

CONTEMPORARY CAPABILITY OF DIRECT DETERMINED PROBABILISTIC CALCULATION

P. Janas*, M. Krejsa*, V. Krejsa

Summary: *The paper briefly reviews the proposed non-traditional numerical tool, direct determined probabilistic calculation (DDPC), applicable in the framework of the probabilistic structural reliability assessment method SBRA [4] which allows for checking the reliability by comparing the calculated probability of failure P_f and the target probability P_d defined in specifications. The procedure of the calculation above was published first in [1] and more developed in [2], [3], [5], [6], [7], [12] and [13]. The numerical tool DDPC was developed using Borland Delphi platform. It allows exploring reliability function SF using analytical form in string expression or in DLL (dynamic link library) function.*

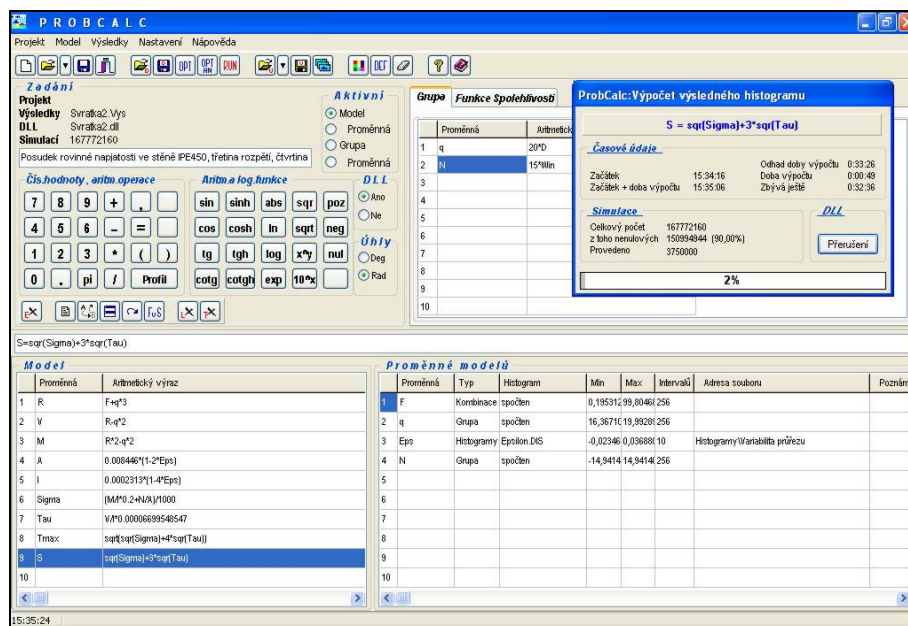
1. Úvod

Metoda přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu (PDPV) byla původně vyvíjena jako alternativa simulační techniky Monte Carlo v metodě SBRA, vyvíjené od 2. poloviny 80 let minulého století. Stejně jako u této metody jsou i u PDPV vstupní proměnlivé náhodné veličiny (zatížení, geometrické a materiálové charakteristiky, imperfekce ad.) vyjádřeny histogramy vyjádřené tzv. neparametrickým rozdělením, přičemž metoda není omezena ani pro použití parametrických rozdělení. Postup PDPV vychází ze základních pojmů a postupů teorie pravděpodobnosti. Pro aplikaci PDPV lze v současné době využít programový systém ProbCalc (viz obr. 1, [6], [7] a [13]), jenž je stále rozvíjen. Lze něj do implementovat relativně jednoduše analytický transformační model dané konkrétní řešené pravděpodobnostní úlohy. Analyzovaná funkce spolehlivosti může být v tomto programu vyjádřena analyticky formou aritmetického výrazu ve znakové podobě (s využitím tzv. kalkulačky) nebo pomocí tzv. dynamické knihovny DLL (stejně jako např. v programu Freet viz [9]), která může být vytvořena v kterémkoliv programovacím jazyce (např. Borland Delphi).

Metodou PDPV je možno v současné době řešit řadu pravděpodobnostních výpočtů. Počet náhodných veličin vstupujících do výpočtu pravděpodobnosti poruchy je však omezen možnostmi danou úlohu numericky zvládnout. Při velkém počtu náhodně proměnných je totiž úloha časově velmi náročná i při dostupné výkonné výpočetní technice. Má-li se uvedená metoda využívat při posuzování spolehlivosti konstrukcí případně i při jiných pravděpodobnostních výpočtech, pak musí být snadno aplikovatelná a to nejen pro relativně jednoduché výpočty, kdy transformační vztahy lze vyjádřit analyticky, ale také pro složitější dnes však běžně využívané výpočetní modely, při jejichž aplikaci se dnes posuzuje spolehlivost konstrukcí pravděpodobnostně [10]. Z tohoto důvodu je do programu ProbCalc

* Doc. Ing. Petr Janas, CSc., Ing. Martin Krejsa, Ph.D.: Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB – TU Ostrava, Ludvíka Podéště 1875, 708 00 Ostrava; tel.: +420 59 732 1308, fax: +420.59 732 1558; e-mail: petr.janas@vsb.cz

implementována řada optimalizačních postupů, které možnosti aplikace metody podstatně rozšiřují při zachování korektnosti postupu řešení.



Obr.1 Pracovní plocha programu ProbCalc

2. Optimalizace pravděpodobnostního výpočtu

Postupy souhrnně označované jako optimalizační, byly aplikovány i v programu ProbCalc při řešení některých pravděpodobnostních výpočtů. V současné době se jako účinné nástroje pro snížení požadovaných počtů operací ukazují následující optimalizační metody:

- **Grupování proměnných**

Tento postup je aplikován např. v situacích, kdy je kombinace zatížení tvořena několika složkami náhodně proměnných zatížení se stejným působištěm, takže je pak lze vyjádřit jediným společným histogramem. Lze využít i v obdobných situacích s jinými vstupními či výstupními veličinami.

- **Snížování počtu intervalů v histogramech vstupních veličin**

Tento způsob zrychlení výpočtu se využívá tak, aby nebyl podstatně ovlivněn výsledek a korektnost řešení úlohy byla zachována. Při tomto postupu se proto nejdříve testuje vliv počtu intervalů každé náhodné veličiny na výsledek řešení a následně se tento počet intervalů minimalizuje. V programu ProbCalc se tato optimalizační metoda uplatňuje pod označením „Intervalová optimalizace“.

- **Vyloučení intervalů jednotlivých histogramů vstupujících do výpočtu**

Ve výpočtu lze eliminovat ty intervaly histogramů vstupních veličin, které se na výsledné pravděpodobnosti poruchy jednoznačně nepodílejí. V každém histogramu mohou vznikat až tři typy intervalů – zón, lišících se svým podílem na pravděpodobnosti vzniku poruchy, a to :

- (a) Typ I, který se na pravděpodobnosti poruchy podílí vždy.
- (b) Typ II, který se na pravděpodobnosti poruchy může a nemusí podílet.
- (c) Typ III, který se na pravděpodobnosti poruchy nepodílí.

V programu ProbCalc se tato optimalizační metoda uplatňuje pod označením „Zonální optimalizace“.

- Grupování dílčích výsledků výpočtu

Z výpočetního modelu lze separovat některé výsledné veličiny a zpracovat je odděleně až po provedení výpočtu. Takto lze pracovat například s funkcí spolehlivosti, kdy je odolnost konstrukce vyjádřena vstupním histogramem (napětí na mezi kluzu) nebo konstantní hodnotou (tolerovaná deformace), a účinek zatížení je získán výpočtem.

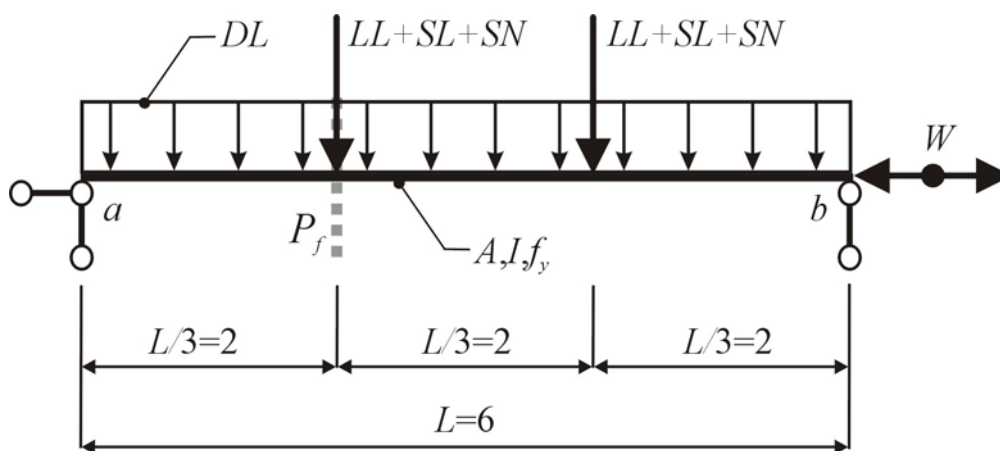
- Kombinace uvedených optimalizačních postupů

Uvedené postupy lze navzájem kombinovat, čímž lze dosáhnout ještě výraznějšího zrychlení výpočtu.

Použití uvedených optimalizačních metod v rámci pravděpodobnostního výpočtu programem ProbCalc je ukázáno i v následujícím textu.

3. Příklad posudku spolehlivosti vybrané konstrukce

Řešený příklad posudku spolehlivosti nosné konstrukce byl zvolen s ohledem na snahu názorně analyzovat možnosti optimalizace výpočtu z hlediska dosažení minimálního strojového času výpočtu. Podkladem pro ukázkou posloužil příklad s podobným zadáním z publikace [14], která obsahuje množství příkladů řešitelných i programem ProbCalc.



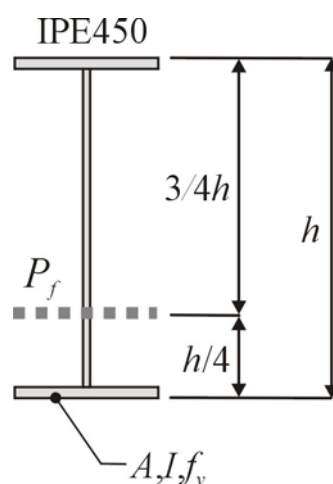
Obr.2 Statické schéma vyšetřované konstrukce

Na obr.2 je statické schéma konstrukce prostého nosníku, jehož spolehlivost byla pravděpodobnostně posouzena s využitím programu ProbCalc. Rozpětí nosníku L bylo zvoleno 6 m, průřez je tvořen válcovaným profilem IPE450, jehož průřezové charakteristiky jsou vlivem možného pod a převálcování považovány za variabilní.

Ve výpočtu se objevuje 5 složek zatížení, jejichž návrhové hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. Předmětem posudku spolehlivosti uvedené konstrukce je zkoumaný průřez ve třetině rozpětí L (viz obr.2), ve kterém byly ve spodní čtvrtině výšky (viz obr.3) určeny složky normálového i smykového napětí.

Tabulka 1: Vstupní údaje zatížení

Označení	Typ zatížení	Návrhová hodnota [kN]
DL	Stálé	20
LL	Dlouhodobé nahodilé	30
SL	Krátkodobé nahodilé	60
SN	Sníh	10
W	Vítr	15



Obr.3 Schéma vyšetřovaného průřezu

Složka normálové napětí se pro posuzovaný průřez stanoví dle známého vztahu pro $z = \frac{h}{4}$ (spodní čtvrtina výšky průřezu):

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} = \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{4} + \frac{N}{A} \quad (1)$$

kde M_y je ohybový moment v průřezu, N normálová síla, I_y moment setrvačnosti a A průřezová plocha. Obdobně se pro stejný průřez a jeho spodní výšku průřezu stanoví i složka smykového napětí:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{V_z}{I_y \cdot t_w} \cdot \frac{1}{8} [4 \cdot t_f \cdot (b - t_w) \cdot (h - t_f) + t_w \cdot (h^2 - 4z^2)] = \\ &= \frac{V_z}{I_y \cdot t_w} \cdot \frac{1}{8} \left[4 \cdot t_f \cdot (b - t_w) \cdot (h - t_f) + \frac{3}{4} \cdot t_w \cdot h^2 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

kde V_z je posouvající síla v průřezu, I_y moment setrvačnosti, h výška průřezu, b šířka pásnice, t_w tloušťka stojiny a t_f tloušťka pásnice. Známý vztah pro hlavní napětí při rovinné napjatosti ve stojině průřezu:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad (3)$$

a pro extrémní smyková napětí:

$$\tau_{\max,\min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad (4)$$

se vzhledem k nulové hodnotě složky normálového napětí σ_y zjednoduší na:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad \text{a} \quad \tau_{\max,\min} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2} . \quad (5) \text{ a } (6)$$

Misesova podmínka plasticity v uvedeném bodě je pak dána

$$F = \sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 - f_y^2 \leq 0 \quad (7)$$

a lze ji vyjádřit i původními složkami napětí:

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \leq f_y^2 \quad (8)$$

resp. pro $\sigma_y = 0$:

$$\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \leq f_y^2 \quad (9)$$

kde f_y je napětí na mezi kluzu.

V pravděpodobnostním posudku spolehlivosti je pak v dalším výpočtu analyzována funkce spolehlivosti:

$$SF = R - Q, \quad (10)$$

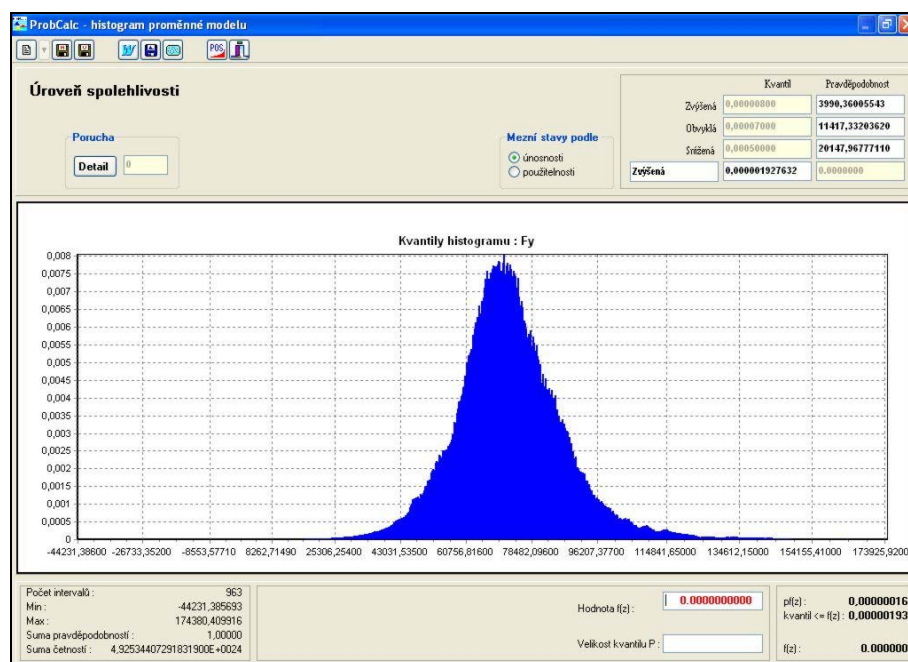
kde R je účinek zatížení a Q je odolnost konstrukce. S využitím (9) jsou pak obě veličiny vyjádřeny:

$$R = \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \quad (11)$$

a

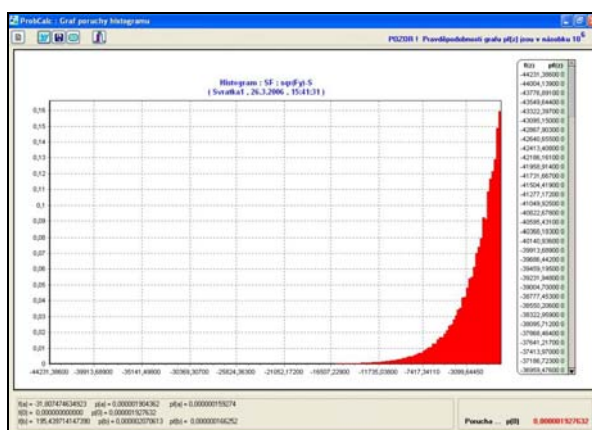
$$Q = f_y^2 \quad (12)$$

Ve výpočtu se tedy objevuje celkem 7 variabilních veličin: 5 složek zatížení (variabilita jejich působení je vyjádřena histogramy z [4]), proměnnost průřezu (vyjádřena histogramem dle [5]) a napětí na mezi kluzu f_y oceli Fe360/S235 (histogram Tyče Fy23501.DIS z [12]). Samotný pravděpodobnostní posudek spolehlivosti byl proveden dle (10). Výsledný histogram funkce spolehlivosti SF , výslednou hodnotu pravděpodobnosti poruchy P_f i zařazení do příslušné úrovně spolehlivosti dle [8] pro mezní stav únosnosti lze shlédnout na obr.4.

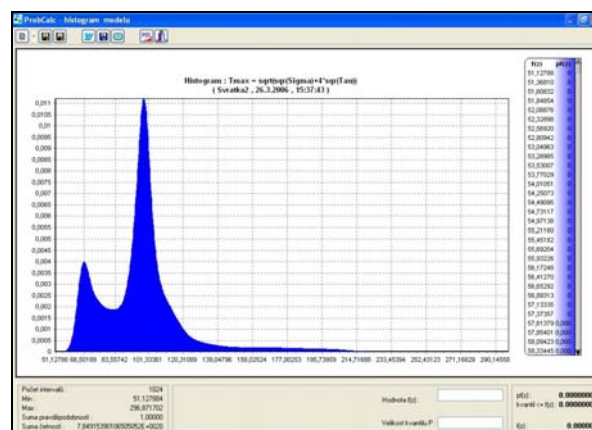


Obr.4: Výsledný histogram funkce spolehlivosti SF a posudek dle mezního stavu únosnosti

Konstrukce tedy splňuje kritéria spolehlivosti. Vypočtená hodnota pravděpodobnosti poruchy P_f činí $4,519710 \cdot 10^{-6}$, což odpovídá zvýšené úrovni spolehlivosti.

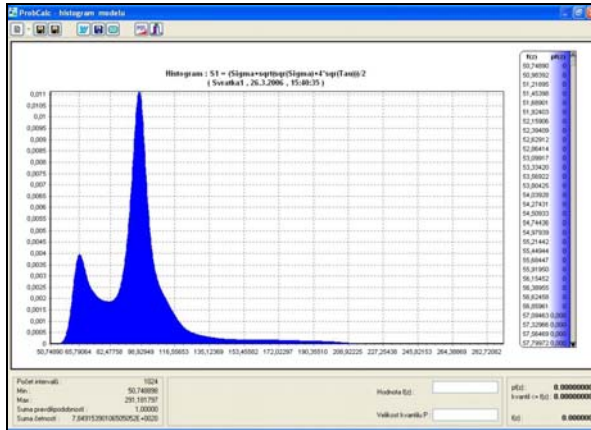
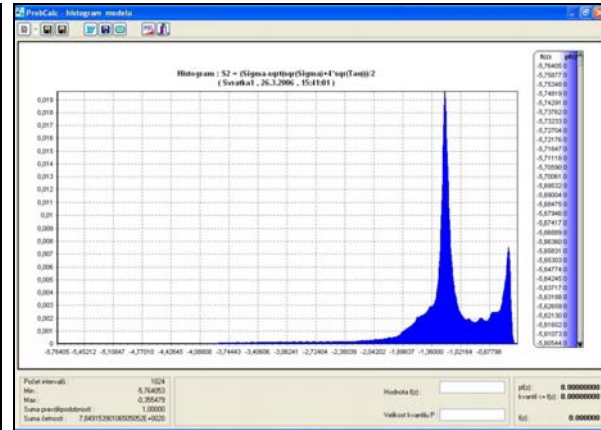


Obr.5 Detail záporné části histogramu funkce spolehlivosti SF



Obr.6 Histogram smykového napětí $\tau_{\max}$

Pravděpodobnost poruchy P_f se přitom získá součtem všech pravděpodobností v intervalech, kde funkce spolehlivosti SF dosahuje záporné hodnoty. Tuto část výsledného histogramu SF lze programem ProbCalc zobrazit detailněji (obr.5), stejně jako i histogramy ostatních veličin, vstupujících do výpočtu. Na obr. 6 je znázorněn histogram maximálního smykového napětí, na obr.7 a 8 je pak možno shlédnout histogram hlavních napětí σ_1 a σ_2 .

Obr.7 Histogram hlavního napětí σ_1 Obr.8 Histogram hlavního napětí σ_2

Uvedené výsledky byly získány na základě pravděpodobnostního výpočtu bez využití základních optimalizačních kroků. Strojový čas výpočtu přitom dosahoval značných hodnot a použití některého z výše popsaných optimalizačních kroků se zdá být nevyhnutelné.

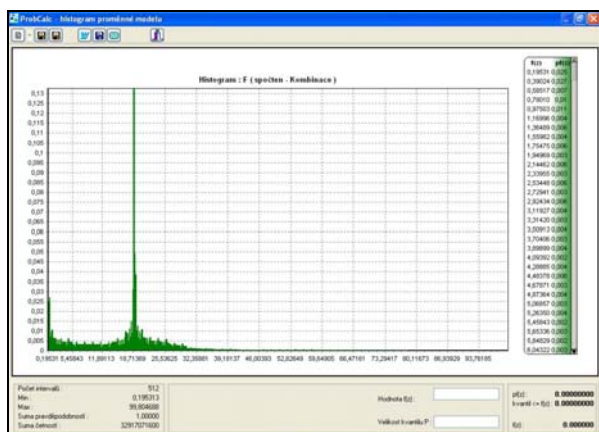
4. Analýza použitých optimalizačních kroků

Jak již bylo řečeno v kapitole 2, lze vysoký počet výpočetních kroků s úspěchem redukovat s využitím uvedených optimalizačních způsobů. Na řešeném příkladu lze tyto cesty k výraznému urychlení pravděpodobnostního výpočtu velmi názorně demonstrovat.

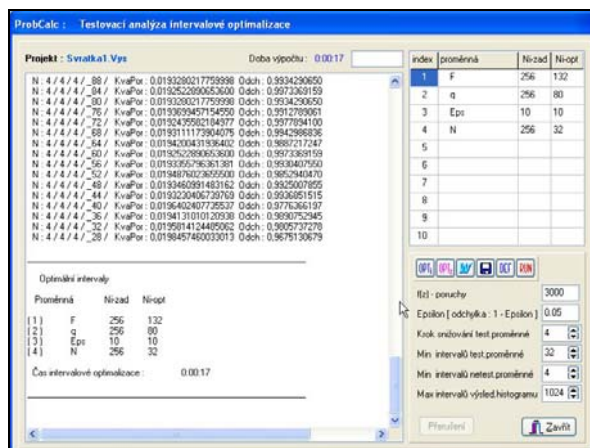
- **Grupování složek zatížení**

Jednou z cest, jak počet operací a současně dobu výpočtu snížit, je grupování složek zatížení před samotným pravděpodobnostním výpočtem. Nechť zatížení F představuje kombinaci nahodilých zatížení LL , SL a SN . Proměnlivost každé z těchto složek zatížení je vyjádřena histogramem, ve kterém je počet intervalů $N_j = 256 = 2^8$. Počet výpočetních operací při jejich kombinaci pak je $P = (N_j)^3 = (2^8)^3 = 2^{24} = 16\,777\,216 \approx 16,8 \cdot 10^6$. Jestliže sečteme nejdříve zatížení $F_1 = LL + SL$, a vytvoříme histogram opět se 256 intervaly a pak této operaci odpovídá $P_1 = 256 \cdot 256 = 2^{16}$. Celkové zatížení je pak dáno $F = F_1 + SN$. Histogramy F_1 a SN mají každý 256 intervalů a odpovídající počet operací je opět $P_2 = 2^{16}$. Celkový počet operací je pak $P' = P_1 + P_2 = 2 \cdot 2^{16} = 2^{17} = 131\,072$, což je 128-krát méně než při nevyužití tohoto způsobu výpočtu, což se na době výpočtu projeví velmi výrazně. Výsledný histogram kombinace svislých zatížení F je pak uveden na obr.9.

V poslední verzi programu ProbCalc lze využít i tzv. sumárního histogramu, kde lze jednotlivým intervalům řešené grupy zadávat i váhu, což je možno s výhodou využít např. při výpočtu s tzv. větrnou růžicí.



Obr.9 Výsledný histogram kombinace svislých složek zatížení LL , SL a SN



Obr.10 Určení citlivosti jednotlivých vstupních veličin v rámci intervalové optimalizace v programu ProbCalc

- Snížování počtu intervalů v histogramech vstupních veličin

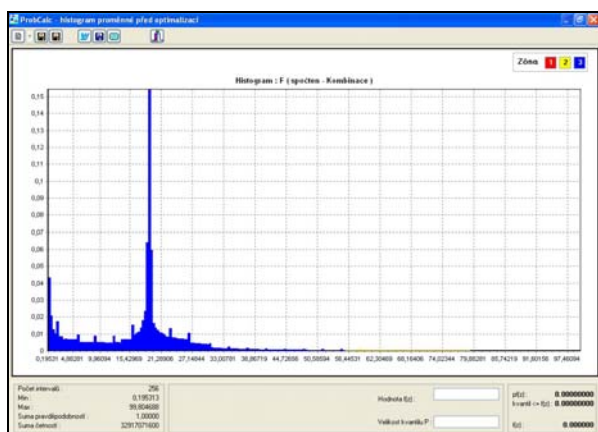
Snížování počtu intervalů u histogramů, které vstupují do výpočtu, vede rovněž k velmi výraznému snížení výpočetních operací. Při tomto optimalizačním způsobu je však nutno ověřit, do jaké míry se zmenšení počtu intervalů projeví na výsledku. V [12] byla publikována studie, při níž se při průběžném snižování počtu intervalů vždy u jedné ze vstupních veličin sledoval rozdíl mezi dosaženou pravděpodobností poruchy a přesnou hodnotou této veličiny, získanou při výpočtu s maximálním počtem intervalů. Tímto způsobem lze také určit citlivost jednotlivých vstupních veličin ve výpočtu, což bylo implementováno i do programu ProbCalc (viz obr.10).

Největší rozdíly a tedy i největší citlivost při řešení posudku spolehlivosti vykazovala kombinace složek svislého zatížení F (viz obr. 9). Naopak na složce bočního zatížení W lze sledovat malou citlivost a výsledná pravděpodobnost poruchy se u tohoto histogramu prakticky nemění ani při velmi malém počtu intervalů (viz obr. 10).

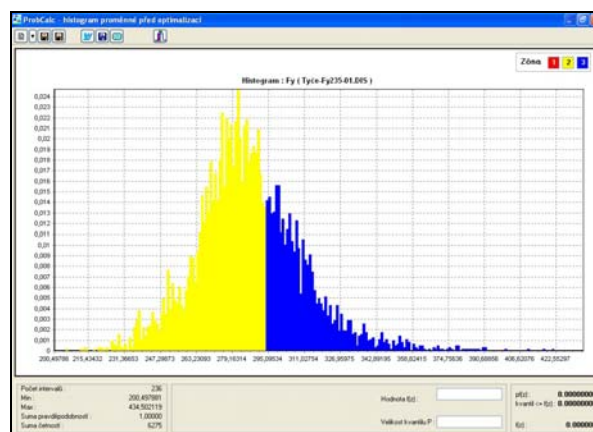
- Vyloučení intervalů jednotlivých histogramů vstupujících do výpočtu

Žádoucí bylo rovněž zvládnutí algoritmu, při kterém by do výpočtu vstupovaly pouze ty intervaly každého histogramu, které se podílejí na poruše posuzované konstrukce. Každý histogram vstupních veličin se skládá ze tří typů tzv. zón. Zóna typu I. se bude podílet na pravděpodobnosti poruchy vždy, tzn. při jakékoliv kombinaci intervalů zbývajících vstupních veličin (v programu ProbCalc je barevně označena červeně). Zóna typu II se na výsledné pravděpodobnosti poruchy podílí pouze částečně, pouze při některých kombinacích intervalů ostatních vstupních veličin (v programu ProbCalc je barevně označena žlutě, viz obr.11 a 12). Zóna s intervaly typu III se na poruše konstrukce neprojeví za žádných okolností, a proto lze tedy při určování pravděpodobnosti poruchy tuto část histogramu vynechat úplně (v programu ProbCalc je barevně označena modře, viz obr.11 a 12).

Výpočtem zkoumaného příkladu bylo ověřeno, že tímto způsobem lze upravit zejména histogramy pro nejcitlivější ze vstupních veličin – kombinaci složek bočního zatížení F a napětí na mezi kluzu f_y . Po této úpravě se už na časově náročném výpočtu pravděpodobnosti poruchy P_f budou z obou histogramů podílet pouze intervaly ze zón typu II.



Obr.11 Výsledek zonální optimalizace, histogram kombinace svislých složek zatížení F



Obr.12 Výsledek zonální optimalizace, histogram napětí na mezi kluzu f_y

Nevýhodou uvedeného řešení je snad nemožnost zobrazit výsledný histogram funkce spolehlivosti, který však z praktického hlediska nemá podstatný význam. Uvedený způsob výpočtu pravděpodobnosti poruchy byl do programu ProbCalc implementován pod označením „Zonální analýza“.

- Grupování dílčích výsledků výpočtu

V demonstračním příkladě byl tento optimalizační krok využitý zejména ve spojitosti s funkcí spolehlivosti SF . Po provedeném výpočtu byla separovaná funkce spolehlivosti analyzována dle mezního stavu únosnosti s využitím vypočteného účinku zatížení R dle (11) a zadané odolnosti konstrukce Q (12), vyjádřené druhou mocninou napětí na mezi kluzu f_y .

5. Závěr

Uvedený demonstrační příklad ukazuje, že vyvíjený SW pro PDPV je již v současné době schopen řešit řadu pravděpodobnostních výpočtů. Do vyvíjeného SW byla implementována řada optimalizačních postupů, které do značné míry pracují nezávisle na uživateli. Tyto kroky mají za cíl minimalizovat dobu výpočtu, neboť zmiňovaný algoritmus má jistá omezení daná zejména náročností rozsáhlých úloh, kdy počet simulací je velmi vysoký. V příspěvku bylo prokázáno, že v řešeném příkladě lze pravděpodobnost poruchy určit při aplikaci PDPV v reálném čase při zachování korektnosti a dostatečné přesnosti řešení.

6. Poděkování

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je 105/04/0458.

7. Literatura

- [1] Janas, P., Krejsa, M. (2002) *Numerický výpočet pravděpodobnosti užitím useknutých histogramů*, III. ročník celostátní konference Spolehlivost konstrukcí, Dům techniky Ostrava, str. 33-38, ISBN 80-02-01489-8.
- [2] Janas, P., Krejsa, M. (2002) *Numerický výpočet pravděpodobnosti užitím useknutých histogramů při posuzování spolehlivosti konstrukcí*, sborník vědeckých prací VŠB-TUO, ročník II, č.1, str. 47-58, ISBN: 80-248-0397-6, ISSN 1213-1962.
- [3] Janas, P., Krejsa, M. (2002) *Simulace spolehlivosti konstrukcí přímým pravděpodobnostním výpočtem*, International conference: „New trends in statics and dynamics of buildings, edited by J.Králík, ISBN 80-227-1790-8.
- [4] Marek, P., Guštar, M., Anagnos, T. (1995) *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*, CRC Press Inc., Boca Raton, ISBN 0-8493-8286-6.
- [5] Janas, P., Krejsa, M. (2004) *Analýza optimalizačních kroků přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu a jejich využití při posuzování spolehlivosti konstrukce*, III. mezinárodní konferencia „Nové trendy v statice a dynamice stavebných konstrukcií“, str. 247 až 254, Stavebná fakulta STU v Bratislave, ISBN: 80-227-2116-6.
- [6] Janas, P., Krejsa, M. (2005) *Výpočet pravděpodobnosti poruchy přímým determinovaným pravděpodobnostním výpočtem*, sborník VI. konference „Spolehlivost konstrukcí“ na téma „Od deterministického k pravděpodobnostnímu pojetí inženýrského posudku spolehlivosti konstrukcí“, Dům techniky Ostrava, str. 99 až 108 (10 stran), ISBN: 80-02-01708-0.
- [7] Janas, P., Krejsa, M., Krejsa, V. (2005) *Aplikace přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu v programu ProbCalc*, sborník abstraktů VII. konference s mezinárodní účastí „Staticko-konstrukční a stavebno-fyzikální problémy stavebních konstrukcií“, str. 31 a 32 (2 strany), ISBN 80-7099-742-7 (CD s příspěvky, ISBN 80-8073-404-6).
- [8] ČSN 73 1401 (1998) *Navrhování ocelových konstrukcí*, Český normalizační institut, Praha.
- [9] Novák, D., Vořechovský, M., Rusina, R. (2003) *Small-Sample Probabilistic Assessment – FREET Software, Applications of Statics and Probability in Civil Engineering*, Der Kiureghian, Madanat & Pestana (eds), Millpress, Rotterdam, ISBN 90 5966 004 8.
- [10] Králík, J. (2005) *Probability Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Containment Integrity Considering Degradation Effects and High Internal Overpressure*, sborník mezinárodní konference VSU'2005, Sofia, Bulharsko, str. 153 až 158 (6 stran), ISBN 954-331-003-3.
- [11] Fajkus, M. (1998) *Useknuté histogramy napětí na mezi kluzu*, VÚHŽ, 739 51 Dobrá.
- [12] Janas, P., Krejsa, M. (2004) *Přímý determinovaný pravděpodobnostní výpočet a jeho využití při posuzování spolehlivosti konstrukcí*, sborník příspěvků I. celostátní konference „Pravděpodobnost porušování konstrukcí“, Ed.: Novák, D., Vejvoda, S., str.97 až 106, FAST VUT v Brně, ISBN: 80-214-2718-3.
- [13] Janas, P., Krejsa, M., Krejsa, V. (2006) *Optimalizace výpočtu v programovém systému ProbCalc*, mezinárodní konference „Modelování v mechanice“, ISBN: 80-248-1035-2.
- [14] Tereco (2003) *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation – 2nd Edition, Background, Exercises and Software*, Ed.: Marek, P., Brozzetti, J., Guštar, M., Tikalsky, P., ÚTAM AV ČR, Praha, ISBN 80-86246-19-1.