

SELF-EXCITED OSCILLATION OF THE THIN-WALLED ELASTIC TUBES

H. Chlup^{***}, F. Maršík^{**}, S. Konvičková^{*}

Summary: *The simulation of the fluid flow through elastic pipes has many applications in a blood flow through human vessels – investigation of such phenomena as an atherosclerosis generation in artery walls, the Korotkoff's sounds generation or modeling of vascular mechanical substitutes (the so called "stents") and is therefore widely studied. Aim task is to solve the blood flow through the elastic tubes analytically, numerically and experimentally and to analyze the relation of the mechanical properties of the blood and of the vessel wall and flow instabilities, all focused on biomechanics of the cardio-vascular system. The analysis shows that frequency of self-excited oscillations increases with the decrease of arterial compliance.*

1. Úvod

Tato práce se věnuje studiu samobuzeného kmitání tenkostěnných elastických trubic vlivem průtoku kontinuálního toku kapaliny. Popsaný experiment byl navržen především pro uplatnění při zkoumání a pochopení podobných jevů objevujících se v srdečně cévním systému člověka. Naším cílem bylo sestavit experimentální zařízení, které by umožnilo ověření matematických modelů nejprve měřením charakteristik samobuzeného kmitání tenkostěnných latexových trubic, v budoucnu snad na vzorcích cév. Problém proudění kapaliny v elastické trubici se zabývá řada autorů z nichž uvádíme alespoň (Shapiro, Fung, Grotberg, S. Hayashi ...)

Nejznámějším jevem způsobeným samobuzenými kmity v kardiovaskulárním systému jsou tzv. Korotkovovy zvuky (Maršík 2002). Vydává je pažní tepna po částečném uvolnění škrtící manžety při běžném měření tlaku. Danahy a Ronan popsali v roce 1974 další jev: hučení nebo bzukot mozkových vén. Tento jev má původ v kmitání krční žíly, která se zhroutila v důsledku nízkého hydrostatického tlaku. Také kmitání koronárních cév bylo sledováno během chirurgických operací srdce (Tsuji et al. 1978).

Studiu samobuzených kmitů je velmi blízká i problematika kolapsu elastických trubic. Pravděpodobně toto borcení cév vyvolané průtokem krve hraje roli v autoregulaci dodávky

* Ing. Hynek Chlup, Prof. Ing. Svatava Konvičková, CSc., Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, Laboratory of Biomechanics of Man, Prague, Technická 4, 166 07 Prague 6, Czech Republic, chlup@seznam.cz, Svatava.Konvickova@fs.cvut.cz, tel.: 22435 2690

** Prof. Ing. František Maršík, DrSc., Academy of Sciences of the Czech Republic, Institut of Thermomechanics, Laboratory of Biomechanics, Prague, Dolejškova 5, 182 00 Prague 8, Czech Republic, chlup@seznam.cz, marsik@it.cas.cz, tel.: 26605 3294

krve k mnoha vnitřním orgánům. Na druhou stranu ale kolaps cév, v nichž je aterosklerotický plak může způsobit prasknutí, uvolnění nebo jiné mechanické poškození plaku, s následným ucpáním cévy a vážnými následky (Binns a Ku 1989, Ku 1997).

Obecně zmenšením průřezu trubice, kterou protéká kapalina, dojde k lokálnímu zvýšení rychlosti tekutiny a podle Bernoulliho zákona dochází k dalšímu poklesu vnitřního tlaku tekutiny v trubici. Následkem je další zúžení elastické trubice. Tento princip může vést až ke kolapsu tenkostěnné trubice.

Spontánní kmitání se v lidském těle objevuje i v jiných souvislostech: různé dýchací zvuky jako např. sípání, chrápání, ... Tvorba řeči a zpěv jsou kontrolované vibrace hlasivek. Podobně zpěv ptáků zahrnuje kmitání ní souboru membrán v ptačím hrdle.

2. Popis materiálových vlastností proudící tekutiny a elastických trubic

Při experimentech simulujících kardiovaskulární systém se používá několik typů tekutin nahrazujících krev. Nejběžnější tekutinou je voda. Při takových experimentech se kapalina (krev) považuje za nestlačitelnou newtonskou tekutinu s konstantní viskozitou μ a hustotou ρ . Ve skutečnosti je krev tzv. tixotropní tekutina; její viskozita roste s klesající rychlostí deformace. Na viskozitu krve má vliv i hodnota hematokritu, což je objemový podíl krevních částic k celkovému objemu krve. Čím vyšší je hematokrit v krvi, tím větší je rozdíl hodnot viskozity při pomalém a rychlém pohybu. Pro hodnotu hematokritu kolem 45% (což je průměrná fyziologická hodnota), se při zvýšení smykové rychlosti z $0,1 \text{ s}^{-1}$ na 100 s^{-1} se viskozita μ sníží desetkrát z $0,1 \text{ s/m}^2$ na $0,01 \text{ s/m}^2$. Ve většině literatury se akceptuje možnost simulovat krev ve velkých cévách newtonskou kapalinou. Jinou, dražší ale moderní možností je při experimentech použití tzv. magnetoreologických tekutin. To jsou suspenze mikročástic, které se dají zmagnetizovat. Reologické vlastnosti těchto tekutin je možné opakovaně měnit v závislosti na koncentraci, velikosti a tvaru mikročástic. Rozsah použití a vlastností těchto látek se pohybuje od chování kapaliny až po pevnou látku podle působení a velikosti magnetického pole. V současné době se sledují a popisují různé mikroskopické struktury a porovnávají se jejich reologické vlastnosti. (Liu 2002).

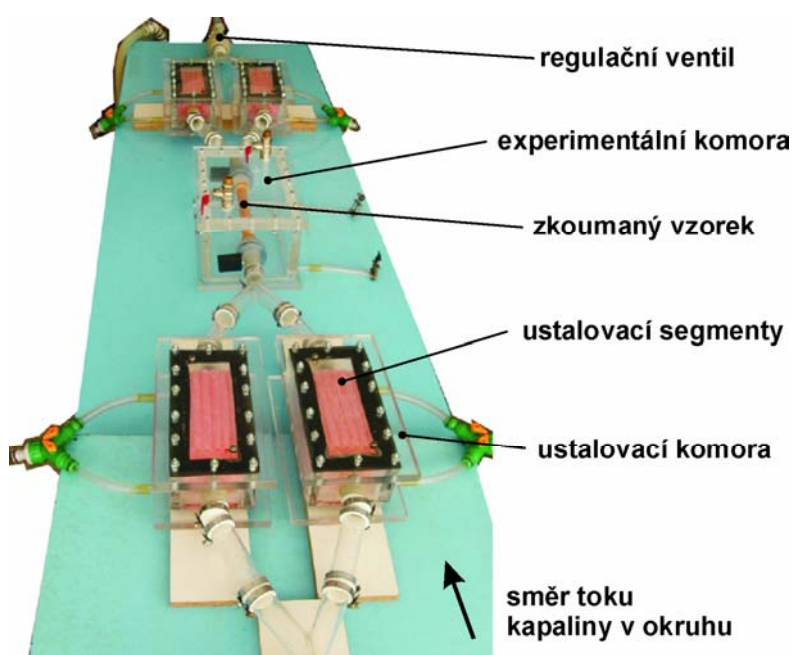
Vzorky tenkostěnné trubice s níž jsme pracovali mají vnitřní průměr 14 mm. Považujeme tedy použití vody jako kapaliny za přijatelné.

Požadavkem bylo, aby se k experimentům použité tenkostěnné trubice svými elastickými vlastnostmi přiblížily vlastnostem lidských cév. Z těchto důvodů porovnáme fyziologické vlastnosti lidských cév s vlastnostmi trubic použitých při experimentu. Průměrná tloušťka cévní stěny aorty o průměru 20 mm se pohybuje v rozmezí 0,8 až 1,8 mm, u psa okolo 0,7 mm (vnitřní průměr aorty cca 7mm). Je známo, že poměr tloušťky stěny ku průměru cévy se u lidí pohybuje v rozmezí od 0,03 u mladých jedinců, do 0,1 u starých lidí. Také platí, že čím je céva blíže k srdci, tím je tento poměr nižší (Valenta 1985).

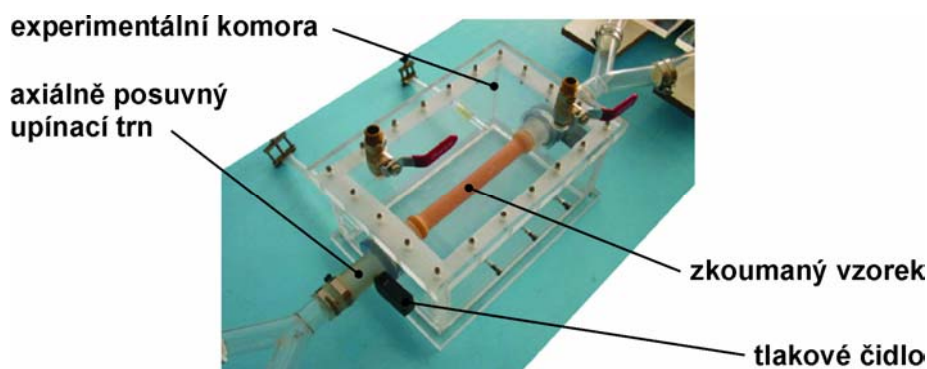
V experimentu použité vzorky elastických latexových trubic měly při vnitřním průměru 14 mm tloušťku stěny 0,8, 1 a 1,2 mm. Předpokládáme-li, že pro účely studia samobuzených kmitů je směrodatný poměr tloušťky stěny ku průměru trubice, uvedená elastická latexová trubice tyto podmínky splňuje.

3. Experimentální zařízení

Byla navržena a zkonstruována experimentální trať pro sledování samobuzených oscilací elastických trubíc (Obr. 1 a 2). Tekutina (prozatím destilovaná voda) je čerpána do okruhu z nádrže hydrodynamickým čerpadlem. Množství dodávané kapaliny do okruhu je možné regulovat ventilem na výtlaku čerpadla. Za ventilem proud kapaliny prochází ustalovacími komorami, ve kterých dojde k rozvětvení proudu kapaliny do ustalovacích segmentů. Kapalina pokračuje dále do zkoumaného vzorku tenkostěnné elastické latexové trubice. Vzorek je umístěn v experimentální komoře a je uchycen na axiálně posuvných trnech. Trny jsou osazeny tlakovými senzory a umožňují nastavit požadované axiální předpětí elastické trubice. Za experimentální komorou jsou zařazeny opět ustalovací komory s ustalovacími segmenty. Zpět do nádrže se kapalina vrací přes regulační ventil. Ustalovací komory v okruhu slouží k odstínění experimentální komory se vzorkem od nežádoucích rušivých jevů odehrávajících se v kapalině v přívodní a odpadní větvi (před a za experimentální komorou).



Obr. 1



Obr. 2

4. Experimentální výsledky

Měření probíhalo zatím na třech elastických latexových trubicích ze stejného materiálu vyrobených na zakázku. Vnitřní průměr trubic byl 14 mm a tloušťka stěny jednotlivých vzorků byla 0,8 mm, 1 mm a 1,2 mm. Trubice byly uchyceny na axiálně posuvných trnech a předepjaty o 25% své počáteční klidové délky. Vzorky byly uchyceny na trnech tak aby nedošlo k jejich deformaci v obvodovém směru (zkroucení).

Souhrou regulačního ventilu a ventilu na čerpadle byl zvyšován průtok tak, aby se frekvence samobuzených oscilací pohybovala mezi lehkým pulzováním 2 puls/s (Hz) až po rychlé kmitání 10 puls/s (Hz). Po dosažení nejvyšší frekvence kmitů jsme začali průtok kapaliny opět snižovat, abychom zachytili projevy předpokládané hystereze oscilací tenkostěnné elastické trubice (Obr. 5).

Pro každou sérii měření jsme zaznamenali klidovou tlakovou diferenci na elastické trubici před rozkmitáním. Tato tlaková difference reprezentuje energetickou ztrátu kapaliny získanou průchodem vzorku. Byl snímán časový průběh tlaku s frekvencí 300 Hz a střední hodnota průtoku kapaliny pro každý režim kmitání. Průtok byl měřen objemovou metodou.

5. Matematická formulace problému

Vzájemnou silovou interakci proudící tekutiny a elastické trubice popíšeme rovnicemi bilance hmotnosti a bilance hybnosti proudící tekutiny (Šembera 2002). Jejich současným řešením dostáváme důležité relace mezi změnou tlaku v trubici a změnou jejího průřezu. Tyto matematické relace lze shrnout do materiálového vztahu popisujícího elastické vlastnosti trubice (Fung 1996, Hayashi 1998, Maršík 2002) (1).

$$p_i - p_e = N \cdot \left[\left(\frac{A_{ef}}{A_0} \right)^\alpha - 1 \right] \quad (1)$$

Kde α vyjadřuje materiálový exponent, $p_i - p_e$ je transmurační tlak, p_i je vnitřní (interní) tlak v trubici, p_e je vnější (externí) tlak na trubici, $N \approx \frac{4 \cdot h \cdot E}{3 \cdot a}$, h je tloušťka stěny trubice, E je Youngův modul pružnosti, a je poloměr trubice.

Počáteční stav trubičky před naplněním kapalinou znázorňuje silná přerušovaná čára. Při nízkém průtoku kapaliny se trubička postupně zdeformuje do tvaru nakresleného tenkou plnou čárou. Okolo této polohy se při zvyšování průtoku potom rozkmitá (tenká přerušovaná a tlustá plná čára). V bodech 1 a 2 byl vzorek upevněn na trny s tlakovými čidly (Obr.3).

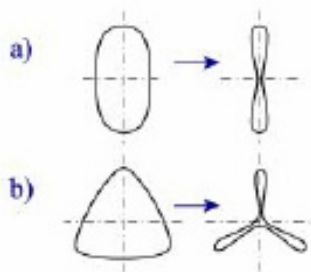


Obr. 3

Je obtížné zjistit, jak se během oscilací přesně mění průřez trubice. (Fung, 1996) popsal dva základní typy zborcení elastické kruhové trubice, které se mění se vzrůstajícím průtokem (Obr. 4). Všechny námi provedené experimenty se blíží prvnímu

popsanému typu zborcení kruhové elastické trubice (Obr. 4a).

Pro výpočet efektivního průřezu A_{ef} trubice při oscilacích použijeme následující zjednodušení a předpoklady:



Obr. 4

- trubice si stále zachovává stejný obvod
- plocha průřezu se mění z klidové A_0 na efektivní při oscilacích A_{ef} , kolem které průřez osciluje
- počítáme se střední hodnotou průtoku proto pro výpočet A_{ef} využijeme Hagen-Poiseuillova zákona

Tímto byl získán zjednodušený vztah pro výpočet průřezu trubice v místě jejich oscilací, efektivní průřez (2). Protože jsme zatím neměli možnost snímat hodnoty průtoku v reálném čase a měli jsme k dispozici jen střední hodnotu průtoku pro

daný režim oscilací, potom tlaky p_1 a p_2 jsou zde vypočtené střední hodnoty tlaků odebíraných v reálném čase v místech 1 a 2 (Obr. 3).

$$A_{ef} = \sqrt{\frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot L \cdot Q_s}{p_1 - p_2}} \quad (2)$$

Rychlost pulzní vlny šířící se po trubici, byla určena z podmínky nestability. Samobuzené oscilace vznikají, pokud se rychlost šíření pulzní vlny c_0 vyrovná rychlosti proudící kapaliny v_0 . Tento předpoklad však platí pouze v případě, že má trubice během kmitání stále kruhový průřez, který se zvětšuje a zmenšuje. Pokud se vzorek deformuje, musí rychlosti v_0 a c_0 splňovat podmínku (3), (Obr. 3 a 4), (Klingerová 2005).

$$v_0 = c_0 \cdot \left(\frac{A_{ef}}{A_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (3)$$

Odtud snadno vyjádříme vztah pro rychlost šíření pulzní vlny c_0 .

$$c_0 = v_0 \cdot \left(\frac{A_0}{A_{ef}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (4)$$

Jednou z možností jak určit střední rychlost tekutiny poskytují následující vztahy.

$$v_0 = f \cdot \lambda \quad (5)$$

$$v_0 = \lambda \cdot f = c_0 \cdot \left(\frac{A_{ef}}{A_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (6)$$

Rychlost šíření postupné vlny podél elastické trubice je určena vztahem

$$c_0^2 = \frac{4 \cdot \alpha \cdot h \cdot E}{3 \cdot a \cdot \rho} \quad (7)$$

Dosadíme-li do podmínky nestability tak jak je definované v (3) za střední rychlost toku kapaliny (5) a za rychlost šíření postupné (pulzní) vlny (7) získáme relací mezi frekvencí kmitů f , vlnovou délkou λ a elastickým modulem E .

$$\lambda^2 \cdot f^2 = \frac{4 \cdot \alpha \cdot h \cdot E}{3 \cdot a \cdot \rho} \cdot \left(\frac{A_{ef}}{A_0} \right)^\alpha \quad (8)$$

$$E = \frac{3 \cdot a \cdot \rho \cdot \lambda^2 \cdot f^2}{4 \cdot \alpha \cdot h} \cdot \left(\frac{A_0}{A_{ef}} \right)^\alpha \quad (9)$$

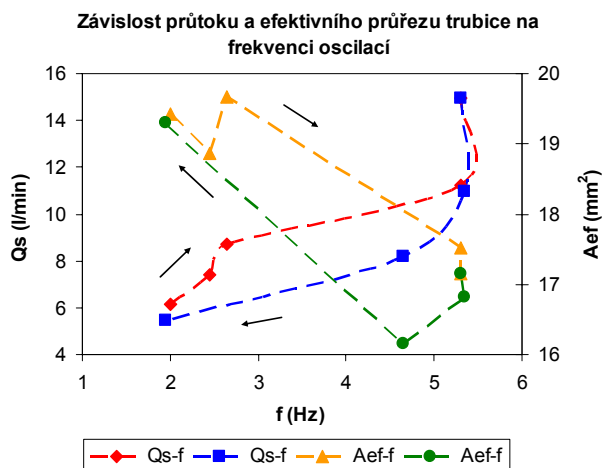
Takto získaný Youngův modul je ovšem celkovým modulem pružnosti trubice i kapaliny jako jediné části nehomogenního kontinua. Materiálová konstanta α bývá rovna 1/2, pro biologické materiály může být i vyšší. Její přesnou hodnotu neznáme, proto byly vypočteny různé hodnoty modulu pružnosti pro různé hodnoty parametru α , (Obr. 6). Z dříve provedených tahových zkoušek materiálu trubic systémem MTS byl získán Youngův modul pružnosti v podélném směru v rozmezí $E = 1$ až 1,14 MPa.

6. Porovnání teorie s experimenty

Každý vzorek byl rozkmitán zhruba do 8 modů oscilací. Nejlepších výsledků bylo dosaženo s trubicí o tloušťce stěny 1 mm. Proto byl vybrán jako reprezentant a dále budou uváděny výsledky vztahující se k tomuto vzorku.

Získané záznamy tlakových oscilací byly zpracovány rychlou Fourierovou analýzou a byly detekovány hlavní frekvence průběhu tlaků, kmitů trubice. Z experimentálně získaných hodnot průtoků a z časových záznamů tlaků na začátku a konci elastické trubičky byly dle (2) vypočteny efektivní průřezy deformované trubice pro jednotlivé režimy oscilací. Při experimentech byla změřena vlnová délka postupné vlny na elastické trubicí. Z těchto hodnot pak určíme rychlost toku kapaliny a rychlost šíření pulzní vlny po stěně latexové trubice.

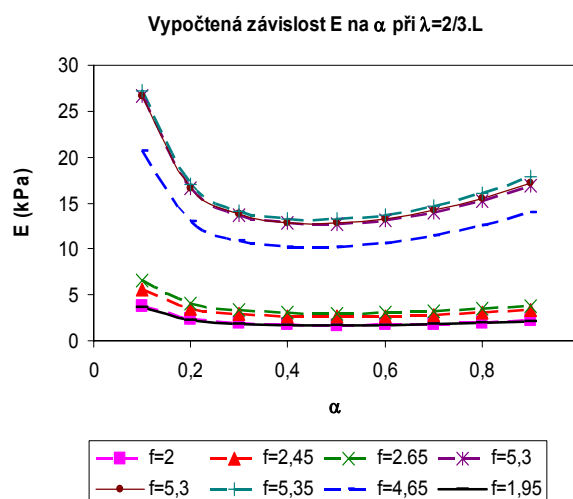
Pro každou elastickou trubicí byla sestrojena závislost frekvence samobuzených oscilací na průtoku kapaliny a závislost efektivního průřezu oscilující trubice na průtoku a frekvenci oscilací, (Obr. 5).



Obr. 5

Jednou z vlastností metody výpočtu E dle vztahu (9), je silná závislost Youngova modulu pružnosti na délce stojaté vlny λ a frekvenci oscilací trubice f . Velikost vlnové délky byla z experimentů zvolena $\lambda = 2/3 \cdot L$, kde L je vzdálenost bodu 1 a 2 viz. (Obr. 3). Vypočtená závislost Youngova modulu pružnosti na materiálovém součiniteli α dle vztahu (9) je znázorněná na (Obr. 6).

Zvolíme-li např. $\lambda = 1/2 \cdot L$, dostaneme rozmezí hodnot E od 1 do 18 kPa. Pro $\lambda = 1 \cdot L$ se hodnoty E pohybují mezi 1 až 65 kPa; v obou případech se koeficient α pohyboval v intervalu $\langle 0,1; 0,9 \rangle$.



Obr. 6

7. Diskuse

Při provádění experimentů byl nalezen postup, jak přivést elastickou trubici do režimu samobuzených oscilací a jak regulovat frekvenci samobuzených kmitů. Způsob měření vycházel z počátečního naladění soustavy na samobuzené kmitání souhrou ventilu na čerpadle a regulačního ventilu. Následným zvyšováním průtoku ventilem na čerpadle byla trubice uváděna do různých režimů oscilací.

Podle předpokladů se prokázala hystereze v závislosti střední hodnoty průtoku Q_s a efektivního průřezu A_{ef} na frekvenci oscilací f . Při zvyšování průtoku kapaliny narůstá závislost Q_s - f , A_{ef} - f jiným způsobem, než pokles Q_s - f , A_{ef} - f při snižování průtoku, (Obr. 5). Rychlost proudění tekutiny byla určena analýzou frekvencí oscilací trubice a vlnové délky (5). Takto vypočtené hodnoty rychlosti řádově odpovídají rychlosti kapaliny, která byla vizuálně odhadována během experimentů.

Hodnotu materiálové konstanty α neznáme. Víme však, že bývá rovna $1/2$ i více u biologických vzorků. Byla proto vypočtena dle vztahu (9) závislost modulu pružnosti E na α v rozsahu od 0,1 do 0,9, (Obr. 6). Tyto hodnoty jsme porovnávali s modulem pružnosti, změřeným systémem MTS. Předpokládáme, že námi použitý matematický model (9) popisuje modul pružnosti stěny trubice a kapaliny dohromady. Vypočtený modul pružnosti by tedy náležel „náhradní tyči“ o geometrických parametrech elastické trubice naplněné kapalinou.

8. Závěr

Bylo sestaveno plně funkční experimentální zařízení pro zkoumání samobuzených oscilací tenkostěnných elastických trubic, (Obr. 1 a 2). Byl odvozen a testován zjednodušený vztah pro výpočet efektivního průřezu kmitající elastické trubice (2). Pomocí tohoto vztahu byly získány charakteristiky závislostí mezi středními hodnotami průtoku kapaliny, frekvencí

kmitání vzorků a efektivním průřezem, (Obr. 5). Vztah mezi Youngovým modulem pružnosti E a materiálovým parametrem α (9) nebyl zatím uspokojivě určen. Je třeba lépe popsat vazbu mezi vlastnostmi kapaliny a stěny trubice. V současném stavu řešení problematiky vyjadřují určené hodnoty modulu pružnosti E elastické vlastnosti trubice a kapaliny jako celku. Navržené vztahy a postupy byly ověřeny experimenty a bylo zjištěno, za jakých podmínek je lze využít k přibližnému odhadu sledovaných veličin. Provedením a vyhodnocením experimentu byla získána představa o možnostech měření na navržené experimentální lince a o chování elastické trubice v režimu samobuzených oscilací. Přesnější ověření navržené metody vyžaduje provedení rozsáhlejší experimentální práce a podrobnější matematický popis a modelování. Dalším otevřeným problémem zůstává určení všech dosud neznámých vlivů, které oscilace elastické trubice skutečně ovlivňují.

9. Poděkování

Tato práce vznikla za laskavé podpory GAČR 106/04/1181, MSM 6840770012

10. Literatura

- Binns, R. L., Ku, D. N. (1989) Effect of stenosis on wall motion - a possible mechanism of stroke and transient ischemic attack. *Arteriosclerosis*. no. 9, s. 842-847.
- Fung, Y. C. (1996) *Biomechanics : Circulation*. Springer, 571 s.
- Hayashi, S., Hayase, T., Kawamura, H. (1998) Numerical analysis for stability and self-excited oscillation in collapsible tube flow. *Transaction of the ASME*. vol. 120, s. 468-475.
- Heil, M., Jensen, O. E. (2005) *Flow past highly compliant boundaries and in collapsible tubes* [online] [cit. 2005-06-01]. Dostupný z WWW: <<http://www.maths.nott.ac.uk/personal/oj/OpenArchive/heiljensenchapter.pdf>>.
- Klinerová, K. (2005) Samobuzené kmitání elastických trubic, České vysoké učení technické v Praze, Diplomová práce.
- Ku, D. N. (1997) Blood ow in arteries. *Ann. Rev. Fluid Mech.* no. 29, s. 399-434.
- Liu, Jing. (2002) Magnetorheological fluids: from basic physics to application. *JSME International Journal*. vol. 45, no. 3. s. 55-60.
- Maršík, F., Převorovská, S., Štembera, V. (2002) The Influence of Compliance and Resistance of Arteries on Korotkoff Sound Generation in Numerical Modelling. *Acta of Bioengineering and Biomechanics : Proceedings of the 13th Conference of European Society of Biomechanics, Wroclaw*. vol. 4, sup. 1, s. 716-717.
- Štembera, V. (2002) *The flow through visco-elastic tubes* [s.l.], 89 s. Matematicko-fyzikální fakulta University Karlovy v Praze. Diplomová práce.
- Tsuji, T. et al. (1978) Study on haemodynamics. *Artificial Organs*. no. 7, s. 435-438.
- Valenta, J. a kol. (1985) *Biomechanika*, Academia Praha