

ESTIMATION OF GENERALIZED STRESS INTENSITY FACTORS BY MEANS OF MEAN VALUE OF STRAIN ENERGY DENSITY FACTOR

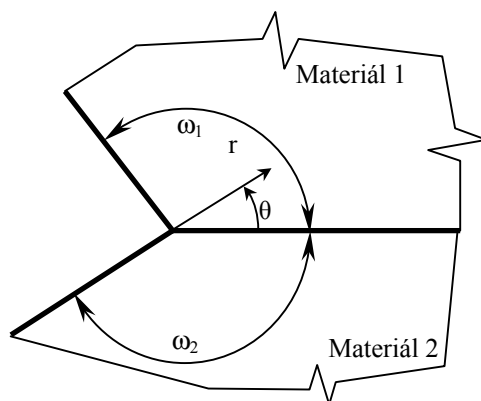
J. Klusák^{*}

Summary: *The contribution deals with bi-material wedges whose stress field is characterized by two stress singular terms. The exponents of stress singularity are generally in the interval (0; 1). For these cases each of the singularities covers both normal and shear mode of loading. Because of the inherently combined loading mode, it is advantageous to utilize the strain energy density concept. A mean value of the strain energy density factor taken from a numerical solution of particular materials junction is compared to its analytical representation to ascertain values H_1 and H_2 . These values enter to stability criterion to indicate if crack is initiated in the wedge tip.*

1. Úvod

Moderní technické konstrukce často vyžadují použití materiálů složených z více komponent. Rozhraní mezi nimi pak působí jako koncentrátor napětí. Zvláště nebezpečným místem konstrukcí se tak stává bi-materiálové rozhraní vystupující na volný povrch součástí. Tato místa lze ve výpočtech úspěšně modelovat jako bi-materiálové vruby (obr. 1). Takové singulární koncentrátory napětí mají na rozdíl od trhliny exponent singularity napětí obecně v intervalu (0; 1). Navíc v naprosté většině případů existují dvě singularity, z nichž každá v sobě zahrnuje jak normálový, tak smykový zatěžovací mód. V procesu posouzení životnosti obecných singulárních koncentrátorů napětí je nutným krokem stanovení hodnot zobecněných součinitelů intenzity napětí. Vzhledem k apriorní existenci kombinovaného módu zatěžování se jeví výhodné využít faktor hustoty deformační energie, resp. jeho střední hodnotu vypočtenou přes jistou vzdálenost od vrcholu vrubu. Pro výpočet hodnot zobecněného součinitele intenzity napětí (ZSIN) je v příspěvku použita přímá metoda srovnání výsledků z numerického řešení s odpovídajícími analytickými vztahy. Výhodou této metody je, že využívá standardních numerických systémů MKP. Získané hodnoty H_1 a H_2 slouží jako vstup do kriteria stability rozhodujícího, zda ve vrcholu vrubu k iniciaci trhliny za daných podmínek dojde, či nikoli.

^{*} Ing. Jan Klusák, Ph.D.: Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky; Žitkova 22; 616 62 Brno; tel.: +420.532 290 348, fax: +420.541 218 657; e-mail: klusak@ipm.cz



obr. 1. Bi-materiálový vrub s odpovídajícím polárním souřadným systémem

2. Rozdělení napětí

V případě bi-materiálového vrubu studovaného v příspěvku (ostrý rádius vrubu, skoková změna materiálů přes rozhraní, dokonalá adheze v rozhraní) má pole napětí singulární charakter a je určováno kombinací analytických a numerických postupů (Hilton, P.D. & Sih, G. C. 1973; Owen D.R.J, Fawkes A.J. 1983). Ve většině případů je rozložení napětí popsáno dvěma singularitami s exponenty p_1 a p_2 . Na rozdíl od trhliny jsou exponenty obecně různé od $\frac{1}{2}$, a leží v intervalu $(0; 1)$. Každý singulární člen navíc zahrnuje kombinovaný zatěžovací mód. Ostatní (nesingulární) členy Williamsova rozvoje jsou zanedbány. V polárních souřadnicích (r, θ) lze rozložení napětí zapsat v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}\sigma_{mrr} &= \sum_{k=1}^2 H_k r^{-p_k} F_{rrkm} \\ \sigma_{m\theta\theta} &= \sum_{k=1}^2 H_k r^{-p_k} F_{\theta\theta km} \\ \sigma_{mr\theta} &= \sum_{k=1}^2 H_k r^{-p_k} F_{r\theta km},\end{aligned}\tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned}F_{rrkm} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2-p_k) (-a_{mk} \sin((2-p_k)\theta) - b_{mk} \cos((2-p_k)\theta) + 3c_{mk} \sin(-p_k\theta) + 3d_{mk} \cos(-p_k\theta)) \\ F_{\theta\theta km} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (p_k^2 - 3p_k + 2) (a_{mk} \sin((2-p_k)\theta) + b_{mk} \cos((2-p_k)\theta) + c_{mk} \sin(-p_k\theta) + d_{mk} \cos(-p_k\theta)) \\ F_{r\theta km} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2-p_k) (-a_{mk} \cos((2-p_k)\theta) + b_{mk} \sin((2-p_k)\theta) + c_{mk} \cos(-p_k\theta) - d_{mk} \sin(-p_k\theta))\end{aligned}$$

Index $m = 1, 2$ rozlišuje materiály 1 a 2 v nichž je rozložení napětí určováno. Hodnota H_k je tzv. zobecněný součinitel intenzity napětí (ZSIN) a je určován z numerického řešení konkrétní geometrie s danými materiály a okrajovými podmínkami. Koeficienty a_{mk} , b_{mk} , c_{mk} , d_{mk} pro $k = 1, 2$ jsou známé parametry odpovídající exponentům singularity napětí p_k a závisí

na kombinaci materiálů (Dundursovy parametry α , β , Dundurs, J. (1967)) a na geometrii vrubu. Exponenty singularity napětí ($0 < p_k < 1$) plynou z geometrie a materiálové kombinace (Klusák J. & Knésl Z. 2004).

V dalším předpokládáme existenci dvou singulárních členů. K úplnému popisu pole napětí před vrcholem bi-materiálového vrubu je nutno určit hodnoty ZSIN H_1 a H_2 . Tyto budou určeny z numerického řešení konkrétního vrubu pomocí znalosti rozložení faktoru hustoty deformační energie.

3. Faktor hustoty deformační energie

V případě inherentně kombinovaného zatěžovacího módu je výhodné využít k popisu iniciace trhliny konceptu hustoty deformační energie (SED). Na počátku 70. let ukázal Sih (Sih, G.C. 1973), že porušování materiálu lze popsat pomocí faktoru hustoty deformační energie S , který je pro trhlínu definován následujícím vztahem:

$$S = r.dW / dV = r \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad (2)$$

Analogicky může být zaveden SED faktor Σ pro bi-materiálový vrub:

$$\Sigma = r.dW / dV = r \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad (3)$$

Omezíme-li se na rovinné problémy, přejdeme na vztah:

$$\Sigma_m = r(2\sigma_{m\theta\theta}\sigma_{mrr}(k_m - 1) + (\sigma_{m\theta\theta}^2 + \sigma_{mrr}^2)(k_m + 1) + 4\sigma_{kr\theta}^2)/8\mu_m \quad (4)$$

kde $k_m = (1 - \nu_m)/(1 + \nu_m)$ platí pro rovinnou napjatost a $k_m = (1 - 2\nu_m)$ pro rovinnou deformaci, μ_m je modul pružnosti ve smyku, ν_m je Poissonovo číslo, a index m označuje materiál. Dosazením vztahů (1) pro složky napětí do (4) dostáváme vztah pro rozložení faktoru hustoty deformační energie v okolí vrcholu bi-materiálového vrubu. Poznamenejme, že na rozdíl od trhliny, Σ závisí na radiální vzdálenosti r :

$$\Sigma_m = \frac{1}{8\mu_m} H_1^2 \left(r^{1-2p_1} U_{1m} + r^{1-2p_2} \Gamma_{21}^2 U_{2m} + r^{1-p_1-p_2} 2\Gamma_{21} U_{12m} \right) \quad (5)$$

Kde

$$\begin{aligned} U_{1m} &= [(F_{rr1m}^2 + F_{\theta\theta1m}^2)(k_m + 1) + 4F_{r\theta1m}^2 + 2F_{\theta\theta1m}F_{rr1m}(k_m - 1)] \\ U_{2m} &= [(F_{rr2m}^2 + F_{\theta\theta2m}^2)(k_m + 1) + 4F_{r\theta2m}^2 + 2F_{\theta\theta2m}F_{rr2m}(k_m - 1)] \\ U_{12m} &= [(F_{rr1m}F_{rr2m} + F_{\theta\theta1m}F_{\theta\theta2m})(k_m + 1) + 4F_{r\theta1m}F_{r\theta2m} + (F_{\theta\theta1m}F_{rr2m} + F_{\theta\theta2m}F_{rr1m})(k_m - 1)] \end{aligned}$$

a $\Gamma_{21} = \frac{H_2}{H_1}$, $[m^{p_2-p_1}]$ vyjadřuje poměr zobecněných součinitelů intenzity napětí. Tato

veličina nemá konkrétní fyzikální význam, pouze vyjadřuje příspěvek jednotlivých singulárních členů do rozdělení napětí. Nesouvisí tedy s příspěvky jednotlivých zatěžovacích módů, jako tomu je u trhliny či ostrého vrubu v homogenním prostředí.

Vzhledem k závislosti na radiální souřadnici r , je vhodné jako veličinu rozhodující o iniciaci trhliny uvažovat střední hodnotu faktoru Σ přes jistou vzdálenost d od vrcholu vrubu:

$$\overline{\Sigma}_m = \frac{1}{d} \int_0^d \Sigma_m dr = \frac{1}{8d\mu_m} H_1^2 \left(\frac{d^{2-2p_1}}{2-2p_1} U_{1m} + \frac{d^{2-2p_2}}{2-2p_2} \Gamma_{21}^2 U_{2m} + \frac{d^{2-p_1-p_2}}{2-p_1-p_2} 2\Gamma_{21} U_{12m} \right) \quad (6)$$

Integrační vzdálenost d zde do výpočtů vstupuje jako strukturní parametr, resp. parametr související s mechanismem porušování. Volí se v případě křehkého porušení např. ve velikosti zrna materiálu, v případě únavového porušení ve velikosti plastické zóny.

4. Směr iniciace trhliny versus poměr zobecněných součinitelů intenzity napětí

V práci (Klusák, J., Knésl, Z. 2006) je ukázáno, že úhel iniciace trhliny nezávisí na absolutní hodnotě ZSIN, ale závisí pouze na jejich poměru Γ_{21} . Vzhledem k tomu je možno také na základě znalosti úhlu iniciace určit poměr $\Gamma_{21} = H_2/H_1$. Úhel předpokládaného počátečního směru šíření je tedy určen pomocí některého z kritérií z numerického řešení, např. vyhledáním maxima tangenciálního napětí, či minima faktoru hustoty deformační energie. Kvůli závislosti těchto veličin na r je opět možné sledovat rozdělení jejich středních hodnot. Například pro nalezení minima střední hodnoty faktoru hustoty deformační energie musí být splněny následující dvě podmínky:

$$\frac{\partial \overline{\Sigma}_m}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\Sigma}_m}{\partial \theta^2} > 0 \quad (8)$$

Z numerického řešení je možné ze závislosti veličiny $\overline{\Sigma}_m$ na polární souřadnici určit úhel θ_0 předpokládané iniciace trhliny. Ze znalosti tohoto úhlu je možné určit poměr Γ_{21} z podmínky (7), tedy z následující kvadratické rovnice:

$$\frac{d^{2-2p_1}}{2-2p_1} \frac{\partial U_{1m}}{\partial \theta} + \frac{d^{2-2p_2}}{2-2p_2} \Gamma_{21}^2 \frac{\partial U_{2m}}{\partial \theta} + \frac{d^{2-p_1-p_2}}{2-p_1-p_2} 2\Gamma_{21} \frac{\partial U_{12m}}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

Z možných dvou řešení pro další postup bereme pouze to Γ_{21} , které v úhlu θ_0 implikuje minimum střední hodnoty faktoru SED (tj. splňuje podmínku (8)).

5. Určení hodnot H_1 a H_2

Známe-li poměr hodnot $\Gamma_{21} = H_2/H_1$ (viz předchozí odstavce), zbývá ke konečnému určení hodnot zobecněných součinitelů intenzity napětí pouhé dosazení do následujícího vztahu:

$$H_1 = \left[\frac{1}{\overline{\Sigma}_m 8d\mu_m} \left(\frac{d^{2-2p_1}}{2-2p_1} U_{1m} + \frac{d^{2-2p_2}}{2-2p_2} \Gamma_{21}^2 U_{2m} + \frac{d^{2-p_1-p_2}}{2-p_1-p_2} 2\Gamma_{21} U_{12m} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Hodnota $\overline{\Sigma}_m$ je výsledkem výpočtu numerického modelu, d je integrační vzdálenost, na níž je vyhodnocována střední hodnota SED faktoru. Tu je třeba volit s ohledem na mechanismus porušování. Např. pro křehký lom d odpovídá velikosti zrna, pro únavové porušení je možno d volit ve velikosti plastické zóny. Pro určení hodnot ZSIN je teoreticky možno brát střední hodnotu faktoru SED v libovolném směru. Jako logické se však jeví doporučení výpočtu hodnot H_1 a H_2 z hodnoty $\overline{\Sigma}_m$ ve směru θ_0 předpokládané iniciace trhliny.

Hodnota druhého součinitele H_2 se určí zpětně z poměru Γ_{21} :

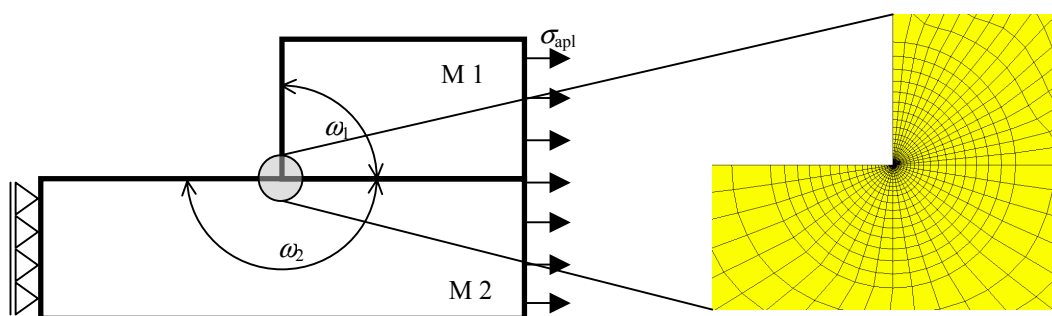
$$H_2 = \Gamma_{21} H_1 \quad (11)$$

Poznamenejme, že během celého řešení se pro každou z materiálových oblastí liší vztahy pro konstanty a_{mk} , b_{mk} , c_{mk} , d_{mk} . To se promítá také do rozložení napětí, a dalších odvozených veličin. Proto je třeba pro každou oblast použít správné vstupní údaje. Konstanty a_{mk} , b_{mk} , c_{mk} , d_{mk} v sobě navíc zahrnují možnost rozlišit, zda se jedná o případ rovinné napjatosti, či deformace.

Nutné je také připomenout fakt, že zatímco analytická část řešení počítá pouze se singulárními členy rozvoje napětí, numerický výpočet zahrnuje všechny členy rozvoje. To však splňuje základní cíl: pomocí singulárních členů aproximovat reálné pole napětí.

6. Numerický příklad

Ověření navrženého postupu bylo provedeno na numerickém případě. Geometrie a zatížení bi-materiálového vrubu jsou zřejmé z obr. 2. Úhly $\omega_1 = 90^\circ$ a $\omega_2 = 180^\circ$, zatěžující napětí $\sigma_{\text{apl}} = 50$ MPa. Materiálové charakteristiky: $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 300$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Na základě geometrie a materiálových charakteristik byly odvozeny exponenty singularity napětí $p_1 = 0,432$, $p_2 = 0,058$. Během řešení byl uvažován případ rovinné napjatosti.



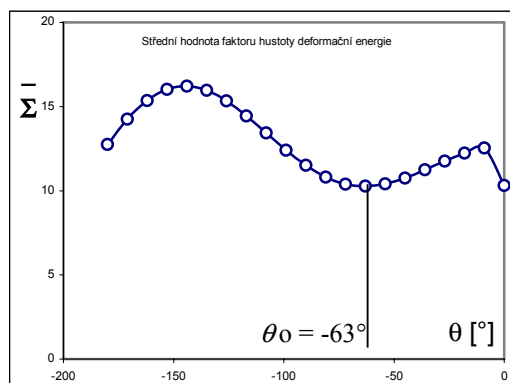
obr. 2. Geometrie a zatížení modelovaného bi-materiálového vrubu

Detail sítě v okolí vrubu (viz obr. 2) byl volen s ohledem na kvalitní vyhodnocení rozložení napětí a ostatních veličin v závislosti na polární souřadnici θ .

Z konečno-prvkového řešení zadané soustavy byl vyhodnocen předpokládaný úhel iniciace trhliny $\theta_0 = -63^\circ$. Ten byl vyhodnocen kritérii maximálního tangenciálního napětí,

minima hustoty deformační energie i minima střední hodnoty SED. Poslední zmíněné je ukázáno na obr. 3.

Ze známého předpokládané úhlu iniciace trhliny je určen pomocí vztahů (7), resp. (9) a (8) poměr zobecněných součinitelů intenzity napětí $\Gamma_{21} = -1,929$. Konečné absolutní hodnoty ZSIN H_1 a H_2 je možno určovat v kterémkoli směru. V tomto případě byl opět zvolen směr předpokládané iniciace $\theta_0 = -63^\circ$, kde je střední hodnota faktoru hustoty deformační energie $\bar{\Sigma}_{m=2} = 9,5614$ pro integrační vzdálenost $d = 3,6 \times 10^{-5}$ m.



obr. 3. Kritérium směru iniciace trhliny založené na minimu střední hodnoty faktoru SED

Tak pomocí vztahů (10) a (11) jsou určeny hodnoty zobecněných součinitelů napětí $H_1 = 8,07 \text{ MPa.m}^{0,432}$ a $H_2 = -17,81 \text{ MPa.m}^{0,058}$. V práci (Klusák, 2005) je použita přímá metoda výpočtu hodnot ZSIN srovnáním vztahů pro napětí s numericky zjištěnými hodnotami ve dvou směrech před vrcholem vrubu. Touto metodou byly pro stejnou konfiguraci získány hodnoty $H_1 = 9,034 \text{ MPa.m}^{0,432}$ a $H_2 = -15,912 \text{ MPa.m}^{0,058}$. Z uvedeného je vidět, že obě metody vedou k podobným výsledkům.

7. Závěr

Stanovení hodnot zobecněných součinitelů intenzity napětí je nutným krokem ke konečnému určení rozložení napětí v okolí singulárních koncentrátorů napětí. Zároveň tyto hodnoty slouží jako vstup do kritérií stability, která posuzují, zda v daném koncentrátoru napětí dojde k iniciaci trhliny nebo nikoli. Navržený postup určení hodnot H_1 a H_2 je následující: (i) MKP výpočet rozložení napětí a hustoty deformační energie kolem vrcholu vrubu, (ii) určení předpokládaného směru θ_0 iniciace trhliny (z numerického řešení), (iii) Stanovení poměru hodnot ZSIN $\Gamma_{21} = H_2/H_1$ z jednoznačné závislosti tohoto poměru na směru iniciace θ_0 . (iv) Určení hodnot H_1 a posléze H_2 pomocí střední hodnoty faktoru hustoty deformační energie. Výhodou tohoto postupu je jednak využití konceptu faktoru hustoty deformační energie, který je zvláště vhodný při kombinovaném zatěžování, a také možnost implementace postupu do MKP systému a tedy automatizace výpočtu bez zásahu uživatele. Pro výpočet je nutné pouze zadat integrační vzdálenost d , která souvisí s mechanismem porušování, případně se strukturou materiálu.

8. Poděkování

Tato práce vznikla za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky, projekt č. 101/05/0227.

9. Literatura

- Hilton, P.D. & Sih, G. C. (1973) Applications of the finite element method to the calculations of stress intensity factors. In: *G. C. Sih., Mechanics of Fracture – Methods of analysis and solutions of crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, pp. 426-477.
- Owen D.R.J, Fawkes A.J. (1983) *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge Press Ltd, Swansea,
- Dundurs, J. (1967) *Journal of Composite Materials* 1, p. 310.
- Klusák J. & Knésl Z. (2004) *Stress singularity analysis of bodies with a bi-material notch*, Engineering Mechanics 2004, National conference with international participation, Svratka May 10 – 13 2004, [CD-ROM] ISBN 80-85918-88-9.
- Sih, G.C. (1973) *A special theory of crack propagation*, In: G.C. Sih (Editor), *Mechanics of Fracture – Methods of analysis and solutions of crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, pp. XXI-XLV.
- Klusák, J., Knésl, Z. (2006) *Determination of crack initiation direction from a bi-material notch based on the strain energy density concept*, Computational Materials Science, (In Press).
- Klusák, J. (2005) *Stability criterion of bi-material wedge with two singularities*, Sborník příspěvků mezinárodní konference Applied mechanics 2005, Hrotovice, 29.3. - 1.4.2005, [CD ROM].