im 2006
National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. 269

THE ROPES BEAR MORE.

Z. Kalousek[1], **M. Vyšanská**[2]

Summary: *The paper deals with the properties of the ropes during their longitudinal loading. The internal structure of the ropes implies some additional radial tensions accompanied by the lose of the transversal isotropy of the deformation inside the rope body. The change of internal geometry has its conclusions observable externally; the influence on the mechanical properties of the rope may be significant in some cases. The results of the numerical simulations are presented; sometimes they are surprising.*

1. Deformace délkových útvarů s vnitřní strukturou

Při modelování vlastností materiálů s komplikovanější vnitřní strukturou bývá účelné zavést různá zjednodušení; ta často dovolí nahradit strukturu s množstvím individuálních prvků kontinuem. Pokud ovšem takovéto zjednodušení není provedeno s náležitou opatrností a ohledem na efekty, které do chování materiálu může jeho vnitřní struktura vnést, stává se vypovídací hodnota modelu pochybnou.

Jedním z nejjednodušších materiálů popsaného typu jsou lana, multifily a příze – vesměs se jedná o délkové útvary tvořené systémem jednodušších délkových útvarů (vláken) uspořádaných do dané geometrie. Pomineme případ staplových přízí, jejichž chování může být podstatně ovlivněno konečnou délkou použitých vláken, a budeme se nadále zabývat pouze lany a multifily tvořenými nekonečnými vlákny (přesněji: vlákny, jejichž konce se nenacházejí uvnitř namáhané oblasti lana).

Dosud publikované práce, například [2], pohlížejí na lana jako na klasické kontinuum. Při jejich podélné deformaci se sice sleduje snížení tuhosti dané sklonem vláken v multifilu, ovšem zcela se pomíjejí svěrné účinky vnějších vrstev v lanu na jeho jádrové oblasti. Cílem článku je provést výpočty, které tento vliv zohledňují.

2. Geometrie multifilu a jeho protahování

V dalším textu se budeme zabývat pouze multifily, což jsou nejjednodušší typy lan tvořené nekonečnými vlákny jednoho druhu, umístěnými na šroubovicích se společnou osou (osa lana). Stoupání šroubovic popsané úhlem β (obr.1), který svírá tečna ke šroubovici s osou lana, může záviset na vzdálenosti r vláknové šroubovice od osy; pro všechna vlákna na téže hodnotě r však musí být společné.

[1]RNDr. Zdeněk Kalousek, CSc., Technická univerzita Liberec, fakulta strojní, katedra aplikované kybernetiky, e-mail zdenek.kalousek@tul.cz

[2]Ing. Monika Vyšanská, Technická univerzita Liberec, fakulta textilní, katedra textilních technologií, e-mail monika_vysanska@hotmail.com

Z hlediska praktického použití lan je nejvýznamnějším typem jejich deformace protahování ve směru osy. Ostatním možné deformace (torze, zkosy, ohyby) pomineme. Protahování lana popíšeme relativním prodloužením ε. Současně se vlákna, která se nacházela na poloměru r, přemístí na poloměr $\varrho(r)$. Deformace vláken popíšeme relativními prodlouženími v hlavních směrech – ve směru osy vlákna to bude prodloužení ε_z, prodloužení ve směru radiálním vzhledem k ose lana označíme ε_r a ve směru kolmém na oba předcházející to bude prodloužení ε_t.

Úhel $\beta(r)$, který svírala před deformací vlákna s osou lana, se po deformaci změní na hodnotu $\beta^*(r)$, přičemž

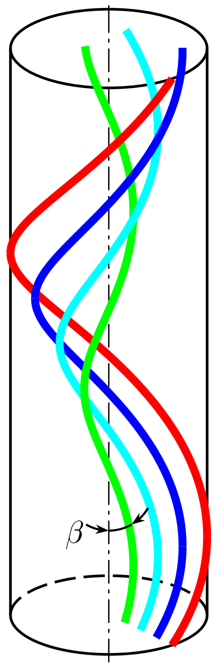
$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{\varrho}{(1+\varepsilon)r}\operatorname{tg}\beta \ .$$

Pro jednotlivá prodloužení v hlavních směrech deformace dostaneme

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z &= \frac{(1+\varepsilon)\cos\beta}{\cos\beta^*} - 1 = \lambda_z - 1 \approx \\
&\approx \varepsilon\cos^2\beta - \left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\sin^2\beta \ , && (1)\\
\varepsilon_r &= \varrho'(r) - 1 \ , && (2)\\
\varepsilon_t &= \frac{\varrho\cos\beta^*}{r\cos\beta} - 1 = \frac{\varrho(1+\varepsilon)}{r\lambda_z} - 1 \approx && (3)\\
&\approx \varepsilon\sin^2\beta - \left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\cos^2\beta \ , && (4)
\end{aligned}$$

kde jsme zavedli

$$\lambda_z = \sqrt{(1+\varepsilon)^2\cos^2\beta + \frac{\varrho^2}{r^2}\sin^2\beta} \ .$$



Obr.1. *Geometrie multifilu*

Vztahy (1) a (4) jsou aproximacemi použitelnými tehdy, když jsou deformace malé, tj. $\varepsilon \ll 1$, $\frac{\varrho}{r} \approx 1$ a $\varrho' \approx 1$.

Výsledky (3), (4) nacházejí uplatnění pouze v případě, že je při deformaci (natahování) lana zachován kontakt vláken v tečném směru, podobně (2) platí pouze tehdy, dotýkají-li se navzájem vlákna na různých poloměrech. Pokud jsou hodnoty ε_z, ε_r takové, že na ně vlákna reagují ve třetím směru deformací ε_t', která je menší než hodnota ε_t udávaná vztahy (3), (4), dojde k rozvolnění kontaktu v tečném směru a k určení hodnoty ε_t' potřebujeme znát kromě geometrických parametrů ε, r, ϱ, β i materiálové vlastnosti vláken. Podobná úvaha se týká i případů, kdy dojde k rozvolnění kontaktu vláken v radiálním směru, popřípadě v tečném i radiálním směru, avšak tyto situace nastávají velmi zřídkakdy.

3. Lineární materiálové modely

Při malých deformacích lze zpravidla aproximovat závislost napětí na deformaci Hookeovým zákonem; v jeho důsledku lze vyjádřit hustotu deformační energie pro transverzálně izotropní materiál podle [1] v případě, kdy jedna z hlavních os deformace splývá s osou symetrie materiálových vlastností, jako

$$w = \tfrac{1}{2}E_1\left[(\varepsilon_r+\varepsilon_t)^2 - 2(1-\nu_{12})\varepsilon_r\varepsilon_t\right] + \sqrt{E_1E_3}\nu_{13}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\varepsilon_z + \tfrac{1}{2}E_3\varepsilon_z^2\ , \tag{5}$$

pro izotropní materiál dostaneme položením $E_1 = E_3 = E$ a $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu$

$$w = \tfrac{1}{2}E\left[\varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \varepsilon_z^2 + 2\nu(\varepsilon_r\varepsilon_t + \varepsilon_r\varepsilon_z + \varepsilon_t\varepsilon_z)\right]\ . \tag{6}$$

Připustíme-li situaci, ve které nedochází ke kontaktu vláken ve směru tečném k lanu, indukují dané hodnoty ε_z, ε_r takovou deformaci ε_t', aby byla hustota energie (5) minimální, tedy

$$\varepsilon_t' = -\nu_{12}\varepsilon_r - \sqrt{\tfrac{E_3}{E_1}}\nu_{13}\varepsilon_z\ . \tag{7}$$

Vztahu (7) použijeme namísto (3) v situaci, kdy bude

$$\varepsilon_t' < \varepsilon_t\ , \tag{8}$$

přitom v mezním případě rovnosti v (8) je možno pracovat s oběma veličinami ε_t, ε_t'.

4. Řešení úlohy s kontaktem v tečném směru

Předpokládejme, že ostrá nerovnost v (8) neplatí pro žádnou hodnotu r, materiál je izotropní a Hookův zákon platí v celém rozsahu deformací. Množinu šroubovicových vláken nyní nahradíme kontinuem, jehož deformační vlastnosti budou vycházet z popsané geometrie, a tedy budou určeny hustotou deformační energie (6). Úlohou je nejprve najít neznámou funkci $\varrho(r)$. Ta bude mít takový průběh, aby minimalizovala celkovou deformační energii, jejíž délkovou hustotu dostaneme integrací výrazu (6) přes celý průřez lana o poloměru R:

$$w_l = \pi E\int_0^R r\left[\varepsilon_z^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + 2\nu\left(\varepsilon_z\varepsilon_t + \varepsilon_r(\varepsilon_z+\varepsilon_t)\right)\right]dr\ . \tag{9}$$

Minimalizace integrálu

$$\int_a^b \omega(r,\varrho(r),\varrho'(r))dr$$

vede (viz např. [3]) na Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varrho} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho'}\right)\ . \tag{10}$$

Realizací této rovnice pro integrand z (9) je

$$\begin{aligned} r\varrho'' + \varrho' \quad = \quad & 1 + (\lambda_z-1)\,\frac{\varrho\sin^2\beta}{r\lambda_z} + \left(\frac{\varrho(1+\varepsilon)}{r\lambda_z} - 1\right)\frac{(1+\varepsilon)^3\cos^2\beta}{\lambda_z^3} + \\ & +\nu\left[(\lambda_z-2)\left(\frac{1+\varepsilon}{\lambda_z} - 1\right) + \left(\frac{\varrho}{r} - 2\right)\left(1 - \frac{\varrho(1+\varepsilon)}{r\lambda_z^2}\right)\frac{\varrho\sin^2\beta}{r\lambda_z} - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{\varrho(1+\varepsilon)}{r\lambda_z^2}\right)\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - (1+\varepsilon)^2\right)\frac{\sin 2\beta}{2\lambda_z}r\beta'\right]\ . \end{aligned} \tag{11}$$

Deformaci lana bude popisovat takové řešení výsledné diferenciální rovnice druhého řádu na intervalu $\langle 0, R\rangle$, které bude vyhovovat okrajovým podmínkám

$$\varrho(0) = 0 \,, \tag{12}$$

$$\sigma_r(R) = \left.\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_r}\right|_{r=R} = E\left[\varrho'(R) - 1 + \nu\left(\lambda_z(R) + \frac{\varrho(R)(1+\varepsilon)}{R\lambda_z(R)} - 2\right)\right] = 0 \,. \tag{13}$$

První podmínka je důsledkem toho, že body osy lana se posouvají pouze ve směru protahování, druhá podmínka je ekvivalentem nulové Neumannovy podmínky na povrchu lana.

Kromě uvedených dvou podmínek má smysl požadovat, aby řešení takto formulované úlohy vyhovovalo ještě dalším fyzikálně podloženým požadavkům: funkce $\varrho(r)$ musí být rostoucí na $\langle 0, R\rangle$ a její derivace musí být omezená na $(0, R)$. Pokud najdeme řešení úlohy pro rovnici (11) vyhovující podmínkám (12) a (13), které uvedené požadavky nesplňuje, je žádoucí uvažovat o smysluplnosti zadání řešených rovnic.

5. Linearizované řešení problému s kontaktem.

Pokus o analytické řešení rovnice (11) je vzhledem ke komplikovanosti její pravé strany odsouzen k nezdaru. Pro malé deformace lze však využít přibližných vztahů (1), (4), což spolu s dalšími zanedbáními nekonečně malých veličin druhého a vyšších řádů rovnici (11) značně zjednoduší.

Při $\varepsilon \ll 1$, $\frac{\varrho}{r} \approx 1$ a $\varrho' \approx 1$ dostaneme linearizací (11)

$$r\varrho'' + \varrho' - \left(1 - 2(1-\nu)\sin^2\beta\cos^2\beta\right)\frac{\varrho}{r} = 2(1-\nu)(1+\varepsilon)\sin^2\beta\cos^2\beta \,, \tag{14}$$

okrajová podmínka (13) bude mít při malých deformacích podobu

$$\varrho'(R) - 1 + \nu\left(\varepsilon + \frac{\varrho(R)}{R} - 1\right) = 0 \,. \tag{15}$$

Vlastnosti řešení této úlohy budou určujícím způsobem ovlivněny závislostí úhlu β na vzdálenosti r vlákna od osy lana. Úloha je nejjednodušší při konstantním β; tehdy dostaneme Bernoulliho rovnici. V triviálním případě $\nu = 1$ nebo $\sin 2\beta = 0$ má okrajová úloha dobře známé řešení $\varrho(r) = \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu}\varepsilon\right) r$, v ostatních situacích je řešením funkce

$$\varrho(r) = (1+\varepsilon)r - \frac{(1+2\nu)\varepsilon R}{\sqrt{1 - 2(1-\nu)\sin^2\beta\cos^2\beta} + \nu} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sqrt{1-2(1-\nu)\sin^2\beta\cos^2\beta}} .$$

Toto řešení není uspokojivé. Lze snadno zjistit, že vždy existuje hodnota $r_0 \in (0, R)$ taková, že při $r < r_0$ je $\varrho(r) < 0$, jsou proto namístě pochybnosti o správnosti zadání úlohy. Tu lze buď odmítnout jako konstrukčně nerealizovatelnou (problémem je vytvoření šroubovicových vláken s konstantním úhlem stoupání β při $r \to 0$), nebo je nutno zavrhnout hookeovský koncept (6). Ukazuje se, že samotné opuštění linearizace rovnice (11) kvalitativně jiné výsledky nedává.

Charakter řešení úlohy se podstatně změní, přidáme-li technologicky podmíněný požadavek

$$\lim_{r\to 0} \beta(r) = 0 \,. \tag{16}$$

Tato formulace je ještě málo obsažná, avšak lze vyslovit tvrzení, které je splněním (16) podmíněno:

Věta 1: Nechť je

$$\int_0^R \frac{\sin^2\beta(t)\cos^2\beta(t)}{t}dt = q\cdot\frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \tag{17}$$

pro nějaké $q<1$ a platí (16). Pak pro každé $\varepsilon < \frac{1-q}{\frac{\nu}{1+\nu}+q}$ existuje dvakrát derivovatelná rostoucí funkce $\varrho(r)$, která řeší rovnici (14) při okrajových podmínkách (12) a (15)
DůKAZ: Zavedeme funkci

$$u(r) = 1-\frac{\varrho}{r}\ .$$

Je-li funkce u omezená, je daná okrajová úloha ekvivalentní integrální rovnici pro $u(r)$

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{\nu}{1+\nu}\varepsilon + (1-\nu)\int_0^r \left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{t}{R^2}+\frac{t}{r^2}\right](u(t)+\varepsilon)\sin^2\beta(t)\cos^2\beta(t)dt + \\ &\quad +(1-\nu)\int_r^R\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{t}{R^2}+\frac{1}{t}\right](u(t)+\varepsilon)\sin^2\beta(t)\cos^2\beta(t)dt\ . \end{aligned} \tag{18}$$

Zobrazení Φ, které funkci $u(r)$ přiřazuje funkci definovanou výrazem na pravé straně rovnice (18), je kontraktivní na množině funkcí nezáporných a omezených na intervalu $\langle 0,R\rangle$, koeficient kontrakce nepřevyšuje hodnotu q. Podle Banachovy věty má rovnice (18) na $C\langle 0,R\rangle$ právě jedno nezáporné řešení a toto řešení lze získat jako limitu posloupnosti Picardových aproximací

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n\ ,$$

kde $u_1\in C\langle 0,R\rangle$ libovolná, $u_n=\Phi(u_{n-1})$ pro $n>1$. Z vlastností kontraktivního zobrazení vyplývají i ostatní tvrzení věty. □

Nalezené řešení úlohy bude použitelné, pokud v žádném bodě intervalu $\langle 0,R\rangle$ nebude platit nerovnost (8). Linearizace nerovnosti opačné k (8) vede po dosazení z (4) a (7) pro izotropní materiály na nerovnici, která může být splněna pouze za předpokladu

$$\left[\nu+\cos^2\beta(R)\right](1-\nu)\geq(1-q)(1+\nu)\ . \tag{19}$$

Ukazuje se, že tento požadavek je poměrně silný. Kupříkladu pro ideální kroucené lano, které je charakterizováno závislostí

$$\operatorname{tg}\beta(r) = k\cdot r = \operatorname{tg}\beta(R)\cdot\frac{r}{R} \tag{20}$$

dostaneme $q=\frac{1-\nu}{1+\nu}\sin^2\beta(R)$, a pro takovéto q není (19) splněna nikdy.

Musíme tudíž připustit rozvolnění mezivlákenných kontaktů v povrchových oblastech lana. Podobné výsledky lze očekávat pro většinu technologicky významných průběhů funkcí $\beta(r)$.

6. Řešení úlohy bez kontaktu vláken v povrchové oblasti

Na základě předcházejících výpočtů budeme předpokládat, že v povrchové části lana bude platit nerovnost (8), zatímco ve vnitřní části lana kontakt vláken ve všech směrech nastávat bude. V povrchové oblasti je třeba ještě sestavit Lagrangeovy rovnice (10). Ty vedou po linearizaci na

$$\begin{aligned} r\varrho'' + \varrho' &= \frac{\varrho}{r}\sin^4\beta + \cos^2\beta(1+\sin^2\beta) + \varepsilon\cos^2\beta\left(\sin^2\beta - \frac{\nu}{1+\nu}\right) - \\ &\quad - \frac{2\nu r}{1+\nu}\left(\frac{\varrho}{r} - 1 - \varepsilon\right)\sin\beta\cos\beta\beta'\ ; \end{aligned} \tag{21}$$

Neumannova okrajová podmínka má nyní tvar

$$(1+\nu)\left(\varrho'(R)-1\right) + \nu\left[\varepsilon\cos^2\beta(R) + \left(\frac{\varrho(R)}{R} - 1\right)\sin^2\beta(R)\right] = 0\ . \tag{22}$$

Nechť r_K je hraniční bod mezi oblastí, na níž platí rovnice (14), a oblastí platnosti (21). V tomto bodě musí platit rovnost charakterizující přechod mezi oběma oblastmi, tj.

$$\begin{aligned} &\varepsilon\sin^2\beta(r_K) - \left(1 - \frac{\varrho(r_K)}{r_K}\right)\cos^2\beta(r_K) + \\ +\nu&\left[\varrho'(r_K) + \varepsilon\cos^2\beta(r_K) - \left(1 - \frac{\varrho(r_K)}{r_K}\right)\sin^2\beta(r_K) - 1\right] = 0\ . \end{aligned} \tag{23}$$

Tato podmínka spolu s požadavkem spojitosti funkce ϱ a radiálního napětí v bodě r_K zajišťuje i spojitost funkce $\varrho'(r)$.

Problémem je chybějící informace o poloze hraniční hodnoty r_K. V první fázi řešení ale můžeme vycházet z předpokladu, že tuto hodnotu známe. Na intervalu $\langle 0, r_K\rangle$ lze využít postupu z předcházejícího odstavce. Odlišná okrajová podmínka (23) v pravém krajním bodě intervalu dává rovnici

$$\begin{aligned} u(r) &= \varepsilon\frac{\sin^2\beta(r_K) + \nu\cos^2\beta(r_K)}{\cos^2\beta(r_K) + \nu\left(1+\sin^2\beta(r_K)\right)} + \\ &+ \frac{1-\nu}{4}\left\{\int_0^r \frac{t}{r^2}(u(t)+\varepsilon)\sin^2 2\beta(t)dt + \int_r^{r_K}\frac{1}{t}(u(t)+\varepsilon)\sin^2 2\beta(t)dt - \right. \\ &\left. - \frac{(1-\nu)\cos^2\beta(r_K)}{\cos^2\beta(r_K) + \nu\left(1+\sin^2\beta(r_K)\right)}\int_0^{r_K}\frac{t}{r_K^2}(u(t)+\varepsilon)\sin^2 2\beta(t)dt\right\}\ . \end{aligned} \tag{24}$$

Za předpokladu ještě o něco slabšího než (17) lze řešení integrální rovnice (24) dostat znovu jako limitu posloupnosti Picardových aproximací, neboť platí

Věta 2: Nechť je splněna nerovnost

$$\int_0^R \frac{\sin^2\beta(t)\cos^2\beta(t)}{t}dt = q\cdot\frac{1}{1-\nu} \tag{25}$$

pro nějaké $q < 1$. Pak pro každé $r_K \in (0, R\rangle$ a každé $\varepsilon < \frac{1-q}{\frac{1}{2\nu}+q}$ existuje funkce $u(r)$, která řeší rovnici (24), a přitom funkce $\varrho = r - ru$ je rostoucí a lipschitzovská na intervalu $\langle 0, r_K\rangle$, .

Důkaz: Je velmi podobný důkazu Věty 1, proto jej neuvádíme. □

Rovnici (21) na intervalu $\langle r_K, R\rangle$ můžeme po její formulaci pro funkci $u(r)$ interpretovat jako soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} u' &= v \,, && (26)\\ v' &= -\tfrac{3}{r}v - \left[\tfrac{1}{r^2}(1+\sin^2\beta)\cos^2\beta + \tfrac{2\nu}{(1+\nu)r}\sin\beta\cos\beta\beta'\right]u - \\ &\quad - \left[\tfrac{1}{r^2}\cos^2\beta\left(\sin^2\beta - \tfrac{\nu}{1+\nu}\right) + \tfrac{2\nu}{(1+\nu)r}\sin\beta\cos\beta\beta'\right]\varepsilon \,. && (27) \end{aligned}$$

Pokud je funkce $\cos^2\beta(r)$ lipschitzovská na $\langle 0, R\rangle$, je pro každé $r_K > 0$ soustava rovnic (26), (27) s počátečními podmínkami $u(r_K) = u_K$, $v(r_K) = v_K$ řešitelná jednoznačně na $\langle r_K, R\rangle$. Počáteční hodnoty $u_K, v_K = u'(r_K)$ jsou určeny hodnotami řešení (18) v bodě r_K.

Je-li pro dané r_K zkonstruováno řešení $u(r)$, $v(r)$, lze vypočítat hodnotu radiálního napětí $\sigma_R(z) = \sigma_r(R)|_{r_K=z}$. Napětí σ_r je vyjádřeno pomocí funkcí u, v jako

$$\sigma_r(r) = E(1-\nu)\left\{(1+\nu)\left[-u(r) - rv(r)\right] + \nu\left[\varepsilon\cos^2\beta(r) - u(r)\sin^2\beta(r)\right]\right\} \,.$$

Hodnotu kontaktního poloměru r_K pak určíme numericky jako řešení rovnice

$$\sigma_R(r_K) = 0 \,.$$

Existence tohoto řešení dosud není zaručena. Lze však dokázat, že pro funkce $\beta(r)$ neklesající na $\langle 0, R\rangle$ je podmínka

$$(1-\nu)\cos^2\beta(R) + \nu\left[2q - (1+\nu)\right] \le 0 \tag{28}$$

postačující pro to, aby hodnota $\sigma_R(R)$ byla záporná. Dále je možno odhadnout napětí σ_R při volbě kontaktního poloměru $r_K \to 0$. Zavedeme funkci

$$\tau(r) = \frac{e^{\int\left[1-\frac{\nu}{1+\nu}\sin^2\beta(r)\right]dr}\sigma_r(r)}{E(1-\nu)(1+\nu)} \,. \tag{29}$$

Za pomoci funkce $\tau(r)$ můžeme vyslovit při splnění určitých postačujících podmínek závěry týkající se hodnoty napětí $\sigma_R(0)$:

Věta 3: Nechť je $\beta(r)$ spojitá na $\langle 0, R\rangle$, $\beta(0) = 0$ a funkce $\frac{\operatorname{tg}^2\beta(r)}{r}$ je nerostoucí na $(0, R\rangle$. Pak je hodnota

$$\sigma_R(0) = \lim_{r_K\to 0}\sigma_R(r_K)$$

pro kladné prodloužení lana ε kladná.

DŮKAZ: Pro funkci τ lze ukázat, že je při $r_k \to 0$ rostoucí a nezáporná na nějakém pravém okolí bodu $r = 0$ – to vyplývá z přímého výpočtu napětí σ_r. Kdyby tato funkce měla být v nějaké části intervalu $(0, R)$ klesající, musela by mít uvnitř tohoto intervalu stacionární bod r_s. Výpočtem lze ověřit, že v takovémto stacionárním bodě by muselo platit

$$\tau''(r_s) > -\frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2}\hat{f}(r_s)\cos^4\beta(r_s)\varepsilon\left(\frac{\operatorname{tg}^2\beta(r)}{r}\right)'_{r_s} \ge 0 \,.$$

Výsledkem je spor, neboť funkce τ má v bodě r_s svého předpokládaného lokálního maxima kladnou druhou derivaci. Funkce τ musí tedy být rostoucí, a v důsledku toho i kladná, na celém intervalu $(0, R\rangle$, a dále z (29) vyplývá i kladné znaménko napětí $\sigma_r(r)$ na $(0, R\rangle$. □

Ze spojitosti funkce $\sigma_R(r_K)$, z její kladnosti při $r_K = 0$ za předpokladů Věty 3. a z její záporné hodnoty pro $r_K = R$ při splnění (28) vyplývá, že existuje hodnota $r_K \in (0, R)$ tak, že $\sigma_R(r_K) = 0$, tedy deformace popsaná nalezenou funkcí $\varrho(r)$ vyhovuje nulové Newtonově okrajové podmínce na povrchu lana.

7. Numerické experimenty

V první fázi budeme hledat výsledky pro aspoň jednu distribuci $\beta(r)$, která vyhovuje postačujícím podmínkám existence řešení formulovaným v předcházejícím odstavci. Takovou distribucí je

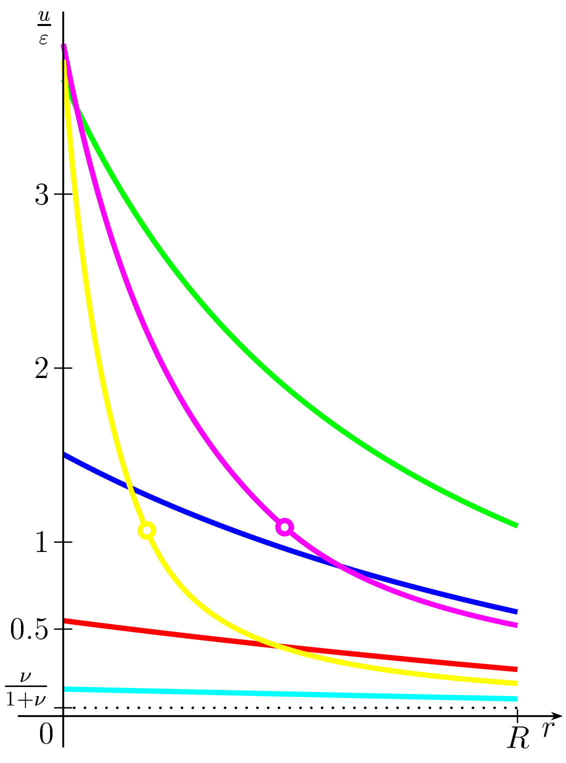
$$\beta = \operatorname{arctg}\left(k\sqrt{r}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{r}{R}}\operatorname{tg}\beta_R\right) , \tag{30}$$

neboť vyhovuje předpokladům Věty 3, a pokud jde o podmínku Věty 2, dává vztah (25)

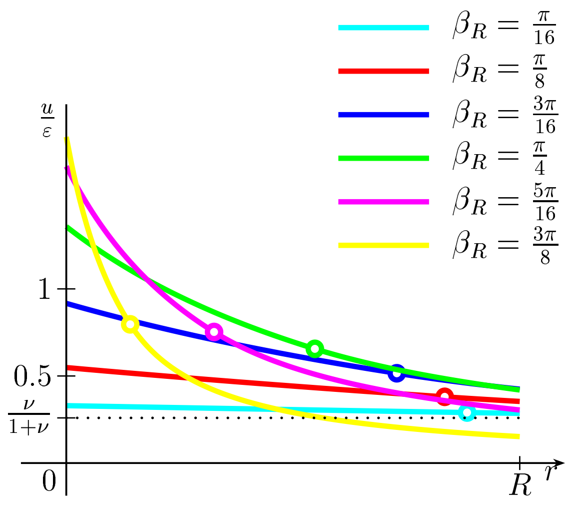
$$q = (1-\nu)\int_0^R \frac{k^2 t}{t(1+k^2t)^2}dt = (1-\nu)\sin^2\beta_R < 1 \ .$$

Funkce $\beta(r)$ je neklesající, proto lze hledat takové hodnoty parametru ν, aby platilo (28); výpočet ukazuje, že této podmínce nepochybně vyhovují všechny hodnoty $\nu \geq \frac{1}{2}$.

Na grafech na obr. 2. až 5. jsou znázorněny průběhy funkcí $\frac{u(r)}{\varepsilon}$ – tento zlomek představuje v jistém smyslu ekvivalent Poissonova poměru – při různých hodnotách parametrů ν a povrchových úhlů $\beta_R = \beta(R)$. Hodnotě $\beta_R = 0$ odpovídá konstantní $u = \frac{\nu}{1+\nu}$. Poloha poloměru r_K, na kterém dochází ke ztrátě kontaktu, je vyznačena prázdným kroužkem. Pro materiály s velmi malou hodnotou parametru $\nu = 0,05$ je při dostatečně malých povrchových úhlech (do $\frac{\pi}{4}$) zachován plný kontakt mezi vlákny v celém průřezu struktury.

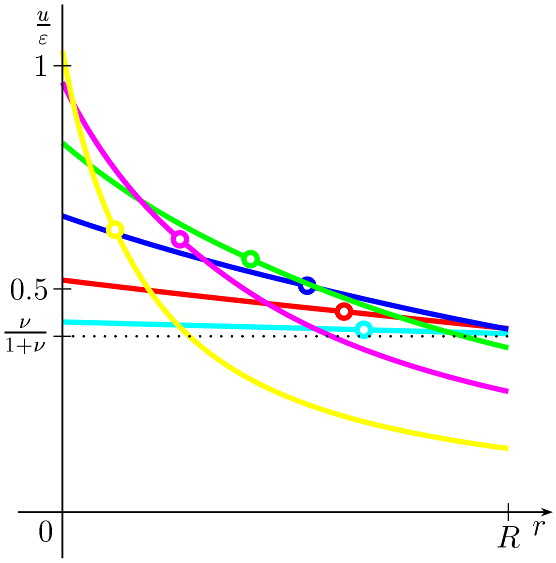


Obr.2. Příčné deformace, $\operatorname{tg}\beta = k\sqrt{r}$, $\nu = 0,05$

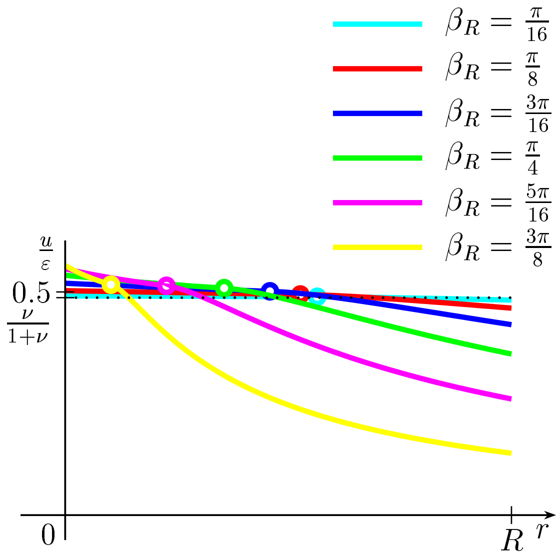


Obr.3. Příčné deformace, $\operatorname{tg}\beta = k\sqrt{r}$, $\nu = 0,35$

Ukazuje se, že pro materiály s malou hodnotou parametru ν lze při úhlech β_R mírně přesahujících hodnotu $\frac{\pi}{4}$ vytvořit v oblasti osy lana extrémní stlačení dosahující několikanásobku hodnoty relativního prodloužení. Pro některé hodnoty povrchových úhlů lze navíc dosáhnout poměru mezi relativním příčným zkrácením u a relativním prodloužením ε většího než $\frac{1}{2}$ v celém průřezu multifilu; lano se tedy chová navenek jako materiál s jinak nedosažitelným Poissonovým poměrem větším než $\frac{1}{2}$.



Obr.4. Příčné deformace, $\operatorname{tg}\beta = k\sqrt{r}$, $\nu = 0,65$



Obr.5. Příčné deformace, $\operatorname{tg}\beta = k\sqrt{r}$, $\nu = 0,95$

Vraťme se nyní ke krouceným multifilům s distribucí $\beta(r)$ popsanou vztahem (20). Tato závislost sice nevyhovuje postačující podmínce existence řešení úlohy z Věty 3, ovšem přesto lze zkusit, zda tato podmínka není příliš silná; je však nutno počítat s možností neúspěchu. Při numerickém testování taková situace nenastala.

V kapitole 5. jsme dále dokázali, že pro zkoumaný materiál nelze dosáhnout nulového napětí σ_r bez rozvolnění kontaktů mezi vlákny v tečném směru; je tedy vždy $\sigma_R(R) < 0$.

Grafy na obr. 6. až 9. znázorňují průběhy funkcí $\frac{u(r)}{\varepsilon}$ při stejných hodnotách ν a β_R jako u multifilů s distribucí (30). Efekty pozorovatelné pro lana se závislostí (30) zde nastávají rovněž, pouze v méně výrazné podobě.

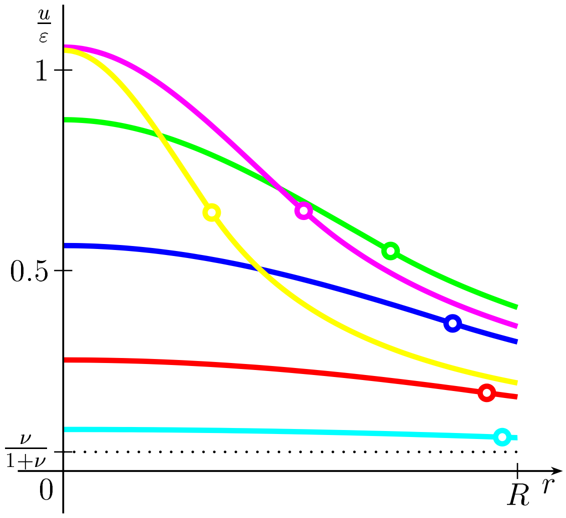
Zajímavé je vyhodnocení poměru modulu pružnosti

$$Y = \frac{1}{\pi R^2}\frac{d^2 w_l}{d\varepsilon^2},$$

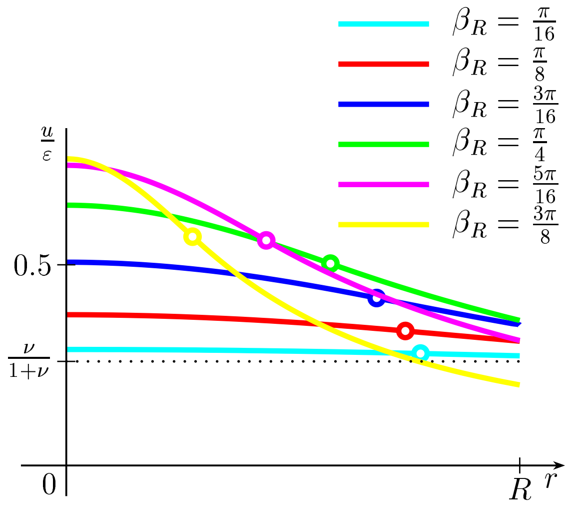
a modulu pružnosti Y_0 materiálu bez struktury. Délková hustota deformační energie w_l se dostane integrací (6) analogicky k (9), je však třeba uvážit, že pro $r > r_K$ je nutno pracovat s deformací ε'_t.

Závislost modulu pružnosti na sklonu povrchových vláken β_R při různých materiálových parametrech ν je pro obě sledované distribuce úhlu β uvnitř multifilu znázorněna na grafech v obr. 10, 11. Pro ideální kroucené lano (obr.11) je tato závislost poměrně blízká průběhu funkce $\cos^2\beta_R$, což je výsledek uváděný [2]; odchylky ale nelze v oblastech úhlů blízkých $\beta_R \sim \frac{\pi}{4}$ zanedbat.

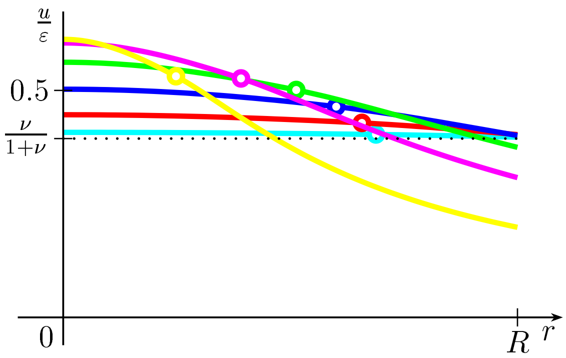
Při orientaci vláken v multifilu popsané vztahem (30) stojí za pozornost především zvýšení modulu pružnosti při $\nu \lesssim 0,1$ v oblasti úhlů kolem $\frac{\pi}{4}$ nad hodnotu modulu pružnosti samotného materiálu. Tento efekt nás opravňuje tvrdit to, co je uvedeno v názvu příspěvku, nehledě na to, že větší pevnost takovéhoto multifilu bude pravděpodobně ještě doprovázena vzrůstem tažnosti – ta bývá radiálními tlaky ovlivňována pozitivně.



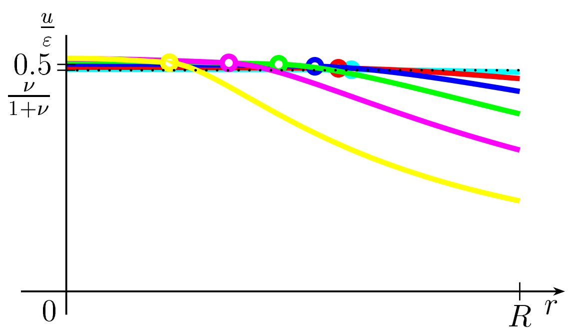
Obr.6. Příčné deformace, $\mathrm{tg}\,\beta = kr$, $\nu = 0,05$



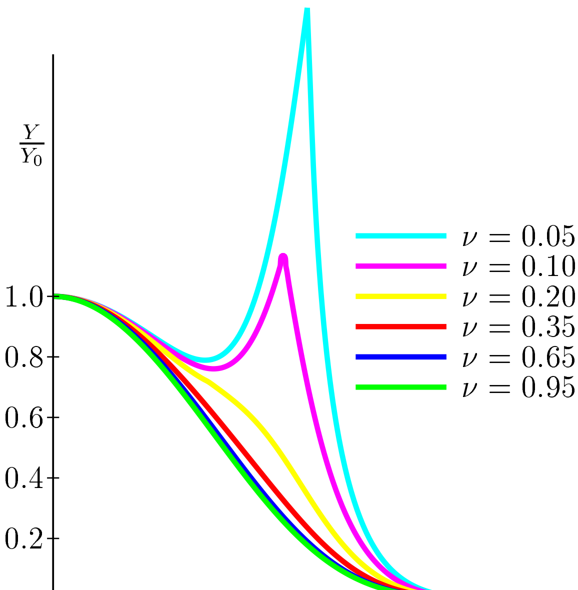
Obr.7. Příčné deformace, $\mathrm{tg}\,\beta = kr$, $\nu = 0,35$



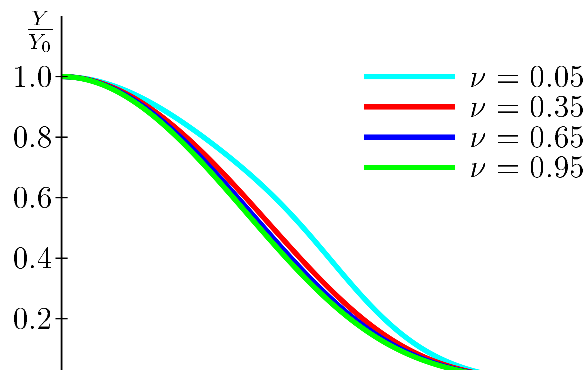
Obr.8. Příčné deformace, $\mathrm{tg}\,\beta = kr$, $\nu = 0,65$



Obr.9. Příčné deformace, $\mathrm{tg}\,\beta = kr$, $\nu = 0,95$



Obr.10. Moduly pružnosti, $\mathrm{tg}\,\beta = k\sqrt{r}$



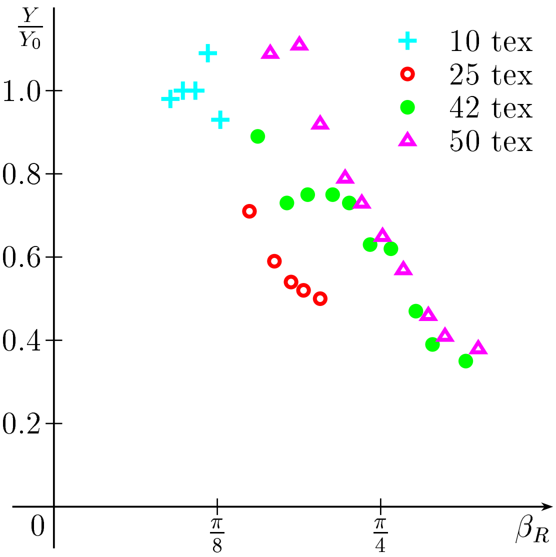
Obr.11. Moduly pružnosti, $\mathrm{tg}\,\beta = kr$

8. Test výsledků na dvojmo skaných přízích

Jednoduchým reprezentantem struktur podobných multifilům jsou dvojmo skané příze. Elementární jednotkou je zde jednoduchá příze; dvojmo skaná příze vznikne zakroucením dvojice původně rovnoběžných jednoduchých přízí. Průřez takto vzniklého materiálu může být s dobrou přesností aproximován elipsou s nepříliš velkou excentricitou a poněkud hruběji kruhem.

Byly sledovány moduly pružnosti dvojmo skaných prstencových bavlněných přízí s různými skacími zákruty ovlivňujícími povrchový úhel β_R. Naměřené poměry modulů pružnosti dvojmo skaných a jednoduchých přízí s různými jemnostmi (délkovými hustotami) jsou znázorněny na grafech v obr. 12.

S výjimkou příze 25 tex lze na všech ostatních grafech pozorovat tendenci k vytváření maxima závislosti modulu pružnosti na úhlu β_R; pro hrubší příze se toto maximum nachází v blízkosti hodnoty $\beta_R = \frac{\pi}{5}$, pro přízi 10 tex by toto maximum bylo blízko hodnoty $\frac{\pi}{10}$. Bohužel, pro příze 10 a 25 tex nebylo k dispozici více experimentálního materiálu, takže rozsah zpracovávaných dat nemá dostatečnou vypovídací hodnotu.



Obr.12. Závislost modulu pružnosti dvojmo skané příze na sklonu povrchových vláken.

Rozborem vlastní vnitřní struktury jednoduchých přízí dojdeme k závěru, že rozložení orientací vláken tvořících jednoduché příze ve výsledné dvojmo skané přízi odpovídá spíše případu popsanému vztahem (30), tedy růst úhlu $\beta(r)$ je zpočátku strmý, později pozvolný. Pak ovšem existence lokálních maxim poměru $\frac{Y}{Y_0}$ ani hodnota těchto poměrů přesahující v některých případech jedničku není překvapující.

9. Řešení úlohy pro dvouvrstvá lana

Řada prakticky používaných lan (například horolezecká lana) je konstruována jako vícevrstvé systémy. Jádrová oblast je tvořena rovnoběžnými vlákny (prakticky se ovšem znovu používá sada rovnoběžných slabých kroucených šňůr), vnější – poměrně slabou – vrstvu tvoří oplet. Jádro mívá zpravidla menší modul pružnosti[3].

Deformační úlohu pro takto vytvořené lano lze řešit analyticky. Materiálové parametry jádra označíme E_1, ν_1, pro oplet budeme pracovat s hodnotami E_2, ν_2. Je-li oplet dostatečně slabý, lze považovat sklon vláken v opletu za konstantní.

V jádrové oblasti bude problém popsán rovnicí (14) při $\beta = 0$; tato rovnice má za podmínky (12) řešení

$$\varrho(r) = k \cdot r \ . \tag{31}$$

V oblasti opletu bude hledaná funkce $\varrho(r)$ řešením rovnice (21), ve které ale díky

[3] a větší tažnost, což není z hlediska malých deformací, kterými se zabývá článek, podstatné

nezávislosti úhlu β na proměnné r vypadne poslední člen na pravé straně. K okrajové podmínce (22) přibude pořadavek spojitosti radiálního napětí v bodě r_K. Zjednodušená rovnice (21) má obecné řešení

$$\varrho(r) = C_1 r^{\sin^2\beta} + C_2 r^{-\sin^2\beta} + \left(1 + \frac{\sin^2\beta - \frac{\nu_2}{1+\nu_2}}{1+\sin^2\beta}\varepsilon\right) r \ ;$$

koeficienty C_1, C_2 určíme spolu s koeficientem k v (31) z okrajové podmínky (22) a ze spojitosti funkce $\varrho(r)$ a napětí σ_r na hranici mezi jádrem a opletem. Lze dokázat, že výsledná soustava tří lineárních rovnic je vždy jednoznačně řešitelná.

Vezměme modelovou situaci typickou pro horolezecká lana – úhel $\beta = \frac{\pi}{4}$, poloměr jádra $r_K = 0,75R$. Dále budeme předpokládat hodnoty $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,5$, a poměr hodnot $E_1 = \frac{1}{6}E_2$. Řešením rovnic rovnováhy v opletu je funkce

$$\varrho(r) = r + \left[-0.45178\sqrt{rR} - 0.01467\sqrt{\frac{R^3}{r}} + \frac{1}{9}r\right]\varepsilon \ ,$$

v jádru dostáváme

$$\varrho(r) = (1 - 0.43315\varepsilon)r \ .$$

Dalším výpočtem bychom zjistili, že energie potřebná na elastickou deformaci jádra je v tomto případě přibližně o 10% větší než při jeho prostém relativním prodloužení ε. Vhodnou manipulací s parametry $\nu_{1,2}$, $E_{1,2}$ a úhlem β lze dosáhnout ještě výraznějších efektů. Schopnost lana absorbovat při deformaci energii (například pro horolezecká lana to je typicky energie pádu lezce) ve formě méně ohrožující jeho užitné vlastnosti je dalším důvodem pro tvrzení z názvu článku.

10. Závěry

Provedené výpočty dokumentují, že vhodným uspořádáním vláken v multifilu a volbou vlákenného materiálu lze vytvořit strukturu, která má téměř libovolné mechanické vlastnosti; přitom jsme ani nepřihlíželi k možnosti vytvořit lano komponované ze sady multifilů, což je ovšem běžná praxe.

Vyhodnocené experimenty napovídají, že na některé překvapující výsledky vytvořeného modelu lze narazit u reálných materiálů; je pravdou, že porovnání modelu a měření je trochu znehodnoceno faktem, že příze samotné jsou materiálem velmi pravděpodobnostního charakteru, a proto se na získané číselné hodnoty nelze příliš spoléhat.

Poděkování: Práce vznikla s podporou VCTII – 1M4674788501.

Literatura:

[1] Černych, K. F.: *Vveděnije v anizotropnuju uprugosť*, Nauka, Moskva, 1988.

[2] McKenna, H. A., Hearle, J. W. S., O'Hear, N.: *Handbook of fibre rope technology*, Woodhead Publishing, Cambridge, 2005.

[3] Okrouhlík, M. et al.: *Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače*, Ústav termomechaniky, Praha, 1997.