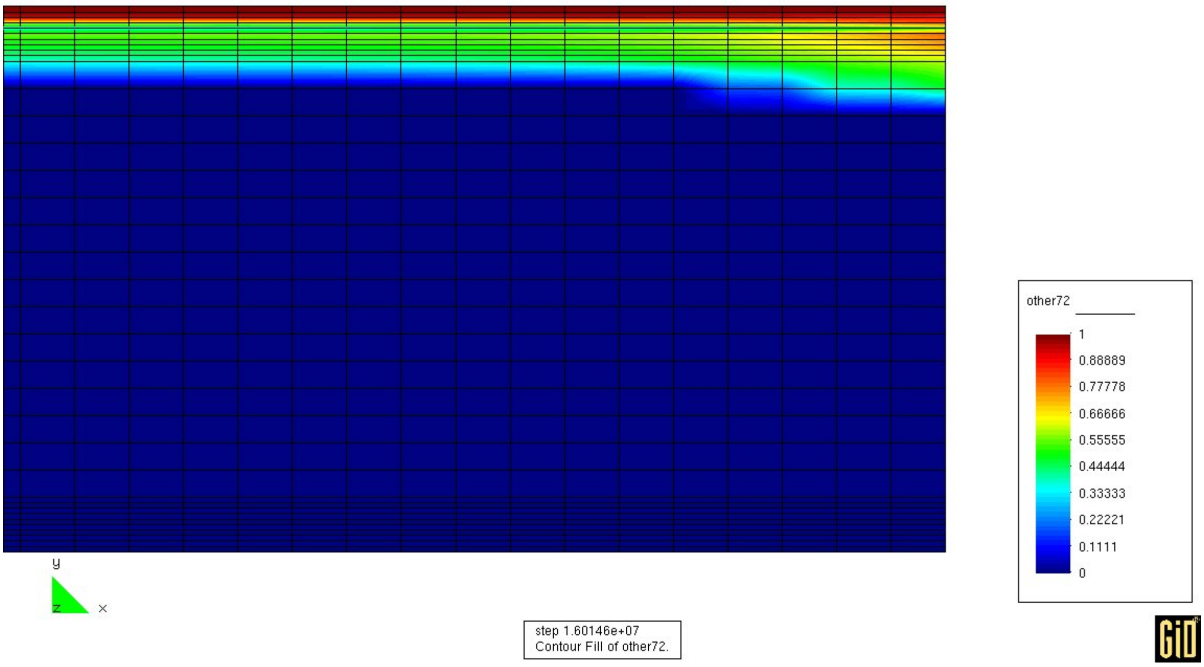
Obr. 2 Porovnání naměřených a vypočtených teplot



Obr. 3 Rozložení teploty v Kelvinech v čase 30 dnů od konce betonáže



Obr. 4 Rozložení rel. vlhkosti v čase 30 dnů od konce betonáže



Obr. 5 Rozložení parametru poškození v čele desky v čase 30 dnů od konce betonáže

Rozborem dalších výsledků a z následné mechanické analýzy byly zjištěny následující skutečnosti: 1) Nahromaděné hydratační teplo „odejde" zhruba po sedmi dnech a s ním doznívá i fáze autogenního smršťování. 2) Během procesu vysychání pokles vlhkosti a teploty ovlivňuje nejdříve vrstvy u povrchu. Jádro desky je ovlivněno mnohem později. Smršťování betonu zapříčiňuje vznik tahových napětí ve vrstvě u horního povrchu a následně vznik mikrotrhlin. Vliv vysychání na vývoji napětí je značný. Je velmi pravděpodobné, že rozestřené trhlinky v oblasti tahových napětí mohou způsobit vznik hlavní trhliny.

3. Závěr

Uvedená studie ukazuje, že modelování přetvárných procesů jak v mladém betonu, tak v dlouhodobém průběhu vysychání vyžaduje volbu fyzikálně správného modelu k popisu transportních procesů ve zrajícím betonu. Volbu reálných materiálových parametrů jak pro transport tepla a vlhkosti (včetně konkrétní reprezentace vývoje hydratačního tepla a hydratace samotné), tak pro porušování mladého betonu (správná hodnota lomové houževnatosti) a stanovení odpovídajících počátečních a okrajových podmínek (klimatické podmínky).

4. Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního přispění MŠMT ČR - projekt 1M6840770001 a výzkumného centra CIDEAS.

5. Literatura

Bazant, Z. P., Thonguthai, W. (1979): Pore pressure in heated concrete walls: theoretical prediction. Magazine of Concrete Research, 31(107), 67-76, 1979

Lewis, R. W., Schrefler, B. A. (1998): The finite element method in static and dynamic deformation and consolidation of porous media. John Wiley & Sons, Chiester-Toronto (492), 1998

Künzel, H. M., Kiessl, K. (1997): Calculation of heat and moisture transfer in exposed building components. Int. J. Heat Mass Transfer, 40, 159-167, 1997

Bažant, Z. P., Křístek, V., Vítek, J. (1992): Drying and Cracking Effects in Box – Girder Bridge Segment. Journal of Structural Engineering **1**(**118**)

Šejnoha, J. et al. (2001): Structure – subsoil interaction in view of transport processes in porous media. CTU Reports, **1**, Vol. 5(81 pp.)

Krejčí, T. (2003): Time – dependent behavior of concrete and other porous materials, ČVUT, Praha, disertační práce

Kruis, J. (2005): Domain decomposition Methods for Distributed Computing. Saxe-Coburg Publications, Stirling, Scotland, UK, 2005.