National Conference with International Participation
ENGINEERING MECHANICS 2006
Svratka, Czech Republic, May 15 – 18, 2006
paper no. 243

STRESS RATE AND INCREMENTAL PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK IN FINITE DEFORMATIONS

Z. Fiala [1]

Summary: *Solution of finite deformation problems is sought in the space of all deformation tensor fields. Representation of a deformation process here as a trajectory makes us possible to further classify symmetric second-order tensor fields either as points, vectors, or covectors, and, as a consequence, assign them the corresponding time derivatives. However, as the space of all deformation tensor fields has proved non-euclidean, the time derivative of vector, and covector fields along the trajectory should be defined by the covariant derivative. This approach enables us coherently to formulate an incremental principle of virtual work, and propose the corresponding procedure in solving finite deformation problems. The approach will be demonstrated in finite elasticity.*

T. Frankel: "Physics and engineering readers would *profit greatly* if they would form the habit of translating the vectorial and tensorial statements found in their customary reading of physical articles and books into the *language of differential geometry, and of using its methods*."
[Frankel 1997, p.xxiii]

L. Schwartz: "Engineers and physicists should take note that *virtual work is simply the natural duality between cotangent and tangent bundles*."
[BAMS 2003, p.411]

1. Úvod

Mezi teorií malých (přesněji infinitezimálních) a konečných deformací existuje jeden zásadní rozdíl: Teorie malých deformací vychází z toho, že aproximuje deformaci pomocí infinitezimálních polí posunutí nad výchozí nedeformovanou konfigurací tělesa, kdežto teorie konečných deformací ji popisuje přesně pomocí diferencovatelných invertibilních transformací – difeomorfismů, transformujících výchozí konfiguraci do jiné, aktuální konfigurace. Časová změna

[1] RNDr. Zdeněk Fiala, CSc., Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Prosecká 76, 190 00 Prague 9, tel. +420 286 88 21 21, e-mail: fiala@itam.cas.cz

libovolné veličny tak obsahuje nejenom její vlastní vývoj v daném bodě, ale zahrnuje i samotnou změnu geometrie tělesa, tak jak se do této veličiny v průběhu deformace promítá.

Na rozdíl od malých deformací, není deformační proces z pohledu velkých deformací omezený jen na jistý lineární prostor, ale je reprezentovaný trajektorií v jiném, nelineárním prostoru $\mathcal{M} = \mathrm{Met}(\mathcal{B})$ – prostoru všech deformačních tenzorových polí nad vlastním tělesem $\mathcal{B}$. Na tomto prostoru lze přirozeným způsobem zavést Riemannovu metriku, což umožňuje výstižně, geometrickým způsobem popsat kinematiku kontinua. I když se celý tento formalismus opírá z hlediska mechaniky kontinua o poněkud neobvyklé koncepty diferencialní geometrie nekonečně dimenzionálních Riemannových variet Riemannových metrik, formalizmus není samoúčelný a zdaleka neslouží jen k elegantnímu přeformulování už dobře známých výsledků. Naopak, právě tento přístup umožňuje odvodit některé nové výsledky, které by byly pravděpodobně těžko dosažitelné pomocí jiných postupů.

Předně platí, že prostor všech deformačních tenzorových polí $\mathcal{M}$ není euklidovský prostor. To však ale znamená, že pokud k danému deformovanému stavu určíme deformační přírůstek, výsledná deformace se nezíská jednoduše, prostým přičtením přírůstku k stávajícímu deformovanému stavu, ale pomocí jistého zobrazení z příslušného tečného prostoru, ve kterém tento přírůstek leží, do vlastního prostoru deformací $\mathcal{M}$.

Dále ukážeme, že pole napětí na tělese $\mathcal{B}$ představuje z hlediska geometrie prostoru $\mathcal{M}$ kovektor, a proto rychlost jeho změny v průběhu deformace vede na právě jednu objektivní časovou derivaci, konzistentní s geometrií samotného deformačního procesu. Podobně i ostatním symetrickým tenzorovým polím druhého řádu na $\mathcal{B}$ bude přiřazena odpovídající časová derivace, v závislosti na tom, zda se z hlediska geometrie prostoru $\mathcal{M}$ chovají jako vektory, kovektory, nebo body.

Linearizací deformačního procesu spojenou s těmito časovými derivacemi dále získáme inkrementální princip virtuálních prací, pomocí kterého lze přírůstek posunutí a deformace vypočítat ze zadaných přírůstků externích sil a předepsaných posunutí. Nová, výsledná deformace pak leží na geodetice vycházející ze stávajícího deformovaného stavu, ve směru a vzdálenosti odpovídající přírůstku deformace.

Co se týče osnovy příspěvku, v další části zopakujeme základní fakta o prostoru polí deformačních tenzorů $\mathcal{M}$, zejména těch týkajících se Riemannovy metriky. Třetí část příspěvku bude věnována časové derivaci časově závislých deformovaných tenzorových polí, jako důsledku existence kovariantní derivace na Riemannově varietě $\mathcal{M}$. Nové výsledky budou náplní až čtvrté části, která se týká pole napětí a jeho časové derivace, a páté části, kde bude odvozen inkrementální princip virtuálních prací. Celý formalizmus bude ilustrován na obecné elastostatické úloze. V příloze pak budou stručně shrnuty základní pojmy z kinematiky kontinua formulované z pohledu diferenciální geometrie s důrazem na jejich skutečný geometrický význam.

2. Prostor deformačních tenzorových polí

Nový přístup k mechanice kontinua, který inicioval [Rougée 1997] a dále modifikoval [Fiala 2003, Fiala 2004a, Fiala 2004b], umožňnuje odvodit časovou derivaci tenzorových polí geometricky konzistentním způsobem, a to pomocí kovariantní derivace v prostoru nekonečně dimenzionální Riemannovy variety Riemannových metrik.

Z pohledu velkých deformací lze deformační proces reprezentovat trajektorií v nelineárním prostoru $\mathcal{M} = \mathrm{Met}(\mathcal{B})$, prostoru všech deformačních tenzorových polí – zde pravých

Cauchyho-Greenových tenzorů deformace $C^\flat$ (viz. (43)). Protože deformační pole jsou vlastně Riemannovými metrikami, prostor $\mathcal{M}$ je tak tvořen všemi Riemannovými metrikami prostoru $\mathcal{B}$, a jako celek tvoří z matematického hlediska nekonečně dimenzionální varietu. V případě malých deformací je pak deformační proces reprezentovaný trajektorií v lineárním vektorovém prostoru, který zde, v tomto kontextu, představuje tečný prostor $T_{C^\flat}\mathcal{M}$ k varietě $\mathcal{M}$ v bodě $C^\flat$, přičemž bod $C^\flat$ zároveň reprezentuje počáteční deformační stav tělesa.

Klíčovým momentem, s významnými důsledky pro popis kinematiky kontinua představuje zavedení Riemannovy metriky Γ na varietě $\mathcal{M}$. S metrikou totiž získáváme kovariantní derivaci, a tedy i možnost stanovit rychlost změny tenzorových polí podél trajektorie, neboli jejich časovou derivaci během deformačního procesu.

Nechť křivka $C^\flat_t$ reprezentuje deformační proces $C^\flat\colon \langle t_0, t\rangle \to \mathcal{M}$, pak z hlediska geometrie variety $\mathcal{M}$ představují její tečny $\partial C^\flat_t$ vektory, a množina těchto tečen $\{\partial C^\flat_t\}$ vektorové pole podél této křivky. Dolní index t navíc zdůrazňuje tu skutečnost, že toto vektorové pole je časové závislé. Pomocí zobrazení Φ_t, které je vlastně izometrií mezi dvěma Riemannovými varietami $(\mathcal{B}, C^\flat_t = \Phi^*_t g)$ a $(\mathcal{S} = \Phi_t(\mathcal{B}), g)$, lze nyní stanovit skalární součin dvou vektorů $\partial C^{i\flat}_t \in T_{C^\flat_t}\mathcal{M}$ na základě skalárního součinu odpovídajících tenzorových polí $2d^{i\flat} = \Phi_{t\,*}(\partial C^{i\flat}_t)$ z prostoru $\mathcal{E}^3$ (viz. (51)). Koeficient je zároveň volen tak, aby platil vztah (14).

$$\Gamma_{C^\flat_t}(\partial C^{1\flat}_t, \partial C^{2\flat}_t) := 4\Phi^*_t[\langle d^{1\flat}, d^{2\flat}\rangle_g] = 4\langle \Phi^*_t(d^{1\flat}), \Phi^*_t(d^{2\flat})\rangle_{\Phi^*_t(g)}\,. \tag{1}$$

Skalární součin symetrických kovariantních tenzorových polí druhého řádu na $\mathcal{S}$

$$\langle d^{1\flat}, d^{2\flat}\rangle_g = \int_{\mathcal{S}} g_x(d^{1\flat}, d^{2\flat})\, dv = \int_{\mathcal{S}} g^{ik} g^{lj} d^1_{ij}\, d^2_{kl}\, dv \tag{2}$$

představuje rozšíření skalárního součinu $g_x(d^{1\flat}, d^{2\flat}) = g^{ik} g^{lj} d^1_{ij}\, d^2_{kl}$ tenzorů v bodě x na tenzorová pole na $\mathcal{S}$, a ten zase standardní rozšíření skalárního součinu dvou vektorů, tj. výrazu $g_x(u, v) = g_{ij}\, u^i v^j$ (viz. (41)), na symetrické kovariantní tenzory druhého řádu. Tímto postupem získáme na $\mathcal{M}$ *Riemannovu metriku* Γ, tj. skalární součin libovolných dvou vektorů $H^i \in T_{C^\flat_t}\mathcal{M}$ vycházejících z libovolného bodu $C^\flat_t \in \mathcal{M}$, ve tvaru

$$\Gamma_{C^\flat_t}(H^1, H^2) := \langle H^1, H^2\rangle_{C^\flat_t} = \int_{\mathcal{B}} C_t^{\frac{1}{2}} B^{ik}_t B^{lj}_t H^1_{ij} H^2_{kl}\, dX\,, \tag{3}$$

kde B^{ik}_t reprezentují složky Piolova deformačního pole $B^\sharp_t = \Phi^*_t\big(g^\sharp\big)$ (viz. (44)).

V našem kontextu budeme Riemannovu metriku Γ na $\mathcal{M}$ nazývat *supermetrikou*, abychom ji tak odlišili od deformačních tenzorových polí $C^\flat_t$, která jsou rovněž metrikami, ale na tělese $\mathcal{B}$. Naproti tomu, supermetrika je metrikou na prostoru všech Riemannových metrik – zde deformačních tenzorových polí $C^\flat_t$, a proto prostor $\mathcal{M}$ z matematického hlediska představuje *nekonečně dimenzionální Riemannovu varietu Riemannových metrik*.

Riemannovou geometrií těchto prostorů se zabývají ve svých článcích [Freed et al. 1989], [Gill-Medrano et al. 1991] a [Kriegel et al. 1997], a jak lze ukázat v příspěvku [Fiala 2004c], i na tomto nekonečně dimenzionálním prostoru lze vhodným způsobem zavést souřadnice a vyjádřit tak pomocí nich složky afinní konexe a kovariantní derivace.

Jako jednodušší, konečně dimenzionální prostor zavedl Riemannovu varietu $\mathcal{M}$ poprve Rougée a své výsledky shrnul v knize [Rougée 1997]. V jeho případě prostor $\mathcal{M}$ tvoří deformační tenzory $C^\flat(X)$ v pevně zvoleném bodě $X \in \mathcal{B}$, s Riemannovou metrikou

$$\Gamma_{C^\flat_t(X)}(H^1, H^2) = \frac{1}{4} B^{ik}_t B^{lj}_t H^1_{ij} H^2_{kl}. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že Rougée se omezil pouze na tenzory, namísto tenzorových polí, jeho varieta je jen 6-dimenzionální. Co se však ukázlo poněkud nečekané, byla skutečnost, že jim odvozená časová derivace na základě kovariantní derivace je totožná se *Zarembovou-Jaumannovou derivací*. V našem nekonečně dimenzionálním případě dodatečný člen $C_t^{1/2} \equiv \sqrt{\det(C_t^\flat)}$, který zajišťuje nezávislost supermetriky (3) na volbě souřadnic tělesa, však modifikuje kovariantní derivaci a vede tak k *nové, modifikované Zarembově-Jaumannově časové derivaci*.

3. Časová derivace tenzorových polí

Podmínka, že časová derivace tenzoru je opět ten samý typ tenzoru, je značně obecná, a proto nepřekvapuje, že objektivních časových derivací je v mechanice kontinua celá řada. Na druhé straně, z geometrického hlediska je deformační proces charakterizován posloupností difeomorfismů Φ_t jednoznačně, a proto se jeví naprosto přirozené, aby i časové derivace tenzorových polí, která jsou s tímto procesem geometricky svázaná, byly i tímto deformačním procesem také jednoznačně určeny.

Při hledání odpovídající časové derivace se nabízí jako přirozené vychodisko formalizmus spojený s prostorem $\mathcal{M}$. Jeho geometrie totiž dále umožňuje rozlišovat mezi tenzorovými poli druhého řádu v $\mathcal{E}^3$. Protože body prostoru $\mathcal{M}$ jsou tvořeny metrikami, tedy symetrickými pozitivně definitními kovariantními poli v $\mathcal{E}^3$, vektory prostoru $\mathcal{M}$ tvoří symetrická kovariantní tenzorová pole (např. $\partial C_t^\flat$) a kovektory symetrická kontravariantní tenzorová pole. Jak ukážeme i v následující části, kovektorem v $\mathcal{M}$ je i pole napětí.

Toto rozlišení je zásadní, protože umožňuje přirozeným způsobem přiřadit jednotlivým tenzorovým polím v $\mathcal{E}^3$ příslušnou časovou derivaci. Pokud odpovídající vektory, resp. kovektory těchto polí v $\mathcal{M}$ tvoří podél trajektorie vektorové, či kovektorové pole, jejich časovou změnu v průběhu deformace vyjádříme právě pomocí kovariantní derivace. Transformují-li se však tato pole do bodů a jejich posloupnost v samotnou trajektorii v $\mathcal{M}$, vystačíme si samozřejmě s běžnou časovou derivací (srovnej $C_t^\flat$ a $\partial C_t^\flat$), a při pohledu z aktuální konfigurace pak s Liovou derivací (srovnej $g = \Phi_{t*}\big(C_t^\flat\big)$ a $2d^\flat = \mathcal{L}_{v_t}\, g = \Phi_{t*}\big(\partial C_t^\flat\big)$, viz. (43), (47) a (51)).

Nechť tedy křivka $C_t^\flat$ představuje deformační proces $C^\flat : \langle t_0, t\rangle \to \mathcal{M}$, a nechť tenzorové pole Θ podél křivky reprezentuje časový vývoj některé mechanické veličiny během deformačního procesu. Vzhledem k tomu, že *kovariantní derivace vyjadřuje rychlost změny tenzorových polí podél trajektorie, kdy jejími body procházíme ve směru a rychlostí danou jejím tečným vektorem* [Dodson et al. 1997], můžeme pak ***časovou derivaci*** časově proměnného tenzorového pole Θ, a jemu odpovídajícího tenzorového pole $\theta = \Phi_{t*}(\Theta)$ v $\mathcal{E}^3$, přirozeně ztotožnit s časovou derivací vycházející z kovariantní derivace vzhledem k rychlosti deformace $\partial C_t^\flat$ (srovnej analogii s (53), která platí i s přihlédnutím k časově proměnným polím).

$$\frac{D}{Dt}\Theta := \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \nabla_{\partial C_t^\flat}\Theta \qquad \text{na prostoru } \mathcal{M} \tag{5}$$

$$\frac{D}{Dt}\theta := \Phi_{t*}\left(\frac{D}{Dt}\Theta\right) \qquad \text{na prostoru } \mathcal{S} \tag{6}$$

Symbol ∇ zde představuje kovariantní derivaci asociovanou s metrikou Γ na varietě $\mathcal{M}$. Kovariantní derivace ve vztahu (5) zaručuje objektivitu časové derivace automaticky. Na rozdíl od předchozích prací uvažujeme i časově proměnná pole, a co se týče přítomnosti členu $\partial\Theta$, stačí odkázat na [Abraham et al. 1988], pp. 245-247, a [Frankel 1997]. Konečné výsledky jsou stejné jako ve [Fiala 2004c].

Časová derivace posloupnosti ***symetrických kovariantních tenzorových polí druhého řádu*** u v aktuální konfiguraci $\mathcal{S}$, pokud tato pole transformovaná do $\mathcal{M}$ představují *vektorové pole* $U = \Phi_t^*(u)$ podél trajektorie $C_t^\flat$, je dána výrazem

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{Dt}u\right)_{mp} &= (L_{v_t}\,u)_{mp} - \left(d_{ma}g^{ab}u_{bp} + u_{ma}g^{ab}d_{bp}\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(g^{ab}u_{ab}\,d_{mp} + g^{ab}d_{ab}\,u_{mp} - d^{ab}u_{ab}\,g_{mp}\right) = \\ &= \left(\dot{u}^{ZJ}\right)_{mp} + \frac{1}{2}\left(g^{ab}u_{ab}\,d_{mp} + g^{ab}d_{ab}\,u_{mp} - d^{ab}u_{ab}\,g_{mp}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Časová derivace posloupnosti ***symetrických kontravariantních tenzorových polí druhého řádu*** ω v aktuální konfiguraci $\mathcal{S}$, pokud tato pole transformovaná do $\mathcal{M}$ představují *kovektorové pole* $\Omega = \Phi_t^*(\omega)$ podél trajektorie $C_t^\flat$, je dána vztahem

$$\begin{aligned}\left(\frac{D}{Dt}\omega\right)^{ij} &= (L_{v_t}\,\omega)^{ij} + \left(\omega^{ia}d_{ab}g^{bj} + g^{ia}d_{ab}\omega^{bj}\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(g_{ab}\omega^{ab}d^{ij} - g^{ab}d_{ab}\,\omega^{ij} - \omega^{ab}d_{ab}\,g^{ij}\right) = \\ &= \left(\dot{\omega}^{ZJ}\right)^{ij} + \frac{1}{2}\left(g_{ab}\omega^{ab}d^{ij} - g^{ab}d_{ab}\,\omega^{ij} - \omega^{ab}d_{ab}\,g^{ij}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Index *ZJ* označuje *Zarembovu-Jaumannovu derivaci*, která vznikne úpravou výrazů v první řádce ve vztazích (7) a (8) po rozepsání *Oldroydovy časové derivace* (viz. (46))

$$(L_{v_t}\,u)_{ij} = \dot{u}_{ij} + (d-w)_{ik}\,g^{kl}u_{lj} + u_{ik}\,g^{kl}(d+w)_{lj} \tag{9}$$

$$(L_{v_t}\,\omega)^{ij} = \dot{\omega}^{ij} - (d+w)^{ik}g_{kl}\,\omega^{lj} - \omega^{ik}g_{kl}\,(d-w)^{lj}, \tag{10}$$

přičemž antisymetrická část rychlostního gradientu $w = \left[(\nabla v_t)^\flat\right]_a$ označuje vířivost.

Vyjádříme-li pak výrazy (7) a (8) v běžných kartézských souřadnicích, získáme

$$u^{\spadesuit} = \dot{u} - wu + uw + \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{tr}(u)d + \mathbf{tr}(d)u - (d:u)I\right] \tag{11}$$

$$\omega^{\clubsuit} = \dot{\omega} - w\omega + \omega w + \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{tr}(\omega)d - \mathbf{tr}(d)\omega - (\omega:d)I\right]. \tag{12}$$

Význam symbolů $\mathbf{tr}(d)$, $d:u$, $\omega:d$, $\mathbf{tr}(u)$, a $\mathbf{tr}(\omega)$ je jasný z kontexu.

4. Časová derivace pole napětí

Výkon vnitřních sil (stress power) je dán vztahem

$$\begin{aligned}\frac{\delta E_i}{\delta t} &:= \int_{\mathcal{S}}\langle\sigma^\sharp, d^\flat\rangle_{T_x\mathcal{S}}\,dv \equiv \int_{\mathcal{S}}\sigma^{ij}d_{ij}\;dv = \int_{\mathcal{S}} g_x(\sigma^\flat, d^\flat)\,dv \equiv \int_{\mathcal{S}} g^{ik}g^{jl}\sigma_{kl}\,d_{ij}\;dv \\ &= \int_{\mathcal{B}} B_t^{ik}B_t^{jl}\Sigma_{kl}D_{ij}\,JdV = \int_{\mathcal{B}} J\Sigma^{ij}D_{ij}\,dV \equiv \int_{\mathcal{B}}\langle P^\sharp, D^\flat\rangle_{T_X\mathcal{B}}\,dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} C_t^{\frac{1}{2}}B_t^{ik}B_t^{jl}\Sigma_{kl}D_{ij}\,dX \equiv \Gamma_{C_t^\flat}(\Sigma^{\sharp\Gamma}, D^{\sharp\Gamma}) = \langle\Sigma^{\flat\Gamma}, D^{\sharp\Gamma}\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\,,\end{aligned} \tag{13}$$

kde $\Sigma^\flat = \Phi_t^*\sigma^\flat$, $\Sigma^\sharp = \Phi_t^*\sigma^\sharp$ a $D^\flat = \Phi_t^* d^\flat = \frac{1}{2}\partial C_t^\flat$. Symbol σ jako obvykle reprezentuje Cauchyho napětí. Dále jsme použili vztah $JdV = \Phi_t^* dv$, a zároveň jsme vyjádřili objemový element vztahem $dV = G^{\frac{1}{2}}\,dX$ a Jakobián jako $J = (C_t/G)^{\frac{1}{2}}$. Symbolem $P^\sharp = J\Sigma^\sharp$ jsme označili druhé Piolovo-Kirchhoffovo pole napětí.

Výkon vnitřních sil tak můžeme zapsat třemi způsoby:

$$\frac{\delta E_i}{\delta t} = \int_{\mathcal{S}} \langle \sigma^\sharp, d^\flat \rangle_{T_x\mathcal{S}}\, dv = \int_{\mathcal{B}} \langle P^\sharp, D^\flat \rangle_{T_X\mathcal{B}}\, dV = \langle \Sigma^{\flat\Gamma}, D^{\sharp\Gamma} \rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\,. \tag{14}$$

To však ale znamená, že veličina $\Sigma^{\sharp\Gamma}(C^\flat(X)) := \Sigma^\flat(X)$ se na prostoru $\mathcal{M}$ chová jako *vektor* – podobně jako veličina $D^{\sharp\Gamma}(C^\flat(X)) := D^\flat(X)$, zatímco veličina $\Sigma^{\flat\Gamma}(C^\flat(X)) = C^{\frac{1}{2}}\Sigma^\sharp(X) = G^{\frac{1}{2}}P^\sharp(X)$ jako *kovektor*. Kovektor $\Sigma^{\flat\Gamma} \in T^*_{C^\flat}\mathcal{M}$ získáme z vektoru $\Sigma^{\sharp\Gamma} \in T_{C^\flat}\mathcal{M}$ pomocí transformace $\Sigma^{\flat\Gamma} = \mathbf{\Gamma}\Sigma^{\sharp\Gamma}$, kde $\mathbf{\Gamma} : T_{C^\flat}\mathcal{M} \to T^*_{C^\flat}\mathcal{M}$ je operátor asociovaný s metrikou Γ (srovnej (42)). Rychlost změny kovektorového pole $\Sigma^{\flat\Gamma}$ podél trajektorie $C_t^\flat$ v $\mathcal{M}$ je tak daná vztahem (5).

Druhé Piolovo-Kirchhoffovo pole napětí $P^\sharp$ jako funkce pole pravých Cauchyho-Greenových deformačních tenzorů $C^\flat$ představuje na prostoru $\mathcal{M}$ také ***kovektor*** – podobně jako $\Sigma^{\flat\Gamma}$. Pro jeho časovou derivaci během deformačního procesu dostáváme

$$\frac{D}{Dt}P^\sharp = G^{-\frac{1}{2}}\frac{D}{Dt}\Sigma^{\flat\Gamma}. \tag{15}$$

Protože $d/dt(C_t^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}(\partial C_{ab}B^{ab})C^{-\frac{1}{2}}$, dále platí [Fiala 2004c], ref. (12))

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\Sigma^\sharp \equiv\ & \frac{D}{Dt}\left(C_t^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\flat\Gamma}\right) = \frac{d}{dt}\left(C_t^{-\frac{1}{2}}\right)\Sigma^{\flat\Gamma} + C_t^{-\frac{1}{2}}\frac{D}{Dt}\Sigma^{\flat\Gamma} \\ =\ & -\frac{1}{2}\left(\partial C_{ab}\,B_t^{ab}\right)\Sigma^\sharp + \frac{1}{J}\frac{D}{Dt}P^\sharp \end{aligned} \tag{16}$$

a pro ***časovou derivaci pole napětí*** $\sigma^\sharp$ během deformačního procesu tak nakonec získáme

$$\frac{D}{Dt}\sigma^\sharp \equiv \Phi_{t*}\!\left[\frac{D}{Dt}\Sigma^\sharp\right] = -\left(d_{ab}\,g^{ab}\right)\sigma^\sharp + \frac{1}{J}\Phi_{t*}\!\left[\frac{D}{Dt}P^\sharp\right]. \tag{17}$$

Označíme-li deformační proces jako trajektorii $C^\flat : \langle t_0, t\rangle \to \mathcal{M}$ v prostoru polí deformačních tenzorů $\mathcal{M}$, pak změnu vnitřní energie ΔE_i v tělese po završení tohoto procesu lze zapsat jako křivkový integrál

$$\Delta E_i = \int_{\langle t_0,t\rangle} \langle \Sigma^{\flat\Gamma}, D^{\sharp\Gamma} \rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\, dt = \int_{\langle t_0,t\rangle} \langle \Sigma^{\flat\Gamma}, \tfrac{1}{2}\,\partial C_t^{\sharp\Gamma} \rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\, dt \equiv \int_{C_t^\flat} \tfrac{1}{2}\Sigma^{\flat\Gamma}. \tag{18}$$

Pokud se deformace odehrává v ***elastickém kontinuu***, změna vnitřní energie nezávisí na integrační cestě a samotná vnitřní energie je potenciálem na prostoru $\mathcal{M}$, tj.

$$\Sigma^{\flat\Gamma} = 2d^{\mathcal{M}}E_i\,, \tag{19}$$

kde $d^{\mathcal{M}}$ představuje vnější diferenciál na varietě $\mathcal{M}$. Vyjádříme dále E_i jako

$$E_i = \int_{\mathcal{B}} \varepsilon\, dV = \int_{\mathcal{B}} \rho_{\mathcal{B}}\, e\, dV, \tag{20}$$

pak vzhledem k lokálnímu charakteru metriky Γ, a díky tomu, že Γ na každém tečném prostoru $T_X\mathcal{B}$ indukuje skalární součin, platí

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\flat\Gamma} &= 2d^{\mathcal{M}}E_i = 2\frac{\partial E_i}{\partial C_{ij}}(C^\flat)\,dC_{ij} \\
&= 2\int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial C_{ij}}\,dC_{ij}\right)(X)\,dV = 2\int_{\mathcal{B}}\rho_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial e}{\partial C_{ij}}\,dC_{ij}\right)(X)\,dV \\
&= 2\int_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial C_{ij}}\,dC_{ij}\right)(X)\,J^{-1}\,C^{\frac{1}{2}}\,dX = 2\int_{\mathcal{B}}\rho_{\mathcal{B}}\left(\frac{\partial e}{\partial C_{ij}}\,dC_{ij}\right)(X)\,J^{-1}\,C^{\frac{1}{2}}\,dX\,.
\end{aligned} \tag{21}$$

Tento vztah pak můžeme lokálně zapsat následovně

$$\Sigma^{\flat\Gamma}(C^\flat(X)) = 2J^{-1}C^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial C^\flat} = 2\rho_{\mathcal{B}}J^{-1}C^{\frac{1}{2}}\frac{\partial e}{\partial C^\flat}\,, \tag{22}$$

a proto platí

$$\begin{aligned}
\Sigma^\sharp(X) = C^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{\flat\Gamma} &= 2J^{-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial C^\flat} = 2\rho_{\mathcal{B}}J^{-1}\frac{\partial e}{\partial C^\flat} \\
(P^\sharp)^{ij} = J(\Sigma^\sharp)^{ij} &= 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial C_{ij}} = 2\rho_{\mathcal{B}}\frac{\partial e}{\partial C_{ij}}\,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Připomeňme jen, že v každém bodě $X\in\mathcal{B}$ pro *izotropní elastické kontinuum* platí [Marsden et al. 1993] $\varepsilon=\varepsilon(I_1, I_2, I_3)$, kde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \operatorname{tr} C \\
I_2 &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr} C^2\right] \\
I_3 &= \det C = \frac{1}{6}\left[(\operatorname{tr} C)^3 - 3\operatorname{tr} C\ \operatorname{tr} C^2 + 2\operatorname{tr} C^3\right].
\end{aligned} \tag{24}$$

Protože pak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial C^\flat} &= G^\sharp \\
\frac{\partial I_2}{\partial C^\flat} &= I_1G^\sharp - B^\sharp \\
\frac{\partial I_3}{\partial C^\flat} &= I_2G^\sharp - I_1B^\sharp + CB^\sharp,
\end{aligned} \tag{25}$$

ze vztahu (23) dostáváme

$$P^\sharp = 2\frac{\partial\varepsilon}{\partial C^\flat} = 2\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_3}\right)G^\sharp - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_2} + I_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_3}\right)B^\sharp + \frac{\partial\varepsilon}{\partial I_3}CB^\sharp\right], \tag{26}$$

a vyjádříme-li Jakobián výrazem $J = (C/G)^{\frac{1}{2}}$, pak ze vztahu (22) dále obdržíme

$$\Sigma^{\flat\Gamma} = 2G^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_3}\right)G^\sharp - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_2} + I_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial I_3}\right)B^\sharp + \frac{\partial\varepsilon}{\partial I_3}CB^\sharp\right]. \tag{27}$$

5. Inkrementální podoba principu virtuálních prací

Těleso v deformovaném stavu, charakterizované polem deformací $C^\flat$ a polem napětí $\Sigma^{\flat\Gamma}$, resp. $\sigma^\sharp$, které je vystaveno vnějšímu zatížení T, f a předepsanému posunutí u_0, je v rovnováze, pokud virtuální výkon externích sil (levá strana rovnice) je roven virtuálnímu výkonu vnitřních sil (pravá strana rovnice), tj. pokud pro libovolné virtuální pole posunutí $\psi \in T\mathcal{S}$, kde zároveň $d^\flat(\psi) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\psi g$, platí *princip virtuálních prací*

$$\int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(T,\psi)\, ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(f,\psi)\, dv = \int_{\mathcal{S}} \langle \sigma^\sharp, d^\flat(\psi)\rangle_{T_x\mathcal{S}}\, dv\,. \tag{28}$$

Uvažujeme-li nyní kvazistatický deformační proces popsaný trajektorií v prostoru polí deformačních tenzorů $C^\flat : \langle t_0, t\rangle \to \mathcal{M}$, pak vztah (28) musí platit pro každý bod této trajektorie. Vyjádříme-li pak na základě vztahu (14) virtuální výkon vnitřních sil (pravá strana rovnice (28)) v prostoru $\mathcal{M}$, dostáváme

$$\left[\frac{\delta E_i}{\delta t}(C_t^\flat, \Sigma_t^{\flat\Gamma})\right](\Psi) = \Gamma_{C^\flat}(\Sigma^{\sharp\Gamma}, H^{\sharp\Gamma}(\Psi)) = \langle \Sigma^{\flat\Gamma}, H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}\,, \tag{29}$$

kde $H^{\sharp\Gamma} \in T_{C_t^\flat}\mathcal{M}$, přičemž $H^{\sharp\Gamma}(\Psi) \equiv H^\flat(\Psi) = \Phi_t^*[\,d^\flat(\psi)]$ a $\Psi = \Phi_t^*(\psi)$.

Abychom získali princip virtuálních prací v inkrementálním tvaru, musíme porovnat virtuální výkony vnitřních sil v dvou různých, po sobě jdoucích stavech $(C_t^\flat, \Sigma_t^{\flat\Gamma})$ v čase t, a $(C_{t+dt}^\flat, \Sigma_{t+dt}^{\flat\Gamma})$ v čase $t+dt$. Protože tyto výkony jsou však vyjádřeny veličinami z tečných a kotečných prostorů nad různými body $C_t^\flat$ a $C_{t+dt}^\flat$ prostoru $\mathcal{M}$, jejich porovnání lze uskutečnit jen pomocí paralelního přenosu, v limitě pak pomocí kovariantní derivace vzhledem k přírůstku deformace $\partial C_t^\flat$. Protože pracujeme s časově závislými poli, časovou derivaci vektorového i kovektorového pole podél trajektorie $C_t^\flat$ v prostoru $\mathcal{M}$ tak vyjádříme ve tvaru (srovnej (5))

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_{\partial C_t^\flat(\mathbf{v})}\,, \tag{30}$$

kde $\mathbf{v} = \Phi_t^*(v) \in T\mathcal{B}$ a $v \in T\mathcal{S}$ (viz. (47), (51) a (54)).

Pro *linearizaci virtuálního výkonu vnitřních sil* (29) podél trajektorie $C_t^\flat$ pak platí

$$\frac{D}{Dt}\left\langle \Sigma^{\flat\Gamma}, H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}} = \left\langle \frac{D}{Dt}\Sigma^{\flat\Gamma}, H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}} + \left\langle \Sigma^{\flat\Gamma}, \frac{D}{Dt}H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}}. \tag{31}$$

Protože $J = (C_t/G)^{\frac{1}{2}}$, pro první člen pak s využitím vztahu (15) dostaneme

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{D}{Dt}\Sigma^{\flat\Gamma}, H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}} &= \int_{\mathcal{B}} \left\langle \frac{D}{Dt}P^\sharp, H^\flat(\Psi)\right\rangle_{T_X\mathcal{B}} dV \\ &= \int_{\mathcal{S}} \left\langle \frac{1}{J}\,\Phi_{t*}\left[\frac{D}{Dt}P^\sharp\right], d^\flat(\psi)\right\rangle_{T_x\mathcal{S}} dv\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Vzhledem k tomu, že $\Psi \in T\mathcal{B}$ představují testovací funkce, a proto $\partial/\partial t(\Psi) = 0$, lze druhý člen na levé straně rovnice přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\left\langle \Sigma^{\flat\Gamma}, \frac{D}{Dt}H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}} &= \left\langle \Sigma^{\flat\Gamma}, \nabla_{\partial C^{\sharp\Gamma}(\mathbf{v})} H^{\sharp\Gamma}(\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}} = \left\langle \Sigma^{\flat\Gamma}, H^{\sharp\Gamma}(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{v}}\Psi)\right\rangle_{T_{C_t^\flat}\mathcal{M}} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \left\langle \sigma^\sharp, d^\flat(\widehat{\nabla}_v\psi)\right\rangle_{T_x\mathcal{S}} dv, \end{aligned} \tag{33}$$

přičemž rovnost $\nabla_{\partial C^{\flat}(\mathbf{v})} H^{\sharp\Gamma}(\Psi) \equiv \nabla_{\partial C^{\sharp\Gamma}(\mathbf{v})} H^{\sharp\Gamma}(\Psi) = H^{\sharp\Gamma}(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{v}}\Psi)$ platí v důsledku samotné geometrie, a $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{v}}\Psi = \Phi_t^*(\widehat{\nabla}_v\psi) \in T\mathcal{B}$ představuje vyjádření kovariantní derivace v konvektivních souřadnicích (srovnej (54) - (56)).

Dosazením výrazů (32) a (33) do rovnice (31) tak získáme

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\delta E_i}{\delta t}(C_t^{\flat}, \Sigma^{\flat\Gamma})\right) = \int_{\mathcal{S}} \left\langle \frac{1}{J}\,\Phi_{t*}\left[\frac{D}{Dt}P^{\sharp}\right], d^{\flat}(\psi)\right\rangle_{T_x\mathcal{S}} dv + \int_{\mathcal{S}} \left\langle \sigma^{\sharp}, d^{\flat}(\widehat{\nabla}_v\psi)\right\rangle_{T_x\mathcal{S}} dv\,. \quad (34)$$

Pro *linearizaci virtuálního výkonu externích sil* platí

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\delta E_e}{\delta t}(f,T)\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\nabla}_v\right)\left(\int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(T,\psi)\,ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(f,\psi)\,dv\right)\\ &= \int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(\dot{T},\psi)\,ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(\dot{f},\psi)\,dv + \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(T,\widehat{\nabla}_v\psi)\,ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(f,\widehat{\nabla}_v\psi)\,dv\,,\end{aligned} \quad (35)$$

kde pro testovací funkce $\psi \in T\mathcal{S}$ opět platí $\partial/\partial t(\psi) = 0$.

Vzhledem k tomu, že $\widehat{\nabla}_v\psi \in T\mathcal{S}$ a $H^{\sharp\Gamma}(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{v}}\Psi) \in T_{C_t^{\flat}}\mathcal{M}$, platí na základě principu virtuálnínch prací rovnost

$$\int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(T,\widehat{\nabla}_v\psi)ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(f,\widehat{\nabla}_v\psi)\,dv = \int_{\mathcal{S}} \langle\sigma^{\sharp}, d^{\flat}(\widehat{\nabla}_v\psi)\rangle_{T_x\mathcal{S}}\,dv\,, \quad (36)$$

pomocí které ze vztahu (viz. (34) a (35))

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\delta E_e}{\delta t}(f,T)\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\delta E_i}{\delta t}(C_t^{\flat}, \Sigma_t^{\flat\Gamma})\right) \quad (37)$$

získáme ***inkrementální princip virtuálních prací*** pro neznámou $\partial C^{\flat}(\mathbf{v})$, resp. $d^{\flat}(v)$, ve tvaru

$$\int_{\partial\mathcal{S}_T} g_x(\dot{T},\psi)\,ds + \int_{\mathcal{S}} g_x(\dot{f},\psi)\,dv = \int_{\mathcal{S}} \left\langle \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\,\sigma^{\sharp}(v), d^{\flat}(\psi)\right\rangle_{T_x\mathcal{S}} dv\,, \quad (38)$$

kde (viz. (8) a (17))

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\,\sigma^{\sharp}(v)\right)^{ij} &= \left(\frac{D}{Dt}\,\sigma^{\sharp}(v) + (d_{ab}\,g^{ab})\,\sigma^{\sharp}\right)^{ij}\\ &= \left(\dot{\sigma}^{ZJ}\right)^{ij} + \frac{1}{2}\left(g_{ab}\,\sigma^{ab}d^{ij} + g^{ab}d_{ab}\,\sigma^{ij} - \sigma^{ab}d_{ab}\,g^{ij}\right).\end{aligned} \quad (39)$$

Vztah (38) samozřejmě platí pro libovolné virtuální pole posunutí $\psi \in T\mathcal{S}$. Vzhledem k definici (5-6), časová derivace (39) představuje *lineární funkcionál nad* $\partial C^{\flat}(\mathbf{v})$*, resp.* $d^{\flat}(v)$.

Vypočteme-li pak na základě inkrementálního principu virtuálních prací ze zadaných přírůstků vnějšího zatížení a předepsaného posunutí k danému deformovanému stavu tělesa $C_t^{\flat}$ deformační přírůstek $\partial C_t^{\flat}$, pak nová, výsledná deformace $C_{t+\Delta t}^{\flat}$ se získá zobrazením tohoto deformačního přírůstku z výchozího stavu $C_t^{\flat}$ do prostoru polí deformačních tenzorů $\mathcal{M}$ – tj. zobrazením vektoru $\partial C_t^{\flat}$ z tečného prostoru $T_{C_t^{\flat}}\mathcal{M}$ v bodě $C_t^{\flat}$ do prostoru $\mathcal{M}$. Toto zobrazení lze formálně zapsat geometricky, pomocí obecné formule

$$C_{t+\Delta t}^{\flat} = \exp_{C_t^{\flat}}\left[\Delta t\,\partial C_t^{\flat}\right]. \quad (40)$$

Pro náš prostor $\mathcal{M}$ byl její konkretní tvar odvozen v práci [Freed et al. 1989], Theorem 2.3. Pro euklidovské prostory se pak tato formule redukuje na prosté sčítání.

6. Závěr

Na zákadě formulace kinematiky kontinua v rámci nekonečně dimenzionální Riemannovy diferenciální geometrie byla odvozena časová derivace pole napětí a inkrementální podoba principu virtuálních prací, a byl naznačen obecný postup řešení úlohy s konečnými deformacemi.

7. Poděkování

Příspěvek byl připraven v rámci výzkumného záměru AV0Z20710524 .

8. Literatura

[Abraham et al. 1988] Abraham, R., Marsden, J. E. & Ratiu, T. S. (1988) *Manifolds, tensor analysis, and applications*, in: Applied Mathematical Sciences 75, Springer-Verlag

[BAMS 2003] BAMS (2003) J. Koiller: Review of Analytical Mechanics by J. G. Papastavridis, *Bulletin of American Mathematical Society*, 40(3), 405-419

[Dodson et al. 1997] Dodson, C. T. J. & Poston, T. (1997) *Tensor Geometry*, Springer-Verlag

[Gill-Medrano et al. 1991] Gill-Medrano, O. & Michor, P. W. (1991) The Riemannian manifold of all Riemannian metrics, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 42, 183-202

[Kriegel et al. 1997] Kriegel, A. & Michor, P. W. (1997) *The convenient setting of global analysis*, in: Math. Surveys Monographs, Vol.53, Par. 45, Chap. IX, 487-497, American Mathematical Society

[Fiala 2001] Fiala, Z. (2001) Theory of finite deformations and differential geometry, in: *Euromech Colloquium 430: Formulations and constitutive laws for very large strains*, (J.Plešek ed), Prague 2000, 37-51

[Fiala 2003] Fiala, Z. (2003) Large deformation - large amount of unknown, in: *Engineering Mechanics 2003* (J.Náprstek & C.Fischer eds), Svratka 2003, 74-75

[Fiala 2004a] Fiala, Z. (2004a) Time derivative obtained by applying Riemannian manifold of Riemannian metrics to kinematics of continua, *C. R. Mecanique*, 332(2), 97-105

[Fiala 2004b] Fiala, Z. (2004b) Novel objective time derivative obtained from applying Riemannian manifold of Riemannian metrics to kinematics of continua, *Journal of the Mechanical Behaviour of Materials*, 15(6), 391-400

[Fiala 2004c] Fiala, Z. (2004c) Objective time derivative defined as covariant derivative, in: *Engineering Mechanics 2004* (I.Zolotarev & A.Poživilová eds), Svratka 2004, 75-76

[Frankel 1997] Frankel, T. (1997) *The geometry of physics. An introduction*, Cambridge University Press

[Freed et al. 1989] Freed, D. S. & Groisser, D. (1989) The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and its quotient by the diffeomorphism group, *The Mitchigan Mathematical Journal*, 36, 323-344

[Marsden et al. 1993] Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R. (1993) *Mathematical foundations of elasticity*, Dover Publications

[Rougée 1997] Rougée, P. (1997) *Mécanique des grandes transformations*, in: Mathématique & Applications 25, Springer-Verlag

[Simo et al. 1988] Simo, J. C., Marsden, J. E., & Krishnaprasad, P. S. (1988) The Hamiltonian Structure of Nonlinear Elasticity: The Material and Convected Representations of Solids, Rods, and Plates, *Archivec for Rational Mechanics and Analysis*, 104, 125–183

Příloha: Velmi stručný přehled kinematiky kontinua

Nechť těleso $\mathcal{B}$ zaujímá souvislou oblast 3-dimenzionálního Euklidovského prostoru $\mathbb{E}^3$, který budeme dále pojímat jako Riemannovu varietu $\mathcal{E}^3$ [Dodson et al. 1997, Frankel 1997]. ***Deformaci tělesa***, kterou globálně popíšeme pomocí difeomorfismu $\Phi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}^3$, charakterizuje z lokálního hlediska pole tenzoru deformací – nejčastěji pravých Cauchyho-Greenových deformačních tenzorů $C^\flat$. Označíme-li totiž symbolem g metriku na $\mathcal{E}^3$, tj. dostatečně hladké, symetrické, pozitivně definitní, kovariantní tenzorové pole druhého řádu, pak jeho hodnota v libovolném bodě $x \in \mathcal{E}^3$ představuje tenzor, který definuje skalární součin vektorů s počátkem v tomto bodě – a tedy i geometrii okolí tohoto bodu. Skalární součin dvou vektorů $u, v \in T_x\mathcal{E}^3$, s počátkem v bodě x lze vyjádřit vztahy

$$g_x(u,v) := g_{ij}\, u^i v^j = u_j\, v^j \equiv \langle u^\sharp, v\rangle_{T_x\mathcal{E}^3} . \tag{41}$$

Metrika g kromě toho umožňuje zavést zobrazení $\mathbf{g}: T_x\mathcal{E}^3 \to T_x^*\mathcal{E}^3$ pomocí vztahu

$$g(u,v) = \langle \mathbf{g}u, v\rangle_{T_X\mathcal{B}} , \tag{42}$$

takže každému vektoru u lze přiřadit asociovaný kovektor $u^\flat = \mathbf{g}u$, a naopak, každému kovektoru a asociovaný vektor $a^\sharp = \mathbf{g}^{-1}a$.

Pole *pravých Cauchyho-Greenových deformačních tenzorů* pak popisuje geometrii deformovaného tělesa z hlediska pozorovatele pevně spojeného s nedeformovaným tělesem, což právě vyjadřuje výraz

$$C^\flat = \Phi^*(g), \text{ tj. } \quad \mathbf{C}^\flat = \mathbf{G}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{C} , \tag{43}$$

kde pomocí G označíme metriku na referenční konfiguraci $\mathcal{B}$.

Podobně, pro pole *Piolových deformačních tenzorů* získáme z kontravariantního pole $g^\sharp$ asociovaného s metrikou g vztah

$$B^\sharp = \Phi^*(g^\sharp), \text{ tj. } \quad \mathbf{B}^\sharp = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{G}^{-1} . \tag{44}$$

Použitá operace pull-back Φ^*, a k ní inverzní operace push-forward Φ_*, přirozeným způsobem transformuje tenzorová pole nad $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}^3$ (viz. [Fiala 2001, Fiala 2003]).

Uvažujme nyní ***deformační proces***, tj. časovou posloupnost difeomorfismů $\Phi_t : \mathcal{B} \to \mathcal{E}^3$, a označme symbolem $\mathcal{S} = \Phi_t(\mathcal{B})$ *aktuální konfiguraci*. Pro obecné tenzorové pole θ nad $\mathcal{E}^3$ pak platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{v_t}\right)\theta = \Phi_{t\,*} \circ \frac{d}{dt}\,\Phi_t^*\,(\theta) , \tag{45}$$

kde symbol $\mathcal{L}_{v_t}$ označuje *Liovu derivaci* vzhledem k Eulerovu poli rychlostí v_t. V našem případě, kdy používáme časově závislá tenzorová pole, je třeba ji modifikovat parciální časovou derivací ∂_t na tvar [Abraham et al. 1988, Frankel 1997]

$$L_{v_t} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{v_t} . \tag{46}$$

Přitom platí [Frankel 1997]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{v_t}\right) g = \mathcal{L}_{v_t}\, g = 2\left[(\widehat{\nabla} v_t)^\flat\right]_{sym} = 2d^\flat, \tag{47}$$

kde

$$(\widehat{\nabla} v_t)^\flat = (v_t)_i|_j\, dx^i \otimes dx^j, \tag{48}$$

a zároveň

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{v_t}\right) g^\sharp = \mathcal{L}_{v_t}\, g^\sharp = 2\left[(\widehat{\nabla} v_t)^\sharp\right]_{sym} = -2d^\sharp, \tag{49}$$

kde nyní

$$(\widehat{\nabla} v_t)^\sharp = (v_t)^i|^j\, \partial x^i \otimes \partial x^j. \tag{50}$$

Symbol $\widehat{\nabla}$ označuje *kovariantní derivaci* asociovanou s metrikou g v $\mathcal{E}^3$. Pozorovatel spojený s vlastním tělesem pak veličiny $2d^\flat$ a $-2d^\sharp$ z pravých stran rovnic (47), (49) interpretuje jako $\partial C^\flat$ a $\partial B^\sharp$

$$\partial C^\flat := \frac{\partial}{\partial t}\, C^\flat = 2\Phi_t^* d^\flat \tag{51}$$

$$\partial B^\sharp := \frac{\partial}{\partial t}\, B^\sharp = -2\Phi_t^* d^\sharp. \tag{52}$$

Pokud vyjádříme Eulerovo zrychlení a_t pomocí nástrojů prostoru $\mathcal{E}^3$, získáme další užitečný vztah [Marsden et al. 1993]

$$a_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\nabla}_{\dot c}\right) v_t\,, \tag{53}$$

ve kterém $c(t) = \Phi_t(X)$ reprezentuje trajektorii zvoleného bodu $X \in \mathcal{B}$ v prostoru $\mathcal{E}^3$, a $\dot c = v_t$. Kovariantní derivace $\widehat{\nabla}_{\dot c}\, \theta$ podél trajektorie – obecně libovolného tenzorového pole θ v $\mathcal{E}^3$, vyjadřuje rychlost změny tenzorové veličiny $\theta(x)$ v bodě x, když bodem $x = c(t)$ přecházíme ve směru a rychlostí danou odpovídajícímu tečnému vektoru $v_t(x) = \dot c(t)$.

Protože Cauchyho-Greenovo tenzorové pole $C^\flat$ představuje konvektivní metriku na tělese $\mathcal{B}$, (prostor $\mathcal{B}$ s metrikou $C^\flat$ je díky zobrazení Φ_t izometrický s prostorem $\mathcal{S}$ s metrikou g), dále platí [Simo et al. 1988]

$$\partial C^\flat = \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}\, C^\flat = 2\left[(\widetilde{\nabla} \mathbf{v}_t)^\flat\right]_{sym} \tag{54}$$

$$\partial B^\sharp = \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}\, B^\sharp = 2\left[(\widetilde{\nabla} \mathbf{v}_t)^\sharp\right]_{sym}, \tag{55}$$

kde $\widetilde{\nabla} = \Phi_t^*(\widehat{\nabla})$ označuje kovariantní derivaci asociovanou s konvektivní metrikou $C^\flat$ prostoru $\mathcal{B}$, a $\mathcal{L}_{\mathbf{v}_t} = \Phi_t^*(\mathcal{L}_{v_t})$, přičemž $\mathbf{v}_t = \Phi^*(v_t) \in T\mathcal{B}$ označuje konvektivní pole rychlostí. Pokud zavedeme konvektivní pole zrychlení $\mathbf{a}_t = \Phi^*(a_t) \in T\mathcal{B}$, zároveň také platí

$$\mathbf{a}_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \widetilde{\nabla}_{\mathbf{v}_t}\right) \mathbf{v}_t\,. \tag{56}$$