

DYNAMICS OF A BEAM COUPLED WITH A PRESTRESSED STRING

L. Frýba*, C. Fischer*

Summary : *The beam with an axial force is coupled by an elastic layer of Winkler type with the pretensiled string. It is subjected to a row of moving forces. The theoretical model corresponds to a prestressed bridge. The concrete bridges of this type are the most spread types appearing on both the road and railway bridges of small and medium spans. The governing equations form a coupled set of partial differential equations that are solved using the Fourier and Laplace-Carson integral transformations. The closed form of the solution is – as yet – derived for the undamped case.*

1. Úvod

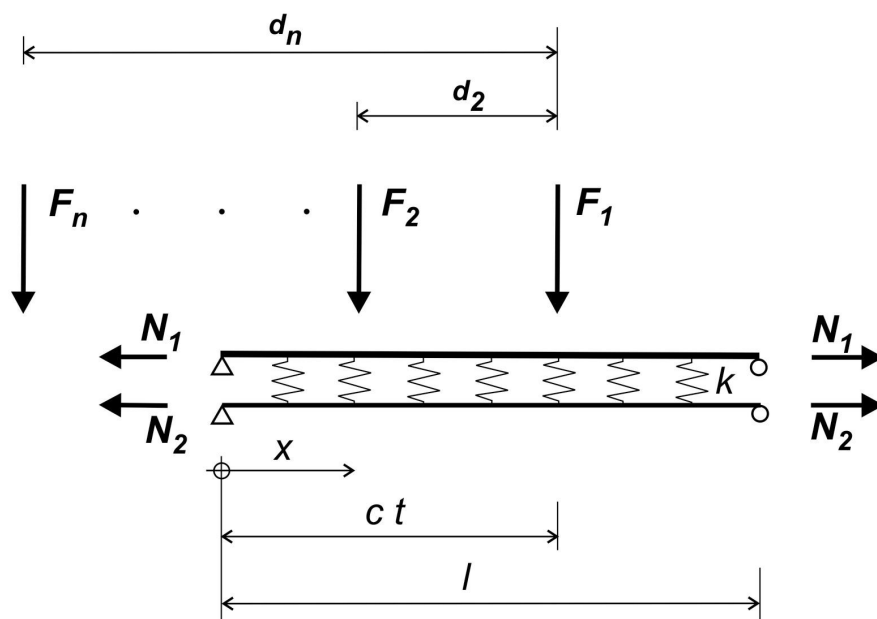
Utlumit dynamické účinky vozidel při jejich pohybu po silničních a železničních mostech je dávnou snahou stavebních i strojních inženýrů. Pro tento účel byla vyvinuta celá řada systémů, např. pružné uložení mostních ložisek, odpružená vzpěradla s řízenými tlumiči nebo dvojité systémy nosníků či lan spojené pružnou vrstvou. Každý z těchto způsobů je účinný v určitých případech a ne všechny jsou i ekonomicky přijatelné.

V poslední době se hojně používají předpjaté železobetonové silniční a železniční mosty o malých a středních rozpětích. Tento typ je u nás i ve světě nejrozšířenější a skládá se ze železobetonových nosníků a tažených strun, které způsobují příznivý tlak v nosnících. Struny jsou zabetonovány v kanálcích, ale často jsou uloženy i volně (zvláště při rekonstrukcích a zesilování) a opírají se do čel nosníků.

2. Teoretický model

S ohledem na dvojité systémy, které jsou v poslední době hojně propagovány, vznikla myšlenka spojit železobetonový nosník pružnou vrstvou s předpínacími strunami. Pružná vrstva může být opatřena i vhodnými tlumiči. Tak vzniká nová soustava, jež je schématicky zobrazena na obr. 1 a která představuje teoretický model nosníku, předpjaté struny a pružné mezivrstvy, po které se pohybuje soustava nápravových sil.

* Prof. Ing. Ladislav Frýba, Dr.Sc., Dr.h.c., RNDr. Cyril Fischer, PhD., Ústav teoretické a aplikované mechaniky, Akademie věd České republiky, Prosecká 76, CZ – 190 00 Praha 9, tel/fax : ++ 420 283881646, E-mail : fryba@itam.cas.cz



Obr. 1. Teoretický model nosníku, předpínací struny a pružné vrstvy, který je zatížen řadou pohybujících se sil.

Soustava parciálních diferenciálních rovnic popisuje chování Bernoulliho-Eulerova nosníku a struny :

$$EI \frac{\partial^4 v_1(x,t)}{\partial x^4} - N_1 \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2} + k[v_1(x,t) - v_2(x,t)] + 2\mu_1 \omega_{d1} \left[\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} \right] = \sum_{n=1}^N F_n \varepsilon_n(t) \delta(x - x_n), \quad (1)$$

$$-N_2 \frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial t^2} + k[v_2(x,t) - v_1(x,t)] + 2\mu_2 \omega_{d2} \left[\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} \right] = 0 \quad (2)$$

Nápravné síly F_n , $n=1,2,3,\dots,N$, se pohybují rychlostí c zleva doprava po prostě uloženém nosníku o rozpětí l . Nosník je namáhán osovou silou N_1 (obecně tahem). Struna o též rozpětí l je tažena silou N_2 (v praxi je ovšem $N_1 = -N_2$) a je rovněž prostě podepřena. Mezi oběma nosnými prvky je pružná vrstva Winklerova typu s charakteristikou k [N/mm^2] a viskózním útlumem ω_{d1} popř. ω_{d2} .

Dále je označeno :

$v_i(x,t)$, $i=1,2$ - svislý průhyb nosníku ($i=1$) a struny ($i=2$) v místě x a čase t ,

E, I - modul pružnosti a moment setrvačnosti nosníku,

μ_i - hmota nosníku ($i=1$), popř. struny ($i=2$) na jednotku délky,

$\delta(x)$ - Diracova delta funkce vystihující působení osamělé síly,

$\varepsilon_n(t) = h(t - t_n) - h(t - T_n)$ - funkce, která popisuje, zda se síla nachází na nosníku nebo ho již opustila,

$h(t) = 0$ pro $t < 0$ nebo $h(t) = 1$ pro $t \geq 0$ - Heavisidova jednotková funkce,

d_n - vzdálenost n -té síly od první, $d_1 = 0$,

$t_n = d_n / c$; $T_n = (l + d_n) / c$,

$x_n = ct - d_n$.

Okrajové a počáteční podmínky soustavy v okamžiku, kdy na nosník vjíždí první síla F_1 , jsou :

$$v_1(0, t) = v_1''(0, t) = v_1(l, t) = v_1''(l, t) = v_2(0, t) = v_2(l, t) = 0, \quad (3)$$

$$v_i(x, 0) = \dot{v}_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

kde čárky a tečky označují derivace podle x popř. podle t .

Ve spřažené soustavě (1) a (2) bez útlumu se vyskytuje několik vlastních frekvencí, které charakterizují dynamické chování jednotlivých prvků a jejich spřažení. Tak vlastní kruhová frekvence prostého nosníku (bez struny a bez osové síly) je

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4 EI}{l^4 \mu_1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}, \quad (5)$$

s osovou silou (N_1 je tahem), ale bez struny

$$\omega_{1j}^2 = \frac{j^4 \pi^4 EI}{l^4 \mu_1} + \frac{j^2 \pi^2 N_1}{l^2 \mu_1}, \quad (6)$$

zatímco vlastní kruhová frekvence struny s osovou silou N_2

$$\text{je } \omega_{2j}^2 = \frac{j^2 \pi^2 N_2}{l^2 \mu_2}. \quad (7)$$

Dále se zde vyskytují vlastní frekvence pružné vrstvy

$$\begin{aligned} \omega_{1k}^2 &= k / \mu_1, & \omega_{2k}^2 &= k / \mu_2, \\ \omega_{1jk}^2 &= \omega_{1j}^2 + \omega_{1k}^2, & \omega_{2jk}^2 &= \omega_{2j}^2 + \omega_{2k}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

a konečně v dalším se použije i vlastní kruhová frekvence spřažené soustavy nosník a struna

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\omega_{1jk}^2 + \omega_{2jk}^2) \mp \left[\frac{1}{4}(\omega_{1jk}^2 - \omega_{2jk}^2)^2 + \omega_{1k}^2 \omega_{2k}^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

a frekvence vynucená pohybující se silou

$$\omega = \frac{\pi c}{l}. \quad (10)$$

3. Řešení

Pro řešení rovnic (1) a (2) se použije metody integrálních transformací, [1], a to Fourierovy v proměnné x

$$V_i(j, t) = \int_0^l v_i(x, t) v_j(x) dx, \quad (11)$$

$$v_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{V_{ij}} V_i(j, t) v_j(x) \quad (12)$$

a Laplaceovy-Carsonovy v proměnné t

$$V_i^*(j, p) = p \int_0^{\infty} V_i(j, t) e^{-pt} dt, \quad (13)$$

$$V_i(j, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p} V_i^*(j, p) e^{tp} dp, \quad (14)$$

kde je označeno

$$v_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{l}, \quad (15)$$

$$V_{ij} = \int_0^l \mu_i v_j^2(x) dx = \mu_i l / 2. \quad (16)$$

Po aplikaci (11) a (13) dostaneme transformované řešení v tomto tvaru

$$V_i^*(j, p) = \sum_{n=1}^N \frac{2\omega_j}{\mu_1 l} \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

kde se užívá označení

$$\Delta_1 = \frac{j\omega F_n}{\mu_1} \frac{p}{p^2 + j^2\omega^2} e^{-pd_n/c} (1 - \cos j\pi e^{-pl/c}) (p^2 + 2\omega_{d2}p + \omega_{2jk}^2), \quad (18)$$

$$\Delta_2 = \frac{j\omega F_n}{\mu_1} \frac{p}{p^2 + j^2\omega^2} e^{-pd_n/c} (1 - \cos j\pi e^{-pl/c}) (2\omega_{d2}p + \omega_{2k}^2), \quad (19)$$

$$\Delta = (p^2 + 2\omega_{d1}p + \omega_{1jk}^2)(p^2 + 2\omega_{d2}p + \omega_{2jk}^2) - (2\omega_{d1}p + \omega_{1k}^2)(2\omega_{d2}p + \omega_{2k}^2). \quad (20)$$

Jestliže v první etapě řešení se neuvažuje útlum ($\omega_{di} = 0$), pak pro výrazy

$$F_1(p) = \frac{p(p^2 + \omega_{2jk}^2)}{(p^2 + j^2\omega^2)(p^2 + \Omega_1^2)(p^2 + \Omega_2^2)}, \quad (21)$$

$$F_2(p) = \frac{p\omega_{2k}^2}{(p^2 + j^2\omega^2)(p^2 + \Omega_1^2)(p^2 + \Omega_2^2)} \quad (22)1$$

ze nalézt zpětné transformační vztahy (27.54) a 27.56) v [1] :

$$f_1(t) = \frac{1}{A} [(-\Omega_2 B \sin \Omega_2 t + \Omega_1 C \sin \Omega_1 t - j\omega D \sin j\omega t) + \\ + \frac{\omega_{2jk}^2}{j\omega\Omega_1\Omega_2} (j\omega\Omega_1 B \sin \Omega_2 t - j\omega\Omega_2 C \sin \Omega_1 t + \Omega_1\Omega_2 D \sin j\omega t)] , \quad (23)$$

$$f_2(t) = \frac{\omega_{2k}^2}{j\omega\Omega_1\Omega_2 A} (j\omega\Omega_1 B \sin \Omega_2 t - j\omega\Omega_2 C \sin \Omega_1 t + \Omega_1\Omega_2 D \sin j\omega t) , \quad (24)$$

kde

$$A = BCD , \quad (25)$$

$$B = j^2\omega^2 - \Omega_1^2 , \quad (26)$$

$$C = j^2\omega^2 - \Omega_2^2 , \quad (27)$$

$$D = \Omega_1^2 - \Omega_2^2 . \quad (28)$$

Takto se najdou výsledné průhyby nosníku a struny podle (12) a (14) :

$$v_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N \frac{2j\omega}{\mu_1 l} F_n [f_i(t - t_n)h(t - t_n) - \cos j\pi f_i(t - T_n)h(t - T_n)] \sin \frac{j\pi x}{l} , \quad i = 1, 2 , \quad (29)$$

kde se využilo vzájemného vztahu (27.10) z [1].

Numerické řešení pro jednu pohybující se sílu $F = F_1$ je zveřejněno v publikacích [2], [3] a [4] i pro několik zvláštních případů, jako $c \rightarrow 0$ a $j\omega = \Omega_i$.

4. Závěry

V první etapě řešení se analyzovala dynamika nosníku a předpjaté struny, které jsou spojeny pružnou vrstvou Winklerova typu. Soustava je namáhána řadou osamělých sil, které se pohybují rovnoměrnou rychlostí po nosníku. Problém popisuje soustava spřažených parciálních diferenciálních rovnic, která se řešila metodami integrálních transformací. Transformované řešení se získalo pro tlumenou soustavu, zatímco netlumený případ se podařilo přivést až do uzavřených výrazů.

Teoretický problém vystihuje předpjaté železobetonové mosty malých a středních rozpětí, u kterých se snažíme zmenšit dynamické účinky. V dalších etapách řešení se bude studovat okruh vstupních parametrů, pro které vycházejí dynamické účinky soustavy s pružnou mezivrstvou menší než u tytéž soustavy bez mezivrstvy. Ve stadiu příprav je také laboratorní výzkum jednoduchého modelu. Cesta k realizaci toho návrhu v praxi bude ještě dlouhá a obtížná.

5. Poděkování

Tato práce vznikla za podpory grantů GA AV ČR 200710505, GA ČR 105/05/2066, projektu MOSTDYN 1F45D/013 a výzkumného záměru ÚTAM AV ČR OZ 07207/10524.

6. Literatura

- [1] Frýba, L. (1989) *Kmitání těles a konstrukcí způsobené pohybujícím se zatížením*. 2. vydání, Academia, Praha.
- [2] Frýba, L. (2005) Zmenšení dynamických účinků na předpjatých mostech. *Stavební obzor*, 14, č. 9, str. 257-260.
- [3] Frýba, L., Fischer, C. (2005) Dynamics of prestressed beams coupled with a string. In : C.A. Brebbia, G.M. Carlomagno (eds) : *Computational Methods and Experimental Measurements XII*. WIT Press, Southampton, Boston, str. 445-454.
- [4] Frýba, L., Fischer, C. (2005) Vibration of a coupled system beam and string under a moving force. In : C. Soize, G.I. Schuëller (eds) : *Structural Dynamics EUROLYN 2005*, Millpress, Rotterdam, Netherlands, Vol. 2, str. 1033-1037.