

## NUMERICAL ANALYSIS OF INTERACTION OF A MOVING BODY AND STREAMING MEDIUM WITH HIGH RE NUMBER

R. Král, S. Pospíšil, J. Náprstek<sup>1</sup>

**Summary:** *The paper presents an ability of finite element method in the fluid dynamics, particularly in a civil engineering. It compiles examples of air flow around a structure, fluid-structure interaction, drag and lift calculations or problems of aeroelastic stability. The solution is based on the Navier-Stokes equations of incompressible fluid. The equations are solved in FEMLAB software which allows to formulate a weak form of differential equations. Because of this possibility we can define a stabilized technique of NS for solutions of problems with high Reynolds number.*

### 1. Úvod

Interakci tělesa a kapaliny, jenž je významným faktorem mnoha inženýrských oborů, lze zjednodušeně charakterizovat jako jev, při kterém dochází k vzájemnému ovlivnění pohybujícího se tělesa a proudící kapaliny [Morand, Ohayon 1995]. Důležitou roli plní v navrhování dopravních prostředků, konstrukcí letadel, mostních konstrukcí, výškových budov a také v posudcích bezpečnosti. Interakci tělesa a tekutiny lze s využitím výpočetní techniky vyšetřovat numericky. Tento způsob je výhodný pro svou finanční nenáročnost, rychlosť a v některých případech proveditelnost. Většina dnešních výpočetních programů je založena na Galerkinově formulaci metody konečných prvků (MKP), jenž se přibližně v padesátých letech stala jednou z nejvýznamnějších numerických metod k řešení okrajových úloh kontinua. Tato formulace se osvědčila při řešení problémů teorie pružnosti, vedení tepla apod. V sedmdesátých letech 20. stol. bylo snahou aplikovat Galerkinovo vyjádření k řešení dynamiky tekutin, které se později ukázalo jako méně vhodné vzhledem k numerickým nestabilitám. Z tohoto důvodu byly navrženy tzv. stabilizační metody, které mají odstranit numerické nestability v rovnicích dynamiky tekutin s vysokým Reynoldsovým číslem (Re) a zachovají řešení původního problému [Tezduyar 1992].

Tento článek je zaměřen na simulaci interakce neaerodynamického profilu v proudu vzduchu ve dvou dimenzionálním prostoru, nicméně všechny rovnice lze rozšířit na řešení ve třech dimenzích.

<sup>1</sup> Ing. Radomil Král, Dr. Stanislav Pospíšil, Dr. Jiří Náprstek, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Prosecká 76, 190 00 Prague 9, e-mail kral@itam.cas.cz

## 2. Numerický model

Numerický model interakce tělesa a kapaliny se skládá ze tří hlavních oblastí: oblast proudění, na které je řešena NS; oblast tělesa, na které jsou definovány rovnice pružnosti; a hranice mezi tělesem a kapalinou.

### 2.1. Euler-Lagrangeova metoda popisu souřadnic

Vhodná volba popisu souřadnic z kinematického hlediska je důležitým předpokladem pro správnou simulaci interakce tělesa a kapaliny. Pohyb spojitého prostředí lze studovat dvojím způsobem. Při prvním, který se převážně využívá v teorii pružnosti, jednotlivé uzly diskretizované oblasti následují deformaci oblasti po celou dobu, po kterou nás pohyb kontinua zajímá. Při druhém sledujeme změny veličin v pevně zvoleném bodě diskretizované oblasti, která se průběhu výpočtu nemění. Jak již bylo výše řečeno, Lagrangeova metoda je vhodná pro popis deformace tuhých těles, a proto ji aplikujeme na oblast obtékaného tělesa. Eulerova metoda, jenž je uvedena jako druhá, je široce aplikovaná v dynamice tekutin, avšak jejím hlavním nedostatkem je, že ji lze jen obtížně využít k simulaci proudění se vzájemným působením jiného materiálu nebo média. Kombinací Langrangovy a Eulerovy metody (ALE) získáme účinnou metodu, jenž lze úspěšně použít k řešení interakce tělesa a kapaliny.

Koncept ALE metody byl poprvé představem při řešení úlohy pomocí konečných diferencí. Později byla metoda implementována do MKP [Donea, Huerta 2003]. Princip metody spočívá v definování algoritmu, který transformuje souřadnice určitého prostoru do druhého. ALE metoda je vhodná k řešení problému interakce s relativně malými deformacemi výpočetní oblasti. Při nadměrné deformaci dochází k vzájemnému překrytí prvků a numerické nestabilitě výpočtu. Nadměrné deformaci lze předejít vytvořením nové sítě prvků již na deformované oblasti řešení.

Transformační vztah mezi pevným kartézským souřadným systémem a pohyblivým křivočárym souřadným systémem můžeme vyjádřit zápisem

$$x(X, Y, t), y(X, Y, t), X, Y \in \Omega_f, x, y \in \Omega_d, t \in (0, T)$$

kde velká písmena značí souřadnice bodů pevné oblasti  $\Omega_f$ , malá písmena přísluší souřadnicím bodů deformované oblasti  $\Omega_d$  a  $t$  je čas. Na oblasti proudění definujme následující čtyři rovnice

$$\nabla^2 x_t = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 y_t = 0 \quad (2)$$

$$x = X + \int_0^T x_t dt \quad (3)$$

$$y = Y + \int_0^T y_t dt \quad (4)$$

Řešením Laplacových rovnic (1), (2) obdržíme rychlosť přetvoření bodů oblasti, zbylé integrální rovnice (3), (4), jenž jsou závislé na řešení dvou předchozích rovnic, představují předpis pro výpočet souřadnic deformované oblasti  $\Omega_d$ .

Transformaci souřadnic lze maticovým zápisem zapsat následovně

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_X & x_Y \\ y_X & y_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} \quad (5)$$

Přenásobíme-li předchozí rovnici (5) inverzní Jacobiho matici  $J^{-1}$  zleva, získáme inverzní transformaci

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (6)$$

kde

$$J^{-1} = \frac{1}{D_J} \begin{bmatrix} y_Y & -x_Y \\ -y_X & x_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Xx} & I_{Xy} \\ I_{Yx} & I_{Yy} \end{bmatrix}, \text{ a } D_J = x_X y_Y - x_Y y_X$$

Pomocí výše odvozených vztahů (5) a (6) můžeme definovat derivace s využitím proměnných pevného souřadného systému, tj.

$$\begin{bmatrix} x_{tx} & y_{tx} \\ x_{ty} & y_{ty} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} x_{tX} & y_{tX} \\ x_{tY} & y_{tY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{tX} I_{Xx} + x_{tY} I_{Yx} y_{tx} I_{Xx} + y_{tY} I_{Yx} \\ x_{tX} I_{Xy} + x_{tY} I_{Yy} y_{tx} I_{Xy} + y_{tY} I_{Yy} \end{bmatrix} \quad (7)$$

jenž využijeme k substituci v zápisu slabého řešení soustavy rovnic ALE metody (1) až (4).

Okrajové podmínky rovnic (1) až (4) jsou splněny pomocí Lagrangeových multiplikátorů, tzn., že Dirichletovy okrajové podmínky nejsou uplatněny klasickým způsobem plynoucí z Galerkinovy formulace, nýbrž je sestavena soustava algebraických rovnic vyhovující následujícím podmínkám

$$\begin{aligned} x_t - u_s &= 0 && \text{na } \partial\Omega_I \\ y_t - v_s &= 0 && \\ x_t &= 0 && \text{na } \partial\Omega_{ext} \\ y_t &= 0 && \end{aligned}$$

kde  $u_s$  a  $v_s$  značí rychlosť tělesa ve směru pevného souřadného systému,  $\partial\Omega_I$  je hranice mezi médiem a tělesem a  $\partial\Omega_{ext}$  jsou zbývající externí hranice. Předpokládejme, že v čase  $t = 0$  je pevná a pohyblivá oblast totožná a jednotlivé uzly sítě se překrývají. Z toho plyne, že počáteční podmínky ALE metody v každém uzlu sítě splňují podmínky  $x = X$  a  $y = Y$ .

## 2.2. Oblast proudění

Abychom vyšetřili pohyb nestlačitelné viskozní tekutiny, hledejme řešení Navier-Stokesovy rovnice založené na formulaci rychlosti a tlaku. Vzhledem k zavedení ALE algoritmu je NS upravena do následujícího tvaru (objemové síly tekutiny jsou zanedbány)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \left[ (-p) \mathbf{I} + \eta \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] + \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{x}_t) \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny,  $\mathbf{u} = \{u, v\}^T$  je rychlostní pole proudění ve směru os  $X, Y$ ,  $p$  značí tlak,  $\eta$  dynamickou viskozitu kapaliny a  $\mathbf{I}$  je jednotková diagonální matice.  $\mathbf{x}_t$ , jak již bylo zmíněno, reprezentuje rychlosť přetvoření oblasti proudění.

Stabilita numerického řešení rovnice je značně ovlivněna velikostí Reynoldsova čísla, jenž vyjadřuje v charakteristických veličinách poměr síly setrvačnosti k síle vnitřního tření. Hlavními příčinami numerické instability NS v Galerkinově formulaci je přítomnost nelineární konvektivního člena v rovnici (8) a nevhodná volba approximačních funkcí. Přítomnost konvektivního

členu způsobuje uzlovou oscilaci řešení, převážně v poli rychlosti proudění, která narůstá s dominantním členu. K uzlové oscilaci dochází v místech se strmým gradientem řešení. Nevhodná volba approximačních funkcí rychlosti proudění a tlaku může zapříčinit uzlovou nestabilitu v poli tlaku nezávisle na velikosti  $Re$ . Splněním tzv. Ladyzhenskaya, Babuška, Brezzi kompatibilních podmínek (LBB) pro approximační funkce lze poměrně snadno tuto numerickou nestabilitu odstranit, avšak musíme použít approximačních polynomů vyššího stupně, než připouští funkcionál NS rovnice. Nestability však nejsou charakteristické pouze pro tuto formulaci a k podobným nestabilitám dochází u jiných standardních diskretizačních metod, jako jsou metoda konečných objemů nebo metoda konečných diferencí.

Stabilizace řešení NS můžeme docílit vhodnou kombinací Galerkinovy metody a metody nejmenších čtverců (GLS) [Tezduyar 1992], kterou lze považovat jako zobecnění tzv. stabilizace streamline-upwind/Petrov-Galerkinovy metody [Donea, Huerta 2003]. Do původní soustavy diferenciálních rovnic (8) a (9) vložíme nové členy, které obdržíme ze základní podmínky variační metody nejmenších čtverců:

$$\int \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \left[ (-p) \mathbf{I} + \eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] + \rho ((\mathbf{u} - \mathbf{x}_t) \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) D_j d\Omega_f + \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int \left( \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \eta \Delta \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p \right) \tau (-\eta \Delta \hat{\mathbf{u}} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{p}) D_j d\Omega_{e,f} = \quad (10)$$

$$= \int \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{h} D_j d\partial\Omega_f \\ - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

kde  $\mathbf{h} = \left[ (-p) \mathbf{I} + \eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] \cdot \mathbf{n}$  značí Neumannovu okrajovou podmíinku.

Vložené členy jsou přenásobeny stabilizačním koeficientem  $\tau$ , jenž určuje podíl členů na zobecněném řešení daného problému. Výraz pro koeficient  $\tau$ , stanovený pro řešení úloh pomocí semi-diskretních metod, je

$$\tau = \left( \left( \frac{1}{\theta \Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2\|\mathbf{u}\|}{h} \right)^2 + 9 \left( \frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (12)$$

kde  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\Delta t$  je velikost časového kroku a  $h$  přísluší velikosti prvku. Hodnota parametru  $\theta$  závisí na zvolené metodě časové diskretizace. V našem případě je využita metoda Backward Euler, z čehož plyne  $\theta = 1$ . Podobně jako jsme zavedli transformaci souřadnic u ALE metody, využijeme odvozeného vztahu derivací také pro NS rovnici. Derivace funkcí podle souřadnic pohyblivého souřadného systému, jenž jsou obsaženy v NS, nahradíme vztahem (7).

Poznamenejme, že GLS metoda je vhodná pro řešení problému interakce. Vzhledem k zavedení stabilizačních členů do původní NS rovnice jsou automaticky splněny LBB podmínky stability a do výpočtu lze aplikovat approximační polynomy prvního stupně pro approximaci rychlosti i tlaku. Takto se sníží počet stupňů volnosti daného problému a minimalizují se potřebné matematické operace k vyřešení soustavy. V případě, že chceme approximovat řešení pomocí polynomů vyšších řádů, koeficient  $\tau$  definovaný v rovnici (12) nelze použít, viz. [Donea, Huerta 2003].

Okrajové podmínky Navier-Stokesovy rovnice jsou podobně jako ALE metody splněny pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Rychlosť kapaliny na hranici obtékáho tělesa se musí rovnat rychlosť tělesa, z čehož plyne

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s \quad \text{na } \partial\Omega_I \quad (13)$$

### 2.3. Oblast tělesa

Na oblasti tělesa definujme pohybovou rovnici vynuceného tlumeného systému, pro kterou platí

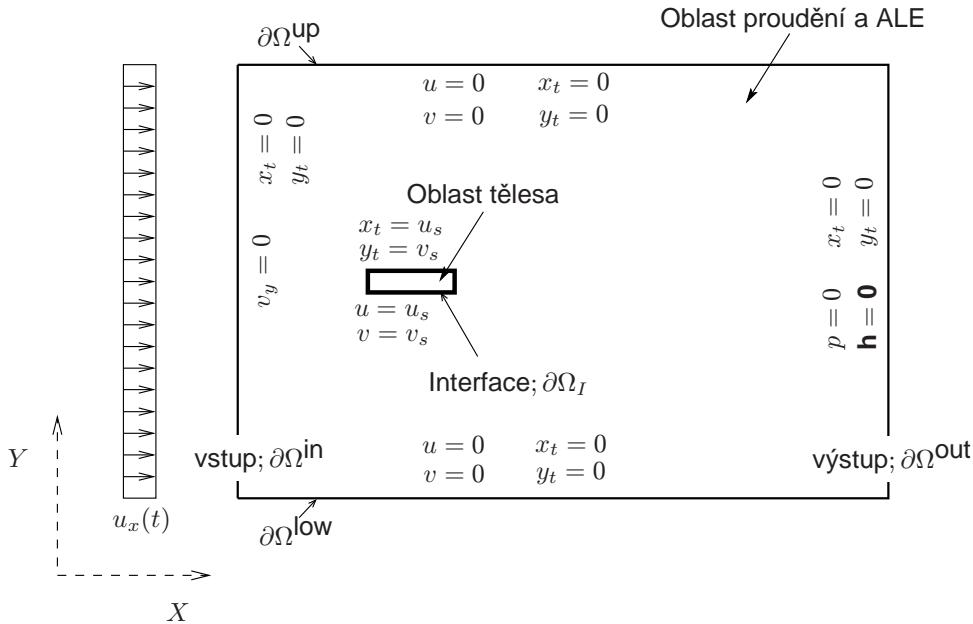
$$\mathbf{M}_s \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_s \mathbf{u}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{F}_s \quad (14)$$

kde  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{C}_s$  a  $\mathbf{K}_s$  je matice hmotnosti, útlumu a tuhosti. Vektor  $\mathbf{x}_s$  označuje posun tělesa; rychlost, resp. zrychlení reprezentuje vektor  $\mathbf{u}_s$ , resp.  $\dot{\mathbf{u}}_s$ . Za pravou stranu rovnice (14) dosadíme Lagrangeovy multiplikátory, které získáme z podmínky (13), čímž zajistíme nejen účinek proudu kapaliny ve směru normály povrchu tělesa, ale také přenesení viskózního napětí z kapaliny na těleso.

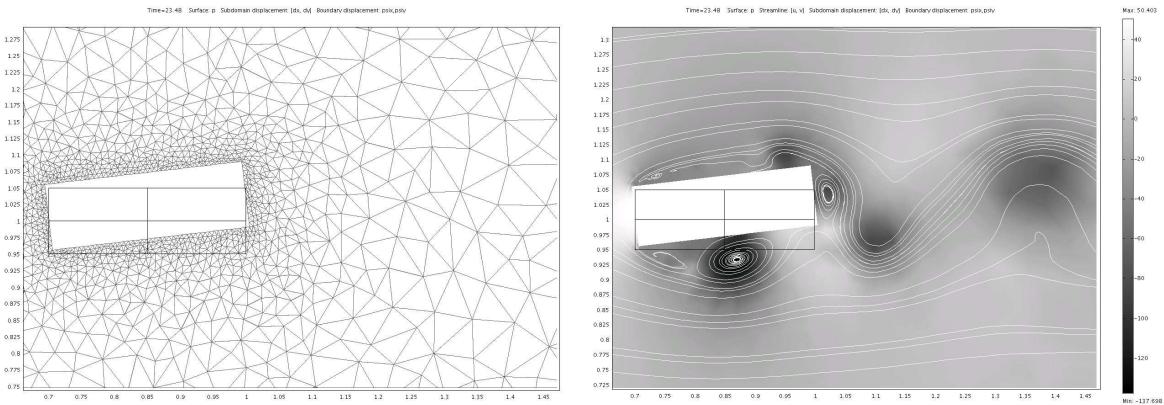
### 3. Příklad numerického modelu interakce

Theoretické podklady, uvedené v předchozím textu, dávají dostatečný základ pro vytvoření numerického modelu interakce mezi tělesem a kapalinou. Zaměřme se nyní na konkrétní řešení účinku větru a odezvy stavební konstrukce jím zatížené. Mějme obdélníkový průřez tělesa, jenž znázorňuje zjednodušený průřez mostovky visutého mostu, Obr. 1. Cílem bylo zjistit, zda dojde ke ztrátě tzv. aerodynamické stability tělesa při kritické rychlosti větru stanovené experimentem [Dyrbye, Hansen 1997]. Dále bylo nutné prokázat numerickou stabilitu GLS metody Navier-Stokesovy rovnice s vysokým Re číslem. V případě, že by kritická rychlosť větru určená numericky nebyla hodnotou blízká naměřené kritické rychlosti větru, lze předpokládat, že GLS stabilizace mění původní fyzikální význam Navier-Stokesovy rovnice.

Analýza výsledků byla provedena pro tři obdélníkové průřezy s poměry stran výška/šířka=10×20, 10×30, 10×40cm s délkou 80cm. Geometrické, fyzikální a modální vlastnosti tělesa byly odvozeny z dynamických charakteristik experimentu. Během experimentu ve větrném tunelu byla měřena nejen odezva tělesa na proud vzduchu, ale také tlak pomocí dvanácti senzorů umístěných na povrchu modelu.



Obr. 1. Schéma numerického modelu interakce tělesa s kapalinou; okrajové podmínky oblastí.



Obr. 2. Detail nestrukturované deformované sítě prvků při flutteru.

Obr. 3. Stanovení kritické rychlosti větru; oblast tlakového pole s proudnicemi.

Obrázky 2. a 3. zachycují pohyb tělesa vlivem účinku větrného proudu při hledání kritické rychlosti větru.

Numericky stanovené kritické rychlosti, frekvence a tlaky znázorňuje Tab.1. Ty jsou srovnány s výsledky experimentu. Můžeme vidět, že velikost frekvence kmitání souhlasí s experimentem pro všechny testované tělesa. Podobně, kritická rychlosť vzduchu numerického modelu se jen málo liší od experimentu.

Tab. 1. Kritická rychlosť větru a frekvence kmitání při ztrátě aerodynamické nestability.

	1/2		1/3		1/4	
	Experiment	Num.	Experiment	Num.	Experiment	Num.
Kritická rychlosť [ $m s^{-1}$ ]	8	8.25	6	6.85	5	4.75
Frekvence kmitání [Hz]	2.38	2.30	2.02	2.12	1.9	1.85

#### 4. Závěr

V článku je popsána metoda numerického řešení modelu interakce tělesa a proudu vzduchu s vysokým Reynoldsovým číslem. Původně nestabilní chování řešení Navier-Stokesovy rovnice bylo odstraněno zavedením kombinace Galerkinovy metody a metody nejmenších čtverců. Byl ukázán způsob řešení problémů s nestacionární výpočtovou oblastí, na níž byla zavedena Eulerova-Lagrangeova metoda popisu souřadnic. Spolehlivost metody byla ověřena na konkrétním příkladě interakce. Cílem úlohy bylo stanovit a porovnat kritickou rychlosť větru s experimentem. Dále byla prokázána numerická stabilita upravené Navier-Stokesovy rovnice s vysokým Re číslem.

#### 5. References

[MEMS Module 2004] MEMS Module User's Guide. COMSOL AB, 2004

[Donea, Huerta 2003] J. Donea, A. Huerta: Finite Element Methods for Flow Problems, John Wiley&Sons Ltd., 2003

[Tezduyar 1992] Tezduyar, T.E.: Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow Computations, University of Minnesota: Advances in Applied Mechanics, Volume 28, 1992

[Dyrbye, Hansen 1997] C. Dyrbye, S.O. Hansen: Wind Loads on Structure, John Wiley&Sons Ltd., 1997

[Morand, Ohayon 1995] H.J.-P. Morand, R. Ohayon: Fluid Structure Interaction, John Wiley&Sons Ltd., 1995