

## IMPACT OF THE SHAPE OF THE YIELD SURFACE ON THE BEHAVIOR OF CLAYEY SOILS

**T. Janda, M. Šejnoha<sup>1</sup>**

**Summary:** *The scope of this contribution is a response of fine grained clayey soils under mechanical load. A generalized formulation of modified Cam clay material model is introduced. This formulation deals with unrealistic softening behaviour that predicts the modified Cam clay formulation by reducing the yield surface in the dilatation domain. Further the generalized formulation adopts a dependency of the yield surface to the Lode angle and cohesion similarly to Mohr-Coulomb model. The formulation of the model requires six material parameters such as compression and swelling moduli, friction angel, cohesion and initial porosity which can be easily obtained from standard tests. Finally a number of numerical results demonstrate the behaviour of this critical state model and the influence of the yield surface.*

### 1. Úvod

Standardním přístupem k popisu mechanických vlastností zeminy se stalo formulování kontinuálních elasto-plastických materiálových modelů. V geotechnické praxi je nejpoužívanější Mohr-Coulombův model, který však nese jistá omezení. Materiálové parametry Mohr-Coulombova modelu vykazují značnou závislost na ulehlosti zeminy a pokud dochází k plastickému přetváření model předpovídá dilataci materiálu nehledě na jeho aktuální ulehlost.

První snahy o zpřesnění elasto-plastických modelů vedly na formulování modelu kritického stavu představeného v [Roscoe at al. 1958]. Koncepce kritického stavu říká, že pro každé střední napětí působící na zeminu existuje jistý kritický objem, kterého zemina dosáhne při neomezených smykových deformacích. V současnosti je typickým představitelem modelů kritického stavu modifikovaný Cam clay, který byl představen v [Roscoe and Burland 1968].

### 2. Konstitutivní vztahy

Základním vztahem mezi napětím a deformací modifikovaného Cam clay modelu je bilineární diagram izotropní konsolidace, který je dán rovnicemi

$$e = e_0 - \lambda \ln(\sigma_m), \quad (1)$$

$$\bar{e} = \bar{e}_0 - \kappa \ln(\sigma_m) \quad (2)$$

<sup>1</sup> Ing. Tomáš Janda, Doc. Michal Šejnoha, Ph.D., Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 - Dejvice, tel. +420 224 354 498, e-mail tomas.janda@fsv.cvut.cz

kde parametry  $\kappa$  a  $\lambda$  jsou sklony linie normální konsolidace a rekonsolidace viz Obrázek 1. Symbol  $e_0$  označuje číslo pórovitosti nekonsolidované zeminy a stavový parametr  $p_c$  udává strukturní pevnost. Zavedeme-li předpoklad, že zrna zeminy jsou objemově nestlačitelná můžeme rovnice (1) a (2) zapsat v přírůstkovém tvaru pro objemovou deformaci

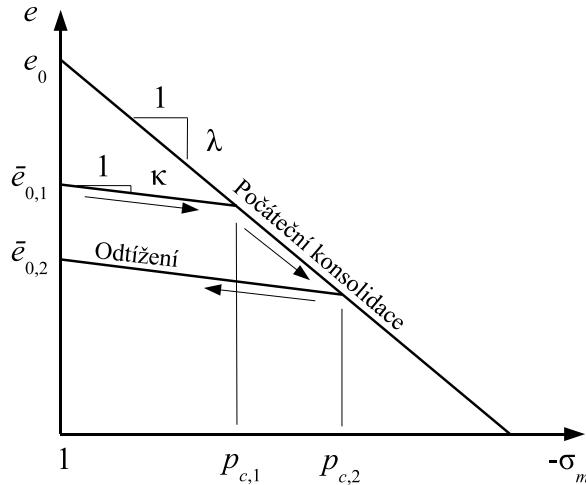
$$\varepsilon_v^{el,i+1} = \varepsilon_v^{el,i} - \kappa^* \ln \left( \frac{\sigma_m^{i+1}}{\sigma_m^i} \right), \quad (3)$$

$$\varepsilon_v^{pl,i+1} = \varepsilon_v^{pl,i} - (\lambda^* - \kappa^*) \ln \left( \frac{\sigma_m^{i+1}}{\sigma_m^i} \right), \quad (4)$$

kde parametry  $\lambda^*$  a  $\kappa^*$  nabývají hodnot

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{1+e}, \kappa^* = \frac{\kappa}{1+e} \quad (5)$$

a  $e$  je aktuální číslo pórovitosti.



Obrázek 1: Bilineární diagram izotropní konsolidace

Funkce plasticity vychází z modifikovaného modelu Cam clay. V podkritické oblasti t.j. pro  $\sigma_m \leq -p_c/2$  zůstává funkce plasticity eliptická. Pokud dojde k vývoji plasticity v podkritické oblasti zemina dilatuje. V nadkritické oblasti t.j. pro  $\sigma_m > -p_c/2$  je eliptický průběh nahrazen funkcí, která se tvarem blíží Mohr-Coulombovu modelu. Tato změna omezuje změkčení překonsolidovaných zemin, které klasická formulace modifikovaného modelu Cam clay přeceňuje. Rovnice definující plochu plasticity pomocí invariantů napětí nabývá tvaru

$$F = \begin{cases} F_c, & \text{pro } \sigma_m \leq -p_c/2 \text{ oblast kontrakce,} \\ F_d, & \text{pro } \sigma_m > -p_c/2 \text{ oblast dilatace,} \end{cases} \quad (6)$$

$$F_c = \frac{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{2g^2(\theta, \varphi_{cv})} + (\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma})^2 + \mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma} p_c, \quad (7)$$

$$F_d = \frac{\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{2\tilde{g}^2(\theta, \varphi, \varphi_{cv})} - (\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma})^2 + (-\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma})^{1+\alpha} \tilde{p}_c^{1-\alpha}. \quad (8)$$

Do zobecněné formulace je na rozdíl od modifikovaného Cam clay modelu zavedena závislost plochy plasticity na Lodeově úhlu  $\theta$ . Plocha plasticity hladce approximuje Mohr-Coulombův model způsobem patrným z Obrázku 2. Sklon linie kritického stavu  $g$  nabývá hodnoty

$$g(\theta, \varphi_{cv}) = X(Y_1 + Y_2 \sin 3\theta)^{-Z}, \quad (9)$$

$$X = 2^{(Z+1)}\sqrt{3} \sin \varphi_{cv}, \quad (10)$$

$$Y_1 = (3 - \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}} + (3 + \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}}, \quad (11)$$

$$Y_2 = (3 - \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}} - (3 + \sin \varphi_{cv})^{\frac{1}{Z}}. \quad (12)$$

Aby byla zajištěna spojitost mezi oběma plochami je třeba zvolit směrnici  $\tilde{g}$  ve tvaru

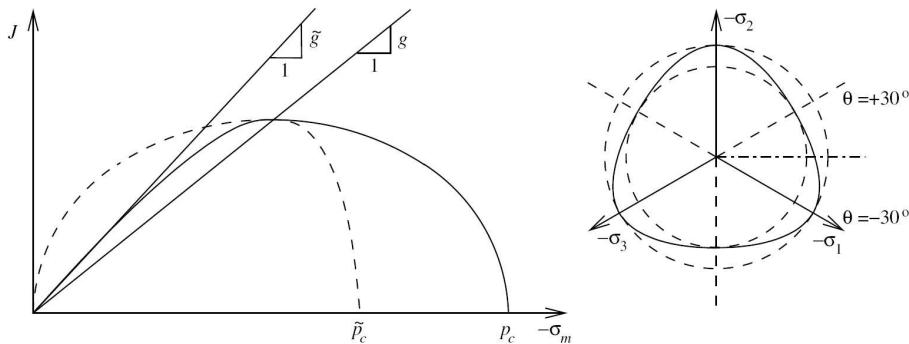
$$\tilde{g}(\theta, \varphi, \varphi_{cv}) = \frac{\sin \varphi (3 - \sin \varphi_{cv})}{\sin \varphi_{cv} (3 - \sin \varphi)} g(\theta). \quad (13)$$

Hodnoty parametrů  $\alpha$  a  $\tilde{p}_c$  dané vztahy

$$\alpha = \frac{2}{1 - \left( \frac{\sin \varphi_{cv} (3 - \sin \varphi)}{\sin \varphi (3 - \sin \varphi_{cv})} \right)^2} - 1, \quad (14)$$

$$\tilde{p}_c = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}} p_c \quad (15)$$

zajišťují spojitost funkcí  $F_c$  a  $F_d$  při kritickém stavu, tedy pro  $\sigma_m = -p_c/2$ . Zajištěna je též spojitost prvních derivací. Plastickej potenciál zůstává nezávislý na úhlu  $\theta$  a uvažuje se s neasociovaným zákonem plastického přetváření.



Obrázek 2: Plocha plasticity zobecněného modelu Cam clay

### 3. Implementace modelu

Implementace materiálového modelu do softwaru založeného na metodě konečných prvků vyžaduje část, ve které je vytvořena elasto-plastická matice tuhosti materiálu, a dále část ve které se stanovuje napětí po návratu na plochu plasticity dojde-li k plastickým deformacím.

Elasto-plastickou matici tuhosti materiálu lze získat ze vztahu

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{n}_p \mathbf{n}^T \mathbf{D}}{\mathbf{n}^T \mathbf{D} \mathbf{n}_p + H}, \quad (16)$$

Tabulka 1: Porovnání materiálových modelů modelů

Materiálový model	Parametry	Vlastnosti
Mohr-Coulomb	$E, \nu, \varphi, c$	porušení smykem, soudržnost, závislost na $\theta$
Modifikovaný Cam clay	$\kappa, \lambda, \nu, e_0, M_{cs}$	porušení smykem i tlakem deformační změkčení/zpevnění
Zobecněný Cam clay	$\kappa, \lambda, \nu, e_0, \varphi, \varphi_{cv}, c$	porušení smykem i tlakem, soudržnost, závislost na $\theta$ deformační změkčení/zpevnění

kde  $D$  je elastická matice tuhosti  $n$  a  $n_p$  jsou derivace funkce plasticity a plastického potenciálu podle napětí

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{n}_p = \frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (17)$$

a  $H$  je modul plastického zpevnění získaný z podmínky konzistence. Modul plastického zpevnění v podkritické oblasti nabývá tvar

$$H_c = \frac{\sigma_m p_c}{\lambda^* - \kappa^*} (2\sigma_m + p_c) \quad (18)$$

a v nadkritické oblasti

$$H_d = -\frac{4(-\sigma_m)^{1+\alpha}}{\lambda^* - \kappa^*} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left( \frac{p_c}{2} \right)^{1-\alpha} \left( \sigma_m + (-\sigma_m)^\alpha 2 \left( \frac{p_c}{2} \right)^{1-\alpha} \right). \quad (19)$$

Podmínky návratu na plochu plasticity jsou formulovány implicitně. Pro jejich splnění je použita Newton-Raphsonova iterační metoda. Pro tři hledané proměnné  $\sigma_m^{i+1}$ ,  $p_c^{i+1}$  a  $\lambda^{i+1}$  platí podmínky

$$R_S = \sigma_m^{i+1} - \sigma_m^i \exp \left( -\frac{\Delta \epsilon_v^{el,i+1}}{\kappa^*} \right) = 0, \quad (20)$$

$$R_P = p_c^{i+1} - p_c^i \exp \left( -\frac{\Delta \epsilon_v^{pl,i+1}}{\lambda^* - \kappa^*} \right) = 0, \quad (21)$$

$$R_F = F = 0. \quad (22)$$

Počáteční hodnota stavového parametru  $p_c$  závisí na počáteční napjatosti v zemině a mřeře překonsolidace. Je dána vztahem

$$p_c = p_c^{n.c.} OCR \quad (23)$$

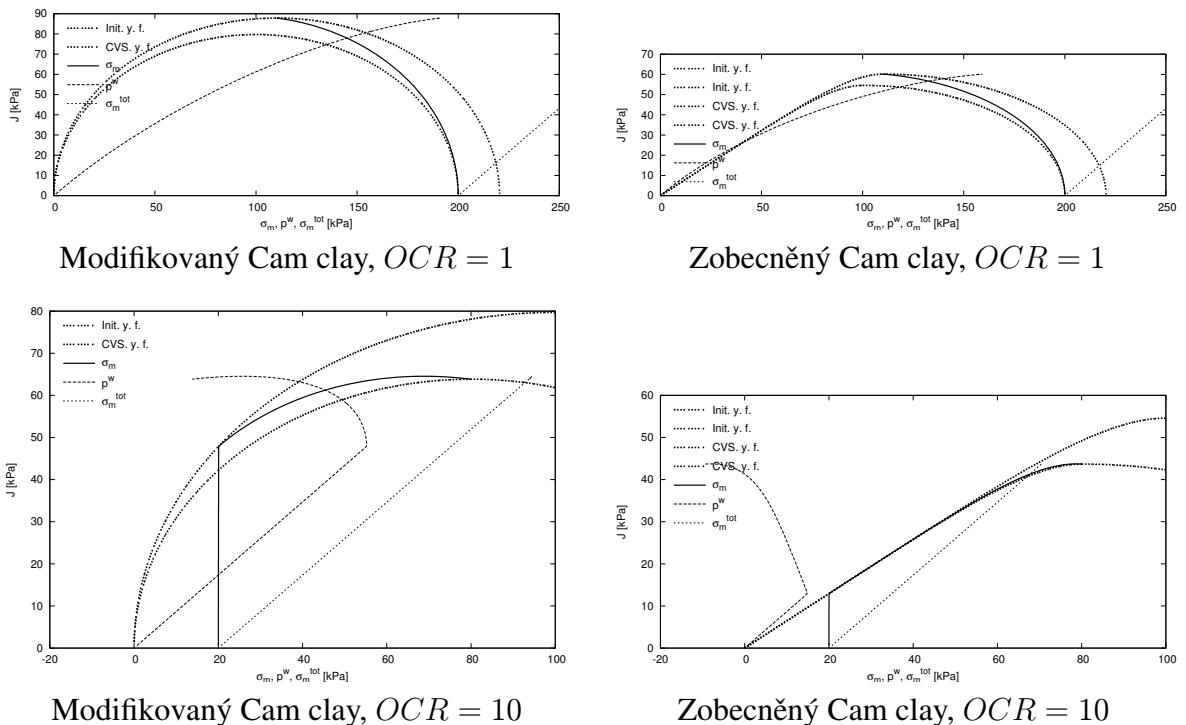
kde parametr  $OCR$  představuje číslo překonsolidace a  $p_c^{n.c.}$  je strukturní pevnost normálně konsolidované zeminy. Pro známou počáteční napjatost se  $p_c^{n.c.}$  určí z podmínky  $F = 0$ .

#### 4. Numerické testy

Numerický model byl nejprve testován na jednoduché osově symetrické geometrii odpovídající triaxiálnímu přístroji. Grafy na obrázku 3 udávají dráhu totálního a efektivního napětí a související vývoj pórového tlaku. Grafy jsou doplněny o počáteční plochu plasticity a plochy plasticity v kritickém stavu.

Tabulka 2: Materiálové parametry použité při úloze triaxiálové extenze

Model	$\nu [-]$	$\kappa [-]$	$\lambda [-]$	$e_0 [-]$	$M_{cs} [-]$	$\varphi_{cv} [^\circ]$	$\varphi_{in} [^\circ]$
Modifikovaný Cam clay	0.25	0.025	0.181	1.67	0.797	—	—
Zobecněný Cam clay	0.25	0.025	0.181	1.67	—	34.13	40.0

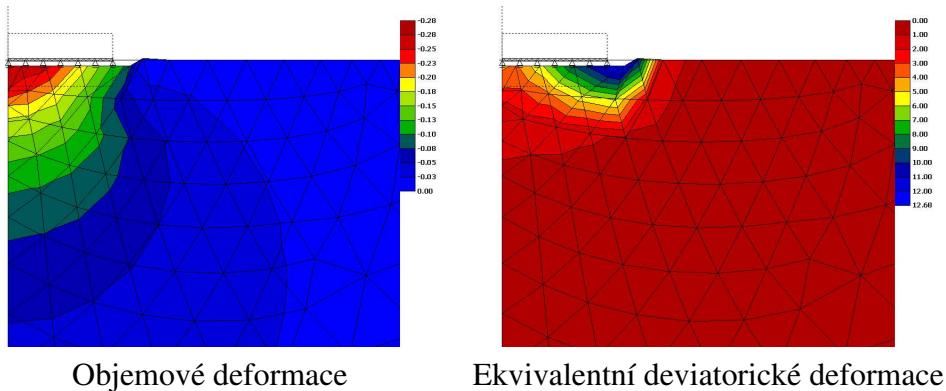


Obrázek 3: Neodvodněná triaxiálová extenze – dráha napětí a vývoj plochy plasticity

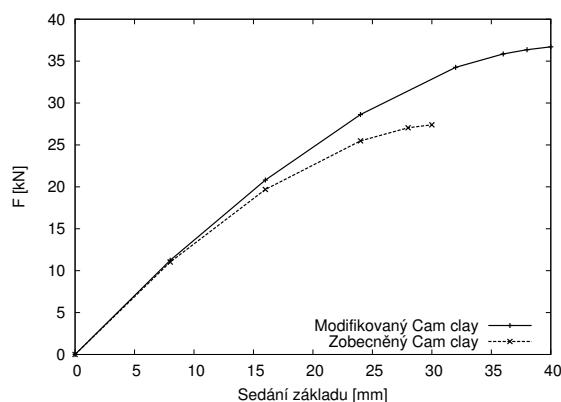
Druhou skupinou numerických testů bylo modelování jednoduchých geotechnických úloh. Na obrázku 4 jsou uvedeny výsledky sedání základového pasu na překonsolidovaném podloží. Tato úloha byla řešena s použitím zobecněného Cam clay modelu a porovnána s výsledky modifikovaného Cam clay modelu. Závislost sedání základového pasu na zatížení pro oba modely je patrná z obrázku 5. Únosnost podloží popsaného zobecněným modelem Cam clay je nižší, neboť plochy plasticity závislé na Lodeově úhlu je dosaženo dříve.

Tabulka 3: Materiálové parametry použité úloze zatížení tuhou patkou

Model	$\nu [-]$	$\kappa [-]$	$\lambda [-]$	$e_0 [-]$	$M_{cs} [-]$	$\varphi_{cv} [^\circ]$	$\varphi_{in} [^\circ]$
Modifikovaný Cam clay	0.20	0.03	0.16	1.0	0.797	—	—
Zobecněný Cam clay	0.20	0.03	0.16	1.0	—	34.13	40.0



Obrázek 4: Vývoj deformací pod základovým pasem



Obrázek 5: Únosnost podloží – porovnání zobecněného a modifikovaného modelu Cam clay

## 5. Závěr

Numerické simulace neodvodněné smykové zkoušky pro různé volby  $OCR$  potvrzují vliv redukováné plochy plasticity zobecněného Cam clay modelu na omezení změkčení. Při zkoušce na normálně konsolidovaném vzorku s  $OCR = 1$  model předpovídá nárůst pórových tlaků a pokles efektivního středního napětí. V tomto případě je z výsledků patrné i mírné zpevnění zeminy, t.j. zvýšení hodnotu stavového parametru  $p_c$ . Při triaxiální smykové zkoušce na překonsolidovaném materiálu s hodnotou  $OCR = 10$  dochází poklesu pórového tlaku a k nárůstu efektivního středního napětí. Za těchto okolností materiál dilatuje a změkčuje, t.j. stavový parametr  $p_c$  klesá. Numerické experimenty demonstруjí schopnost zobecněného Cam clay modelu popisovat kvalitativně odlišné chování jednoho typu zeminy v závislosti na jejím stavu. Výsledky testů jsou v souladu s měřením publikovaným např. v [Potts and Zdravkovic 1999].

Výpočet únosnosti základového pasu na překonsolidovaném podloží, ve kterém je porovnána odezva modifikovaného a zobecněného modelu Cam clay, potvrzuje předpoklad, že funkce plasticity závisí na Lodeově úhlu  $\theta$  a odpovídají testům uváděným v [Potts and Zdravkovic 2001].

Při řešení úloh s překonsolidovaným materiálem dochází k deformačnímu změkčení a následné lokalizaci plastických deformací. V tomto případě výsledky vykazují závislost na velikosti prvku sítě. Odstranění této závislosti by vyžadovalo implementaci nelokálního modelu.

## 6. Poděkování

Příspěvěk vznikl díky laskavé podpoře grantového projektu 1ET410430516 Akademie věd ČR.

## 7. Literatura

- [Bittnar and Šejnoha 1996] Bittnar, Z. & Šejnoha, J. 1996: *Numerical methods in structural mechanics*. ASCE, New York.
- [Potts and Zdravkovic 1999] Potts, D. M. & Zdravkovic, L. 1999: *Finite element analysis in geotechnical engineering, theory*. Thomas Telford, London.
- [Potts and Zdravkovic 2001] Potts, D. M. & Zdravkovic, L. 2001: *Finite element analysis in geotechnical engineering, application*. Thomas Telford, London.
- [Roscoe at al. 1958] Roscoe, K. H., Schofield, A. N. & Worth, C. P. 1958: On the yielding of soils. *Geotechnique*, 8, pp. 22-55.
- [Roscoe and Burland 1968] Roscoe, K. H. & Burland, J. B. 1968: On the generalised behaviour of 'wet' clay. *Engineering plasticity*, Cambridge University Press, pp. 535-609.
- [Terzaghi et al. 1995] Terzaghi, K., Peck, R. B. & Mersi, G. 1995: *Soil Mechanics in Engineering Practice*. A Wiley-Interscience Publication.